TEMA 2: ESPACIOS VECTORIALES Y APLICACIONES LINEALES

PARTE 2

2.5.- APLICACIÓN LINEAL

Una aplicación lineal es un homomorfismo entre espacios vectoriales. Es decir:

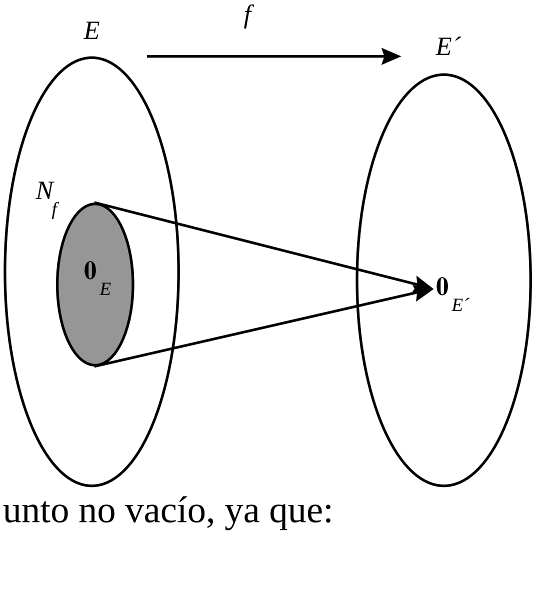
$$f:\mathbf{E}(\mathbb{K})\to\mathbf{E}'(\mathbb{K})\,/\,\forall\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{E},\forall\lambda,\mu\in\mathbb{K},\begin{cases} f\left(\mathbf{x}+\mathbf{y}\right)=f(\mathbf{x})+f(\mathbf{y})\\ f(\lambda\cdot\mathbf{x})=\lambda\cdot f(\mathbf{x})\end{cases}$$

Condiciones que podemos resumir en:

$$\boxed{f:\mathbf{E}(\mathbb{K})\to\mathbf{E}'(\mathbb{K})\,/\,\forall\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{E},\forall\lambda,\mu\in\mathbb{K},\ f\left(\lambda\cdot\mathbf{x}+\mu\cdot\mathbf{y}\right)=\lambda\cdot f(\mathbf{x})+\mu\cdot f(\mathbf{y})}$$

<u>NÚCLEO E IMAGEN DE LA APLICACIÓN LINEAL</u>:

■ **SUBESPACIO NÚCLEO:** $\mathbf{N}_f=\left\{\mathbf{x}\in\mathbf{E}\,/\,f(\mathbf{x})=\mathbf{0}\right\}$



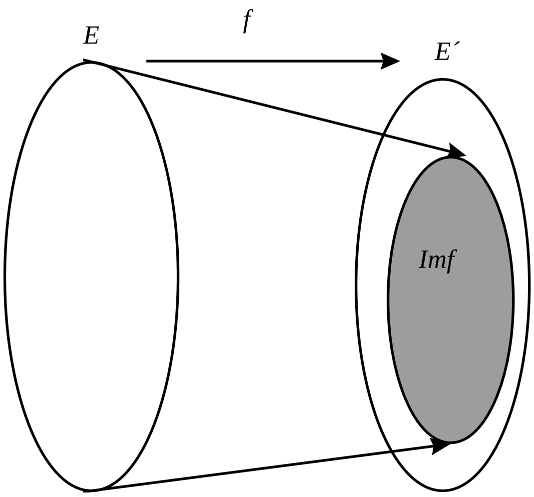
$\mathbf{N}_f$ es un conjunto no vacío, ya que:

$$\forall\mathbf{x}\in\mathbf{E},\exists\mathbf{0}\in\mathbf{E}\,/\,\mathbf{0}=0\cdot\mathbf{x};\ y\ \ f(\mathbf{0})=f(0\cdot\mathbf{x})=0\cdot f(\mathbf{x})=\mathbf{0}\in\mathbf{E}'$$

- **<u>Condición de subespacio</u>:**

$$\forall\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{N}_f,\forall\lambda,\mu\in\mathbb{K},\ f\left(\lambda\cdot\mathbf{x}+\mu\cdot\mathbf{y}\right)=\lambda\cdot f(\mathbf{x})+\mu\cdot f(\mathbf{y})=\lambda\cdot\mathbf{0}+\mu\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}\in\mathbf{E}'$$

■ SUBESPACIO IMAGEN: $\mathbf{Im}f = \{\mathbf{x}' \in \mathbf{E}' / \mathbf{x}' = f(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in \mathbf{E}\}$



- **<u>Condición de subespacio</u>:**

$$\forall f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}) \in \mathbf{Im}f, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} / (\lambda \cdot \mathbf{x} + \mu \cdot \mathbf{y}) \in \mathbf{E} \Rightarrow$$
$$f(\lambda \cdot \mathbf{x} + \mu \cdot \mathbf{y}) \in \mathbf{Im}f \Rightarrow \lambda \cdot f(\mathbf{x}) + \mu \cdot f(\mathbf{y}) \in \mathbf{Im}f$$

