Ej: Resolver

$$I = \int \frac{dx}{2x^2+3x-1}$$

Sol:

$2x^2+3x-1 = 2\left(x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}\right)$ y nuestra integral es

$$I = \int \frac{dx}{2(x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{2})} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}}$$

Completemos cuadrado el polinomio $x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$

$$x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{2} = x^2+2\cdot\frac{3}{4}x+\left(\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{2} =$$

$$= \left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}-\frac{1}{2} = \left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{17}{16}$$

Luego

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+\frac{3}{4})^2-\frac{17}{16}} = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\frac{17}{16}-(x+\frac{3}{4})^2}$$

Esta integral tiene como modelo $\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \operatorname{argth} x$ y luego

$$\frac{17}{16}-\left(x+\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{17}{16}\left(1-\frac{16}{17}\left(x+\frac{3}{4}\right)^2\right)$$

y, por tanto,

$$I = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\frac{17}{16}\left[1-\frac{16}{17}(x+\frac{3}{4})^2\right]} = -\frac{16}{2\cdot 17}\int \frac{dx}{1-\frac{16}{17}(x+\frac{3}{4})^2} =$$

$$= -\frac{8}{17}\int \frac{dx}{1-\frac{16}{17}(x+\frac{3}{4})^2}$$

Haciendo

$$\frac{16}{17}\left(x+\frac{3}{4}\right)^2 = t^2$$

y tomando raíces cuadradas

$$\frac{4}{\sqrt{17}}\left(x+\frac{3}{4}\right) = t$$

Diferenciando

$$\frac{4}{\sqrt{17}}\,dx = dt \quad ; \quad dx = \frac{\sqrt{17}}{4}\,dt$$

Luego

$$I = -\frac{8}{17}\int \frac{\frac{\sqrt{17}}{4}\,dt}{1-t^2} = -\frac{2\sqrt{17}}{17}\int \frac{dt}{1-t^2} =$$

$$= -\frac{2\sqrt{17}}{17}\,\operatorname{arg\,th} t + C$$

Deshaciendo el cambio

$$\boxed{I = -\frac{2\sqrt{17}}{17}\,\operatorname{arg\,th}\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\left(x+\frac{3}{4}\right)\right) + C}$$

(9) Integrales del tipo

$$\int \frac{(Mx+N)}{ax^2+bx+c}\,dx \quad ; \quad \int \frac{(Mx+N)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

Estas integrales se resuelven utilizando una técnica parecida al caso (7), es decir adaptamos al numerador la derivada del denominador y luego nos sale dos integrales, una fácil de resolver con un cambio de variable y la otra del tipo (8)

Ej:

$$I = \int \frac{3x-2}{x^2+5x+7}\,dx$$

Como $(x^2+5x+7)' = 2x+5$, primero convertimos el '3' del numerador en un "1" y luego multiplicamos y dividimos por 2

$$I = \int \frac{3(x-\frac{2}{3})}{x^2+5x+7}\,dx = 3\int \frac{x-\frac{2}{3}}{x^2+5x+7}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2(x-\frac{2}{3})}{x^2+5x+7}\,dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x-\frac{4}{3}}{x^2+5x+7}\,dx$$

Ya tenemos $2x$ y ahora nos falta 5, luego sumamos y restamos 5 y queda

$$I = \frac{3}{2}\int \frac{2x+5-5-\frac{4}{3}}{x^2+5x+7}\,dx = \frac{3}{2}\left[\int \frac{2x+5\,dx}{x^2+5x+7} - \frac{19}{3}\int \frac{dx}{x^2+5x+7}\right]$$

(β)

La primera integral $\int \frac{2x+5}{x^2+5x+7}dx$ es fácil porque la derivada del denominador es el numerador y, por tanto,

$$\int \frac{2x+5}{x^2+5x+7}\,dx = \ln(x^2+5x+7)$$

y la segunda integral $\int \frac{dx}{x^2+5x+7}$ es del tipo (8)