Propiedades:

- Si $\mathbf{N}_f = \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow f$ es inyectiva.
- Si $\mathbf{N}_f = \{\mathbf{0}\}$ y $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ es un sistema libre de vectores de $\mathbf{E}$, entonces $\{f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), \ldots, f(\mathbf{v}_p)\}$ es un sistema libre de vectores de $\mathbf{E}'$
- $\dim \mathbf{E} = \dim \mathbf{N}_f + \dim \mathbf{Im}f$
- Si $\mathbf{N}_f = \{\mathbf{0}\} \Rightarrow \dim \mathbf{E} = \dim \mathbf{Im}f$
- Si $\mathbf{N}_f = \{\mathbf{0}\}\, y \dim \mathbf{E} = \dim \mathbf{E}' \Rightarrow f$ es ISOMORFISMO.
- Si $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ es base de $\mathbf{E}$, entonces $\{f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), \ldots, f(\mathbf{e}_n)\}$ es un sistema generador de $\mathbf{Im}f$.

TEOREMA DE ISOMORFÍA:

Todo espacio vectorial $\mathbf{E}$ de dimensión n, definido sobre un cuerpo conmutativo $\mathbb{K}$, es ISOMORFO al espacio vectorial $\mathbb{K}^n(\mathbb{K})$.

Nota: Es particularmente importante el isomorfismo entre cualquier espacio vectorial definido sobre el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ y el espacio vectorial $\mathbb{R}^n(\mathbb{R})$.

2.6.- MATRIZ ASOCIADA A UNA APLICACIÓN LINEAL

Sea la aplicación lineal : $f:\mathbf{E}(\mathbb{K})\to\mathbf{E}'(\mathbb{K})$ y sean $B_{\mathbf{E}}=\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\dots,\mathbf{e}_n\}$ y $B_{\mathbf{E}'}=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\dots,\mathbf{u}_m\}$ bases de $\mathbf{E}$ y de $\mathbf{E}'$ respectivamente. Entonces:

$$\forall\mathbf{x}\in\mathbf{E},\ \mathbf{x}=x_1\cdot\mathbf{e}_1+x_2\cdot\mathbf{e}_2+\cdots+x_n\cdot\mathbf{e}_n\Rightarrow\exists\mathbf{y}=f(\mathbf{x})\in\mathbf{E}'/\,\mathbf{y}=y_1\cdot\mathbf{u}_1+y_2\cdot\mathbf{u}_2+\cdots+y_m\cdot\mathbf{u}_m$$

Como:

$$\begin{gathered}\mathbf{y}=f(\mathbf{x})=f(x_1\cdot\mathbf{e}_1+x_2\cdot\mathbf{e}_2+\cdots+x_n\cdot\mathbf{e}_n)=y_1\cdot\mathbf{u}_1+y_2\cdot\mathbf{u}_2+\cdots+y_m\cdot\mathbf{u}_m\Rightarrow\\ x_1\cdot f(\mathbf{e}_1)+x_2\cdot f(\mathbf{e}_2)+\cdots+x_n\cdot f(\mathbf{e}_n)=y_1\cdot\mathbf{u}_1+y_2\cdot\mathbf{u}_2+\cdots+y_m\cdot\mathbf{u}_m\Rightarrow\\ \begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f(\mathbf{e}_1)\\ f(\mathbf{e}_2)\\ \vdots\\ f(\mathbf{e}_n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1 & y_2 & \cdots & y_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{u}_1\\ \mathbf{u}_2\\ \vdots\\ \mathbf{u}_m\end{pmatrix}\qquad\textbf{(I)}\end{gathered}$$

Pero:

$$f(\mathbf{e}_i)\in\mathbf{E}'\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}f(\mathbf{e}_1)=\omega_{11}\cdot\mathbf{u}_1+\omega_{12}\cdot\mathbf{u}_2+\ldots+\omega_{1m}\cdot\mathbf{u}_m\\ f(\mathbf{e}_2)=\omega_{21}\cdot\mathbf{u}_1+\omega_{22}\cdot\mathbf{u}_2+\ldots+\omega_{2m}\cdot\mathbf{u}_m\\ \vdots\\ f(\mathbf{e}_n)=\omega_{n1}\cdot\mathbf{u}_1+\omega_{n2}\cdot\mathbf{u}_2+\ldots+\omega_{nm}\cdot\mathbf{u}_m\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}f(\mathbf{e}_1)\\ f(\mathbf{e}_2)\\ \vdots\\ f(\mathbf{e}_n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\omega_{11} & \omega_{12} & \cdots & \omega_{1m}\\ \omega_{21} & \omega_{22} & \cdots & \omega_{2m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \omega_{n1} & \omega_{n2} & \cdots & \omega_{nm}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{u}_1\\ \mathbf{u}_2\\ \vdots\\ \mathbf{u}_m\end{pmatrix}$$

Sustituyendo en **(I)**:

$$\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_{11} & \omega_{12} & \cdots & \omega_{1m}\\ \omega_{21} & \omega_{22} & \cdots & \omega_{2m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \omega_{n1} & \omega_{n2} & \cdots & \omega_{nm}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{u}_1\\ \mathbf{u}_2\\ \vdots\\ \mathbf{u}_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1 & y_2 & \cdots & y_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{u}_1\\ \mathbf{u}_2\\ \vdots\\ \mathbf{u}_m\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\mathbf{x}^t\Omega_{n\times m}\mathbf{u}_j=\mathbf{y}^t\mathbf{u}_j\Rightarrow\mathbf{y}^t=\mathbf{x}^t\Omega_{n\times m}\Rightarrow\mathbf{y}=(\Omega_{n\times m})^t\,\mathbf{x}=\Omega^t_{m\times n}\mathbf{x}$$

Expresión, que permite obtener las coordenadas de los vectores imagen, en función de las coordenadas de los vectores origen.

A la matriz $\Omega^t_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times n}$ se denomina **"matriz de la aplicación lineal"** en las bases $B_{\mathbf{E}}$ y $B_{\mathbf{E}'}$ respectivamente.

Obsérvese que las columnas de la matriz $\mathbf{A}_{m\times n}$ son las coordenadas de los vectores $f(\mathbf{e}_i)$ referidos a la base $B_{\mathbf{E}'}$ de $\mathbf{E}'$. Como estas coordenadas son únicas, entonces la matriz asociada a una aplicación lineal respecto de las bases dadas $\mathbf{E}$ y de $\mathbf{E}'$, también es **única**.

Recíprocamente, toda matriz definida sobre un cuerpo conmutativo $\mathbb{K}$, caracteriza a una **única** aplicación lineal.

RANGO DE LA APLICACIÓN LINEAL:

Es por definición la dimensión del subespacio Imagen:

$$rangf = \dim \mathbf{Im}f = \dim \mathbf{E} - \dim \mathbf{N}_f$$

Pero $\dim \mathbf{Im}f$ coincide con en $rang\mathbf{A}_{m\times n}$. En efecto:

Sea $B_{\mathbf{E}} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ base de $\mathbf{E}$, entonces $S = \{f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), \ldots, f(\mathbf{e}_n)\}$ es un sistema generador de $\mathbf{Im}f$. Si $\dim \mathbf{Im}f = r$ implica que podemos encontrar una base de $\mathbf{Im}f$, formada por r vectores libres de S. Como las columnas de $\mathbf{A}_{m\times n}$ son las coordenadas de los vectores de S, y el rango de $\mathbf{A}_{m\times n}$ es precisamente el número de columnas (o filas) linealmente independientes, podemos concluir que:

$$rangf = \dim \mathbf{Im}f = rang\mathbf{A}_{m\times n}$$

Otras conclusiones a las que podemos llegar son:

1. La aplicación es sobreyectiva, **si y sólo si**, $rang\mathbf{A}_{m\times n} = m =$ número de filas de $\mathbf{A}$.
2. La aplicación es inyectiva, **si y sólo si**, $rang\mathbf{A}_{m\times n} = n =$ número de columnas de $\mathbf{A}$.
3. La aplicación es un isomorfismo **si y sólo si**, $\mathbf{A}$ es regular.

CAMBIOS DE BASE EN UNA APLICACIÓN LINEAL:

Sea la aplicación lineal : $f : \mathbf{E}(\mathbb{K}) \to \mathbf{E}'(\mathbb{K})$ y sean $B_1 = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ y $B'_1 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ bases de $\mathbf{E}$ y de $\mathbf{E}'$ respectivamente. Entonces:

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{E},\ \mathbf{x} = x_1 \cdot \mathbf{e}_1 + x_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \cdots + x_n \cdot \mathbf{e}_n \xrightarrow{\mathbf{A}_1} \exists \mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \in \mathbf{E}' / \mathbf{y} = y_1 \cdot \mathbf{u}_1 + y_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + y_m \cdot \mathbf{u}_m$$

Si cambiamos las bases de los espacios vectoriales $\mathbf{E}$ y de $\mathbf{E}'$ $B_2 = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n\}$ y $B'_2 = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \ldots, \mathbf{u}'_m\}$ respectivamente. Entonces:

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{E},\ \mathbf{x} = x'_1 \cdot \mathbf{e}'_1 + x'_2 \cdot \mathbf{e}'_2 + \cdots + x'_n \cdot \mathbf{e}'_n \xrightarrow{\mathbf{A}_2} \exists \mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \in \mathbf{E}' / \mathbf{y} = y'_1 \cdot \mathbf{u}'_1 + y'_2 \cdot \mathbf{u}'_2 + \cdots + y'_m \cdot \mathbf{u}'_m$$

Siendo $\mathbf{P_E}$ la matriz de paso (o de cambio de base) de la base B_1 a la base B_2 del espacio vectorial $\mathbf{E}$ y $\mathbf{P_{E'}}$ la matriz de paso (o de cambio de base) de la base B'_1 a la base B'_2 del espacio vectorial $\mathbf{E}'$ tal que:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{B_1} = \mathbf{P_E}\mathbf{x}_{B_2} \\ \mathbf{y}_{B'_1} = \mathbf{P_{E'}}\mathbf{y}_{B'_2} \end{cases}$$

Y teniendo en cuenta que:

$$\begin{cases} \mathbf{y}_{B'_1} = \mathbf{A}_1\mathbf{x}_{B_1} \\ \mathbf{y}_{B'_2} = \mathbf{A}_2\mathbf{x}_{B_2} \end{cases}$$

Entonces:

$$\mathbf{y}_{B'_1} = \mathbf{P_{E'}}\mathbf{y}_{B'_2} \Rightarrow \mathbf{y}_{B'_2} = \mathbf{P_{E'}^{-1}}\mathbf{y}_{B'_1} = \mathbf{P_{E'}^{-1}}\mathbf{A}_1\mathbf{x}_{B_1} = \mathbf{P_{E'}^{-1}}\mathbf{A}_1\mathbf{P_E}\mathbf{x}_{B_2} \Rightarrow \mathbf{A}_2\mathbf{x}_{B_2} = \left(\mathbf{P_{E'}^{-1}}\mathbf{A}_1\mathbf{P_E}\right)\mathbf{x}_{B_2}$$

Por tanto,

$$\boxed{\mathbf{A}_2 = \mathbf{P_{E'}^{-1}}\mathbf{A}_1\mathbf{P_E}}$$

Es decir que las matrices de una aplicación lineal cuando se cambian las bases son matrices equivalentes, relacionadas por las matrices de paso (o de cambio de base) de $\mathbf{E}$ y de $\mathbf{E}'$.

Si ocurre que $\mathbf{E}$ y $\mathbf{E}'$ son el mismo espacio vectorial (endomorfismo), entonces $\mathbf{P_E} = \mathbf{P_{E'}} = \mathbf{P}$ y la relación entre las matrices quedaría:

$$\boxed{\mathbf{A}_2 = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}_1\mathbf{P}}$$

En este caso, las matrices $\mathbf{A}_1$ y $\mathbf{A}_2$ son **semejantes**.

2.7.- OPERACIONES CON APLICACIONES LINEALES

SUMA DE APLICACIONES LINEALES:

Sean $f:\mathbf{E}_n(\mathbb{R})\to\mathbf{E}_m(\mathbb{R})$ y $g:\mathbf{E}_n(\mathbb{R})\to\mathbf{E}_m(\mathbb{R})$ dos aplicaciones lineales, entonces, se define la aplicación suma como:

$$f+g:\mathbf{E}_n(\mathbb{R})\to\mathbf{E}_m(\mathbb{R})/(f+g)(\mathbf{x})=f(\mathbf{x})+g(\mathbf{x}),\forall\mathbf{x}\in\mathbf{E}_n(\mathbb{R})$$

Propiedad: Sean $\mathbf{A}_{m\times n}$ y $\mathbf{B}_{m\times n}$ las matrices asociadas a las aplicaciones f y g respectivamente, entonces:

$$(\mathbf{M}_{m\times n})_{f+g}=\mathbf{A}_{m\times n}+\mathbf{B}_{m\times n}$$

PRODUCTO DE UN ESCALAR POR UNA APLICACIÓN LINEAL:

Sea $f:\mathbf{E}_n(\mathbb{R})\to\mathbf{E}_m(\mathbb{R})$ una aplicación lineal y sea $\lambda\in\mathbb{R}$, entonces, se define la aplicación producto por un escalar, como:

$$(\lambda\cdot f):\mathbf{E}_n(\mathbb{R})\to\mathbf{E}_m(\mathbb{R})/(\lambda\cdot f)(\mathbf{x})=\lambda\cdot f(\mathbf{x}),\forall\mathbf{x}\in\mathbf{E}_n(\mathbb{R})$$

Propiedad: Sea $\mathbf{A}_{m\times n}$ la matriz asociada a la aplicación f, entonces:

$$(\mathbf{M}_{m\times n})_{\lambda\cdot f}=\lambda\cdot\mathbf{A}_{m\times n}$$

COMPOSICIÓN DE APLICACIONES LINEALES:

Dadas las aplicaciones lineales, $f:\mathbf{E}_n(\mathbb{R})\to\mathbf{E}'_p(\mathbb{R})$ y $g:\mathbf{E}'_p(\mathbb{R})\to\mathbf{E}''_m(\mathbb{R})$, tal que se verifica que $\operatorname{Im} f\subset Domg$, se puede definir la aplicación compuesta o producto de aplicaciones $h=g\circ f$, de la forma:

$$h:\mathbf{E}_n(\mathbb{R})\to\mathbf{E}''_m(\mathbb{R})/\ h(\mathbf{x})=(g\circ f)(\mathbf{x})=g[f(\mathbf{x})],\forall\mathbf{x}\in\mathbf{E}_n(\mathbb{R})$$

Propiedad: Sean $\mathbf{A}_{p\times n}$ y $\mathbf{B}_{m\times p}$ las matrices asociadas a las aplicaciones f y g respectivamente, entonces:

$$(\mathbf{M}_{m\times n})_{g\circ f}=\mathbf{B}_{m\times p}\mathbf{A}_{p\times n}$$

APLICACIÓN INVERSA:

Dada una aplicación lineal , $f : \mathbf{E}_n(\mathbb{R}) \to \mathbf{E}'_m(\mathbb{R})$, si es posible definir otra aplicación $f^{-1} : \mathbf{E}'_m(\mathbb{R}) \to \mathbf{E}_n(\mathbb{R})$ tal que si $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \Leftrightarrow \mathbf{x} = f^{-1}(\mathbf{y})$, entonces a f^{-1} se llama aplicación inversa o recíproca de f y se verifica:

$f^{-1} \circ f(\mathbf{x}) = I_{\mathbf{E}_n}(\mathbf{x})$ es la aplicación identidad en $\mathbf{E}_n(\mathbb{R})$.
$f \circ f^{-1}(\mathbf{x}) = I_{\mathbf{E}'_m}(\mathbf{x})$ es la aplicación identidad en $\mathbf{E}'_m(\mathbb{R})$.

La condición necesaria y suficiente para que una aplicación lineal tenga inversa es que sea **isomorfismo,** es decir que es inyectiva y sobreyectiva y por tanto $m = n$.

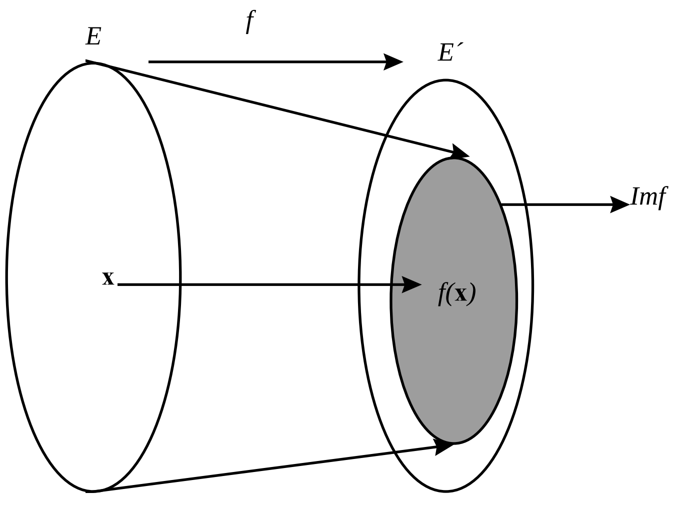
Propiedades:

1. $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$
2. $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$
3. f^{-1} es lineal.
4. Si $\mathbf{A}_n$ es la matriz asociada a f, entonces, $\mathbf{A}_n^{-1}$ es la matriz asociada a f^{-1}.

2.8.- TEOREMA DE ROUCHE-FRÖBENIUS

Sea el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. La matriz $\mathbf{A}$ representa una aplicación lineal:

$$f : \mathbf{E}_n(\mathbb{K}) \xrightarrow{\mathbf{A}_{m\times n}} \mathbf{E}'_m(\mathbb{K}) \,/\, f(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$$



Pero, $\mathbf{Ax}=\mathbf{b} \Rightarrow f(\mathbf{x})=\mathbf{b}$

Pueden suceder dos casos:

a) $\mathbf{b}\in \mathbf{Im}f$, el sistema tienen solución y es por tanto **COMPATIBLE**. Como $\dim \mathbf{E}=n=\dim \mathbf{N}_f+\dim \mathbf{Im}f$ y como $\dim \mathbf{Im}f = rang\mathbf{A}$, entonces:

$$\boxed{n=\dim \mathbf{N}_f + rang\mathbf{A}}$$

- Si f es **inyectiva** $\Rightarrow \dim \mathbf{N}_f=0 \Rightarrow rang\mathbf{A}=n$ el sistema tiene solución única y es por tanto **compatible determinado**.
- Si f es **no inyectiva** $\Rightarrow \dim \mathbf{N}_f>0 \Rightarrow rang\mathbf{A}<n$ el sistema tiene más de una solución y es por tanto **compatible indeterminado**.