Completemos cuadrado a x^2+5x+7

$$x^2+5x+7 = x^2+2\cdot\frac{5}{2}x+\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2+7 = \left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}+7 =$$

$$=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

luego

$$\int \frac{dx}{x^2+5x+7} = \int \frac{dx}{(x+5/2)^2+3/4} = \int \frac{dx}{3/4\left[1+\frac{4}{3}(x+5/2)^2\right]} =$$

$$= \frac{4}{3}\int \frac{dx}{1+\frac{4}{3}\left(x+\frac{5}{2}\right)^2}$$

y esta integral tiene como modelo $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x$, luego

$$\frac{4}{3}(x+5/2)^2 = t^2$$

Tomando raíces $\frac{2}{\sqrt{3}}(x+5/2) = t$

Diferenciando

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\,dx = dt \quad ; \quad dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\,dt$$

y, por tanto

$$\int \frac{dx}{x^2+5x+7} = \frac{4}{3}\int \frac{dx}{1+\frac{4}{3}(x+5/2)^2} = \frac{4}{3}\int \frac{\sqrt{3}/2\,dt}{1+t^2} =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,\text{arctg}\,t$$

y deshaciendo el cambio

$$\int \frac{dx}{x^2+5x+7} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,\text{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+5/2)\right)$$

Luego nuestra integral I es (ver (β))

$$\boxed{I = \frac{3}{2}\left[\ln(x^2+5x+7) - \frac{19}{3}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}\,\text{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+5/2)\right)\right] + C}$$

Ej:

$$I = \int \frac{2x+3}{\sqrt{4x^2+x+2}}\,dx$$

Como $(4x^2+x+12)' = 8x+1$, el "2" del numerador hay que convertirlo en 8 y luego habrá que sumar 1 y restar 1.

Luego

$$I = \frac{1}{4}\int \frac{4(2x+3)}{\sqrt{4x^2+x+2}}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{8x+12}{\sqrt{4x^2+x+2}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{8x+1-1+12}{\sqrt{4x^2+x+2}}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{(8x+1)+11}{\sqrt{4x^2+x+2}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\int \frac{8x+1}{\sqrt{4x^2+x+2}}\,dx + 11\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+x+2}}\right] \quad (1)$$

Para la primera integral $\int \frac{8x+1}{\sqrt{4x^2+x+2}}\,dx$, como $(4x^2+x+2)' = 8x+1$, hacemos el cambio

$$4x^2+x+2 = t^2 \quad \left(t = \sqrt{4x^2+x+2}\right.$$

y de aquí diferenciando

$$(8x+1)\,dx = 2t\,dt$$

Luego

$$\int \frac{8x+1}{\sqrt{4x^2+x+2}}\,dx = \int \frac{2t\,dt}{\sqrt{t^2}} = \int \frac{2t\,dt}{t} =$$

$$= \int 2\,dt = 2t = 2\sqrt{4x^2+x+2} \quad (

La segunda integral $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+x+2}}$ es del tipo 8

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+x+2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4\left(x^2+\frac{1}{4}x+\frac{2}{4}\right)}} = \int \frac{dx}{2\sqrt{x^2+\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}}}$$

Completando cuadrados $x^2+\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$ queda

$$x^2+\frac{1}{4}x+\frac{1}{2} = x^2+2\cdot\frac{1}{8}x+\left(\frac{1}{8}\right)^2-\left(\frac{1}{8}\right)^2+\frac{1}{2} =$$

$$= \left(x+\frac{1}{8}\right)^2-\frac{1}{64}+\frac{1}{2} = \left(x+\frac{1}{8}\right)^2+\frac{31}{64}$$

Luego

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+x+2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{8}\right)^2+\frac{31}{64}}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{31}{64}\left[\frac{64}{31}\left(x+\frac{1}{8}\right)^2+1\right]}} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{\frac{\sqrt{31}}{8}}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{64}{31}\left(x+\frac{1}{8}\right)^2+1}} = \frac{4}{\sqrt{31}}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{64}{31}\left(x+\frac{1}{8}\right)^2+1}}$$

Haciendo $\frac{64}{31}\left(x+\frac{1}{8}\right)^2 = t^2$

y, de aquí, $\frac{8}{\sqrt{31}}\left(x+\frac{1}{8}\right) = t$

Diferenciando

$$\frac{8}{\sqrt{31}}\,dx = dt \,; \qquad dx = \frac{\sqrt{31}}{8}\,dt$$

Luego

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+x+2}} = \frac{4}{\sqrt{31}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{64}{31}\left(x+\frac{1}{8}\right)^2+1}} =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{31}} \int \frac{\frac{\sqrt{31}}{8}\,dt}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} =$$

$$= \operatorname{argsh} t = \operatorname{argsh}\left(\frac{8}{\sqrt{31}}\left(x+\frac{1}{8}\right)\right) \quad (3)$$