b) $\mathbf{b}\notin \mathbf{Im}f$, el sistema no tienen solución y es por tanto **INCOMPATIBLE .**

CONCLUSIÓN:

Sea $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$. Como el rango de la matriz $\mathbf{A}$ es igual a la dimensión del **espacio columna** de la matriz $\mathbf{A}$ entonces:

A) Si $rang\mathbf{A}=rang\left[\mathbf{A}|\mathbf{b}\right]$ es porque el vector $\mathbf{b}$ se puede expresar como una combinación lineal de las columnas de la matriz $\mathbf{A}$; por tanto el sistema tendrá solución y será **COMPATIBLE**:

- Si $rang\mathbf{A}=rang\left[\mathbf{A}|\mathbf{b}\right]=n \Rightarrow$ **DETERMINADO**
- Si $rang\mathbf{A}=rang\left[\mathbf{A}|\mathbf{b}\right]<n \Rightarrow$ **INDETERMINADO**

B) Si $rang\mathbf{A}<rang\left[\mathbf{A}|\mathbf{b}\right]$ es porque el vector $\mathbf{b}$ es linealmente independiente, es decir que no pertenece al **espacio columna** de la matriz $\mathbf{A}$; por tanto el sistema no tendrá solución y será **INCOMPATIBLE**.

CUESTIONES TEÓRICO-PRÁCTICAS:

Seleccione la respuesta correcta:

1.- Sea $\mathrm{S}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices simétricas de orden 2 y considérese una aplicación lineal, $f:\mathbb{R}^3(\mathbb{R})\to\mathbf{S}_2(\mathbb{R})$. Entonces:

a) La aplicación f será sobreyectiva si $\mathbf{N}_f=\{\mathbf{0}\}$.
b) La aplicación f será inyectiva si $\mathbf{N}_f=\{\mathbf{0}\}$.
c) Las dos anteriores son ciertas.
d) Ninguna de las anteriores es cierta.

SOLUCIÓN:
La opción correcta es la c. Demostración:

a) $\mathbf{S}_2(\mathbb{R})=\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ y & z\end{pmatrix}\in\mathbf{M}_2(\mathbb{R})/\,x,y,z\in\mathbb{R}\right\}\Rightarrow\dim\mathbf{S}_2(\mathbb{R})=3$. Por tanto,
f sobreyectiva $\Leftrightarrow\dim\mathbf{Im}f=\dim\mathbf{S}_2(\mathbb{R})$ y como
$\dim\mathbb{R}^3(\mathbb{R})=\dim\mathbf{N}_f+\dim\mathbf{Im}f\Rightarrow 3=0+\dim\mathbf{Im}f\Rightarrow\dim\mathbf{Im}f=3=\dim\mathbf{S}_2(\mathbb{R})$
b) f inyectiva $\Leftrightarrow f(\mathbf{x})=f(\mathbf{y})\Leftrightarrow\mathbf{x}=\mathbf{y}$ y como $\mathbf{N}_f=\{\mathbf{0}\}$
$f(\mathbf{x})=f(\mathbf{y})\Leftrightarrow f(\mathbf{x}-\mathbf{y})=\mathbf{0}\Leftrightarrow(\mathbf{x}-\mathbf{y})\in\mathbf{N}_f\Leftrightarrow\mathbf{x}-\mathbf{y}=\mathbf{0}\Leftrightarrow\mathbf{x}=\mathbf{y}$

2.- Sea $f:\mathbf{E}_n(\mathbb{R})\to\mathbf{E}'_m(\mathbb{R})$ una aplicación lineal. Entonces :

a) f es un isomorfismo si $\dim\mathbf{E}=\dim\mathbf{E}'$**.**
b) f es un isomorfismo si $\dim\mathbf{N}_f=\dim\mathbf{Im}f$ **.**
c) Las dos anteriores son ciertas.
d) Ninguna de las anteriores es cierta.

SOLUCIÓN:
La opción correcta es la d. Demostración:

f es un isomorfismo si f sobreyectiva y f inyectiva $\Leftrightarrow\dim\mathbf{Im}f=\dim\mathbf{E}'$ y $\dim\mathbf{N}_f=0$ que no se verifica en ninguna de las dos opciones.

3.- Sea $f:\mathbf{E}_n(\mathbb{R})\to\mathbf{E}'_m(\mathbb{R})$ una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales. Entonces:

a) f es biyectiva si $\dim\mathbf{N}_f=\dim\mathbf{Im}f$.
b) f es biyectiva si $\dim\mathbf{E}=\dim\mathbf{N}_f+\dim\mathbf{Im}f$.
c) Las dos anteriores son ciertas.
d) Ninguna de las anteriores es cierta.

SOLUCIÓN:
La opción correcta es la d. Demostración:

f es biyectiva si f sobreyectiva y f inyectiva $\Leftrightarrow\dim\mathbf{Im}f=\dim\mathbf{E}'$ y $\dim\mathbf{N}_f=0$ que no se verifica en ninguna de las dos opciones.

4.- Sea la aplicación lineal $f:\mathbf{E}_n(\mathbb{R})\to\mathbf{E}'_m(\mathbb{R})$ de matriz asociada $\mathbf{A}$, y considerese el sistema de ecuaciones lineales $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}\,/\,\mathbf{b}\notin\mathbf{Im}f$. Entonces:

a) Si f es inyectiva el sistema es compatible determinado.

b) Si f es no inyectiva el sistema es compatible indeterminado.

c) Las dos anteriores son ciertas.

d) Ninguna de las anteriores es cierta.

SOLUCIÓN:

La opción correcta es la d. Demostración:

Como $\mathbf{b}\notin\mathbf{Im}f$ el sistema es incompatible.

5.- Sea la aplicación lineal $f:\mathbf{E}_n(\mathbb{R})\to\mathbf{E}'_m(\mathbb{R})$ de matriz asociada $\mathbf{A}\,/\,rang\mathbf{A}=r$, y considerese el sistema de ecuaciones lineales $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$. Entonces:

a) Si $rang\mathbf{A}<rang\left[\mathbf{A}\middle|\mathbf{b}\right]\Leftrightarrow\mathbf{b}$ pertenece al espacio columna de $\mathbf{A}$.

b) Si $rang\mathbf{A}=rang\left[\mathbf{A}\middle|\mathbf{b}\right]\Leftrightarrow\mathbf{b}$ pertenece al espacio columna de $\mathbf{A}$.

c) Las dos anteriores son ciertas.

d) Ninguna de las anteriores es cierta.

SOLUCIÓN:

La opción correcta es la b. Demostración:

Si el vector $\mathbf{b}$ pertenece al espacio columna de $\mathbf{A}$, es porque pertenece al subespacio generado por los vectores columna de la matriz $\mathbf{A}$, entonces es combinación lineal de las columnas de la matriz $\mathbf{A}$ y por tanto $rang\mathbf{A}=rang\left[\mathbf{A}\middle|\mathbf{b}\right]$.

PROBLEMAS RESUELTOS:

1.- Determinar cuales de las siguientes aplicaciones son lineales y en su caso hallar la matriz asociada en las respectivas bases canónicas:

a) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \,/\, f(x,y,z)=(x+y,y+z)$**.**

b) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \,/\, f(x,y,z)=(xy,yz)$**.**

SOLUCIÓN:

a)

$$f\left[\lambda(x,y,z)+\mu(x',y',z')\right]=f(\lambda x+\mu x',\lambda y+\mu y',\lambda z+\mu z')=$$
$$(\lambda x+\mu x'+\lambda y+\mu y',\lambda y+\mu y'+\lambda z+\mu z')=$$
$$\left[\lambda(x+y,y+z)+\mu(x'+y',y'+z')\right]=\lambda f(x,y,z)+\mu f(x',y',z')$$

Por tanto es aplicación lineal.

b)

$$\begin{cases} \bullet\ f\left[\lambda(x,y,z)+\mu(x',y',z')\right]=f(\lambda x+\mu x',\lambda y+\mu y',\lambda z+\mu z')= \\ \left[(\lambda x+\mu x')(\lambda y+\mu y'),(\lambda y+\mu y')(\lambda z+\mu z')\right] \\ \bullet\ \lambda f(x,y,z)+\mu f(x',y',z')=\lambda(xy,yz)+\mu(x'y',y'z')=(\lambda xy+\mu x'y',\lambda yz+\mu y'z') \end{cases}.$$

Por tanto no es aplicación lineal.

2.- Dada la aplicación lineal $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \,/\, f(x,y,z)=(3x+2y-4z,x-5y+3z)$**, hallar:**

a) Matriz asociada a f **en las bases canónicas respectivas.**

b) Matriz asociada f **en las bases** $B_{\mathbb{R}^3}=\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ **y** $B_{\mathbb{R}^2}=\{(1,3),(2,5)\}$**.**

c) Hallar una base y la dimensión de $\mathbf{N}_f$ **e** $\mathbf{Im}f$ **.**

SOLUCIÓN:

a)

$$\left.\begin{array}{l} f(1,0,0)=(3,1) \\ f(0,1,0)=(2,-5) \\ f(0,0,1)=(-4,3) \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

b)