Llevando (2) y (3) a (1) queda

$$\boxed{I = \frac{1}{4}\left[2\sqrt{4x^2+x+2} + 11 \operatorname{argsh}\left(\frac{8}{\sqrt{31}}\left(x+\frac{1}{8}\right)\right)\right] + C}$$

ⓑ Método de integración por partes

Este método se suele utilizar cuando en el integrando aparece un producto de un polinomio por una trigonométrica ($\operatorname{sen} kx$, $\cos kx$), un polinomio por una exponencial (e^{kx}) o una exponencial por una trigonométrica.

No obstante, tambien se usa para otro tipo de integrales como por ejemplo $\int \ln x \, dx$, $\int \operatorname{arctg} x \, dx$, etc.

El método se fundamenta en lo siguiente.

Teniendo en cuenta la diferencial de un producto,

$$d(uv) = u\,dv + v\,du$$

Integrando y teniendo en cuenta que $\int d\text{"algo"} = \text{"algo"}$ queda

$$\int d(uv) = \int u\,dv + \int v\,du$$

es decir,
$$uv = \int u\,dv + \int v\,du$$

y de aquí
$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

Ej:
$$I = \int x \operatorname{sen} 3x \, dx$$

Hacemos
$$u = x \longrightarrow du = dx$$
$$dv = \operatorname{sen} 3x \, dx \longrightarrow v = \int \operatorname{sen} 3x \, dx = -\frac{1}{3}\cos 3x$$

$$I = -\frac{1}{3}x\cos 3x - \int -\frac{1}{3}\cos 3x \, dx = -\frac{1}{3}x\cos 3x + \int \frac{1}{3}\cos 3x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{3}x\cos 3x + \frac{1}{3}\int \cos 3x \, dx =$$

$$= -\frac{1}{3}x\cos 3x + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + C =$$

$$= -\frac{1}{3}x\cos 3x + \frac{1}{9}\operatorname{sen} 3x + C$$

Algunas veces hay que aplicar el método varias veces

Ej: $I = \int x^2 e^{-x}\, dx$

Hacemos $u = x^2 \longrightarrow du = 2x\,dx$

$dv = e^{-x}\,dx \longrightarrow v = \int e^{-x}\,dx = -e^{-x}$

$$I = -x^2 e^{-x} - \int 2x(-e^{-x})\,dx = -x^2 e^{-x} + 2\int x e^{-x}\,dx$$

Y observamos que la integral que nos sale tiene un polinomio de grado una unidad mas bajo que el que nos piden y repetimos el proceso

Sea $I_1 = \int x e^{-x}\,dx$

$u = x \longrightarrow du = dx$

$dv = e^{-x}\,dx \longrightarrow v = \int e^{-x}\,dx = -e^{-x}$

$$I_1 = -x e^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -x e^{-x} - e^{-x}$$

Luego

$$\boxed{I = -x^2 e^{-x} + 2\left(-x e^{-x} - e^{-x}\right) + C}$$

Algunas veces al aplicar el método de integración por partes nos sale la integral buscada y entonces lo que se hace es tratar la expresión como una ecuación

Ej: $I = \int e^{2x} \operatorname{sen} x \, dx$

Hacemos $u = e^{2x} \longrightarrow du = 2e^{2x} dx$

$dv = \operatorname{sen} x \, dx \longrightarrow v = \int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x$

$$I = -e^{2x} \cos x + 2 \int e^{2x} \cos x \, dx \qquad (1)$$

Sea $I_1 = \int e^{2x} \cos x \, dx$ y aplicamos partes

$u = e^{2x} \longrightarrow du = 2e^{2x} dx$

$dv = \cos x \, dx \longrightarrow v = \int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x$

$$I_1 = e^{2x} \operatorname{sen} x - 2 \int e^{2x} \operatorname{sen} x \, dx$$

Pero ahora nos sale la integral buscada I, es decir

$$I_1 = e^{2x} \operatorname{sen} x - 2I$$

Luego llevando esta expresión a (1) queda

$$I = -e^{2x} \cos x + 2\left(e^{2x} \operatorname{sen} x - 2I\right)$$

y esto lo tratamos como una ecuación

$$I = -e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \operatorname{sen} x - 4I$$

y, de aquí,

$$5I = -e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\operatorname{sen} x$$

Luego

$$\boxed{I = \frac{1}{5}\left[-e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\operatorname{sen} x\right] + C}$$

Algunas integrales que también se resuelven por partes.

Ej: $I = \int \ln x \, dx$

Hacemos $u = \ln x \longrightarrow du = \frac{1}{x}dx$

$dv = dx \qquad v = \int dx = x$

$$I = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx = x\ln x - \int dx = \boxed{x\ln x - x + C}$$

Ej: $I = \int \operatorname{arctg} x \, dx$

Hacemos $u = \operatorname{arctg} x \longrightarrow du = \frac{1}{1+x^2}dx$

$dv = dx \qquad v = \int dx = x$

$$I = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}dx = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx$$

y como $(1+x^2)' = 2x$, resultará que

$$\boxed{I = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C}$$

(c) Integrales de funciones racionales

Llamaremos función racional al cociente de dos polinomios, es decir

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad \text{donde } P(x) \text{ y } Q(x) \text{ son polinomios}$$

Ej:

$$R(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x^2 + 2x + 1}$$

Estamos interesados en calcular $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.

Si $\operatorname{grad} P(x) \geq \operatorname{grad} Q(x)$, haciendo la división de polinomios

$$\begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ \hline \underbrace{R(x)} & C(x) \end{array} \quad \text{donde } \operatorname{grad} R(x) < \operatorname{grad} Q(x)$$

y aplicando la regla de la división

$$P(x) = C(x)\,Q(x) + R(x)$$

Luego

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int \frac{C(x)\,Q(x) + R(x)}{Q(x)}\,dx = \int \frac{C(x)\,Q(x)}{Q(x)}\,dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx$$

$$= \int C(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx$$

La primera integral es inmediata porque es la integral de un polinomio. Luego hemos reducido nuestra integral a otra donde el grado del numerador es más pequeño que el del denominador.

Ejemplo

$$I = \int \frac{x^4 - 3x^2 + 1}{x^3 + x + 1}\, dx$$

Entonces

$$\begin{array}{rl|l} \cancel{x^4} - 3x^2 + 1 & & x^3 + x + 1 \\ \cancel{-x^4} - x^2 - x & & x \\ \hline -4x^2 - x + 1 & & \end{array}$$

Luego $x^4 - 3x^2 + 1 = x(x^3+x+1) + (-4x^2-x+1)$ y, por tanto,

$$I = \int \frac{x(x^3+x+1) + (-4x^2-x+1)}{x^3+x+1}\, dx =$$

$$= \int \frac{x(x^3+x+1)}{x^3+x+1}\, dx + \int \frac{-4x^2-x+1}{x^3+x+1}\, dx =$$

$$= \int x\, dx + \int \frac{-4x^2-x+1}{x^3+x+1}\, dx = \frac{x^2}{2} + \int \frac{-4x^2-x+1}{x^3+x+1}\, dx$$

Luego hemos reducido nuestra integral a otra donde el grado del numerador es más pequeño que el del denominador.

Por tanto, nosotros estudiaremos $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$ con $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios y $\text{grad}\, P(x) < \text{grad}\, Q(x)$ (en caso contrario, dividimos los polinomios como en el ejemplo anterior)

Para resolver este tipo de integrales lo que se hace es calcular las raices del denominador $Q(x)$ (si el polinomio $Q(x)$ es de grado mayor que dos esto se hace aplicando Ruffini).

Distingamos cuatro casos.

<u>Caso 1</u> Que las raíces del denominador sean reales y distintas.

Ej: $$I = \int \frac{2x^2+3}{x^4-10x^2+9}\,dx$$

Como grado del numerador $2x^2+3$ es mas pequeño que el grado del denominador x^4-10x^2+9 no hay que dividir estos polinomios.

Calculemos las raices de x^4-10x^2+9

Una forma de hacerlo es como $x^4-10x^2+9=0$ es una ecuación bicuadrada, hacemos el cambio $x^2=t$ y queda

$$t^2-10t+9=0$$

$$t=\frac{10 \pm \sqrt{100-36}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2} \begin{cases} 9 \\ 1 \end{cases}$$

Luego si $t=9$ como $x^2=9$; $\boxed{x=\pm 3}$

Luego si $t=1$ como $x^2=1$ y de aquí $\boxed{x=\pm 1}$

Luego las raices son $\{1,-1,3,-3\}$ reales y distintas

Otra forma de hacerlo es aplicando Ruffini

Ensayamos con 1

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 0 & -10 & 0 & 9 \\
1) & & 1 & 1 & -9 & -9 \\
\hline
 & 1 & 1 & -9 & -9 & \boxed{0} \\
-1) & & -1 & 0 & 9 & \\
\hline
 & 1 & 0 & -9 & \boxed{0} &
\end{array}
$$

y ahora las otras dos raíces son de $x^2-9=0$ es decir

$x^2=9$ y de aquí $x=\pm 3$

Luego las raíces son $\{1, -1, 3, -3\}$

La descomposición del polinomio sería

$$x^4-10x^2+9=(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)$$

y nuestra integral

$$I=\int \frac{2x^2+3}{(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)}\,dx$$

Ahora para resolverla se descompone en fracciones simples de la siguiente manera, para cada raíz α aparece una fracción de la forma $\frac{A}{x-\alpha}$ donde la A hay que calcularla. Es decir

$$\frac{2x^2+3}{(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-3} + \frac{D}{x+3}$$

y ahora resolvemos la suma del segundo miembro aplicando el mínimo común múltiplo, es decir

$$\frac{2x^2+3}{(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)} = \frac{A(x+1)(x-3)(x+3) + B(x-1)(x-3)(x+3) + C(x-1)(x+1)(x+3) + D(x-1)(x+1)(}{(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)}$$

y, de aquí, como los denominadores son iguales y las fracciones también, los numeradores tendrán que ser iguales, es decir

$$2x^2+3 = A(x+1)(x-3)(x+3) + B(x-1)(x-3)(x+3) + C(x-1)(x+1)(x+3) + D(x-1)(x+1)(x- \quad (\alpha)$$

Para calcular A nos fijamos en el paréntesis común a B, C y D, es decir $x-1$, luego $x-1=0$ y de aquí $x=1$

Haciendo $x=1$ en la expresión anterior

$$2\cdot 1^2+3 = A(1+1)(1-3)(1+3)$$ y de aquí $5 = A\cdot 2(-2)\cdot 4$

$$5=-16A; \qquad \boxed{A = -\frac{5}{16}}$$

Usando la misma técnica, para calcular B vemos el paréntesis común a A, C y D que es $x+1$, luego $x+1=0$ y $x=-1$

Haciendo $x=-1$ en (α)

$$2(-1)^2+3 = B\,(-1-1)(-1-3)(-1+3)$$

$$5 = B\,(-2)(-4)\cdot 2$$

$$5 = 16B$$

$$\boxed{B = \frac{5}{16}}$$

El mismo razonamiento para calcular C, hacemos $x-3=0$, es decir $x=3$ y ~~llevando~~ llevando este valor a (α) queda

$$2\cdot 3^2+3 = C\,(3-1)(3+1)(3+3)$$

$$21 = C\cdot 2\cdot 4\cdot 6$$

$$\boxed{C = \frac{21}{48}}$$

Para calcular D hacemos $x+3=0$, es decir $x=-3$ y queda

$$2(-3)^2+3 = D\,(-3-1)(-3+1)(-3-3)$$

$$21 = D\,(-4)(-2)(-6)$$

$$\boxed{D = -\frac{21}{48}}$$

Luego

$$\frac{2x^2+3}{(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)} = \frac{-5/16}{x-1} + \frac{5/16}{x+1} + \frac{\frac{21}{48}}{x-3} + \frac{\frac{-21}{48}}{x+3}$$

Luego integrando

$$I = \int \frac{2x^2+3}{(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)}\,dx = -\frac{5}{16}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{5}{16}\int \frac{1}{x+1}\,dx +$$

$$+ \frac{21}{48}\int \frac{1}{x-3}\,dx - \frac{21}{48}\int \frac{1}{x+3}\,dx$$

y como en estas integrales la derivada del denominador es el numerador salen logaritmo neperiano del denominador, es decir

$$\boxed{I = -\frac{5}{16}\ln(x-1) + \frac{5}{16}\ln(x+1) + \frac{21}{48}\ln(x-3) - \frac{21}{48}\ln(x+3) + C}$$