$$\mathbf{A}'=\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}_1=\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 & -33 & -13 \\ 4 & 19 & 8 \end{pmatrix}$$

c)

$$\mathbf{N}_f=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,/\,f(x,y,z)=(0,0)\right\}\Rightarrow\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$$

$$\begin{pmatrix}3&2&-4\\1&-5&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}3x+2y-4z=0\\x-5y+3z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{14}{17}z\\y=\dfrac{13}{17}z\end{cases}\Rightarrow\mathbf{N}_f=\left\{\left(\frac{14}{17}z,\frac{13}{17}z,z\right)\in\mathbb{R}^3\,/\,z\in\mathbb{R}\right\}$$

$$\mathbf{N}_f=\left\langle(14,13,17)\right\rangle;\dim\mathbf{N}_f=1;\dim\mathbf{Im}f=\dim\mathbb{R}^3-\dim\mathbf{N}_f=3-1=2\equiv\mathbb{R}^2$$

3.- Dadas las aplicaciones lineales $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2\,/\,f(x,y,z)=(x+y,y+z)$ **y** $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3\,/\,f(x,y)=(x+y,x-y,y)$**,**

a) Hallar $g\circ f$ **.**

b) Comprobar que $\mathbf{M}_{g\circ f}=\mathbf{M}_g\mathbf{M}_f$**, siendo** $\mathbf{M}_f$**,** $\mathbf{M}_g$ **y** $\mathbf{M}_{g\circ f}$ **las matrices asociadas a las aplicaciones** f**,** g **y** $g\circ f$ **respectivamente.**

SOLUCIÓN:

a)

$$g\circ f(x,y,z)=g\left[f(x,y,z)\right]=g(x+y,y+z)=\left[(x+y)+(y+z),(x+y)-(y+z),y+z\right]=$$
$$(x+2y+z,x+z,y+z)$$

b)

$$\left.\begin{array}{l}f(1,0,0)=(1,1,0)\\f(0,1,0)=(2,0,1)\\f(0,0,1)=(1,1,1)\end{array}\right\}\Rightarrow\mathbf{M}_{g\circ f}=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}=\mathbf{M}_g\mathbf{M}_f=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

4.- Dada la aplicación lineal,

$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3\,/\,f(x,y,z)=(x-z,-4y+\alpha z,-x+\alpha y),\forall\alpha\in\mathbb{R}$$

a) Hallar la matriz asociada a f **en la base canónica de** $\mathbb{R}^3$**.**

b) Dar los valores de α **para los que** f **es inyectiva.**

c) Para los valores de α **en los que** f **no es inyectiva, hallar las ecuaciones paramétricas del núcleo y su dimensión.**

SOLUCIÓN:

a)

$$\left.\begin{array}{l}f(1,0,0)=(1,0,-1)\\f(0,1,0)=(0,-4,\alpha)\\f(0,0,1)=(-1,\alpha,0)\end{array}\right\}\Rightarrow\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&-4&\alpha\\-1&\alpha&0\end{pmatrix}$$

b) f inyectiva $\Leftrightarrow\mathbf{N}_f=\{\mathbf{0}\}\Leftrightarrow rang\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&-4&\alpha\\-1&\alpha&0\end{pmatrix}=3\Rightarrow\alpha^2-4\neq0\Leftrightarrow\alpha\neq\pm2$

c)

$$\alpha=2\Rightarrow \mathbf{N}_f=\{\mathbf{Ax}=\mathbf{0}\}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&-4&2\\-1&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x-z=0\\-4y+2z=0\\-x+2y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\lambda\\y=\lambda\\z=2\lambda\end{cases};\dim\mathbf{N}_f=1$$

$$\alpha=-2\Rightarrow \mathbf{N}_f=\{\mathbf{Ax}=\mathbf{0}\}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&-4&-2\\-1&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x-z=0\\-4y-2z=0\\-x-2y=0\end{cases}\Rightarrow \mathbf{N}_f\equiv\begin{cases}x=-2\lambda\\y=\lambda\\z=-2\lambda\end{cases};\dim\mathbf{N}_f=1$$

5.- Sea la aplicación lineal, $f:\mathbf{M}_2(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^2(\mathbb{R}))\,/\,f\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}=(x-z,y-t)$ **.**

a) Hallar la matriz asociada a f **en las bases:**

$B=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$ **de** $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ **y** $B'=\{(1,1),(1,2)\}$ **de** $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$ **.**

b) Hallar el núcleo de f **y una base del mismo. ¿Es** f **un isomorfismo.?**

SOLUCIÓN:

Aplicamos el Teorema de Isomorfia:

$$f:\mathbb{R}^4(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^2(\mathbb{R}))\,/\,f\left(x,y,z,t\right)=(x-z,y-t)$$

Y hallamos la matriz asociada a f en las respectivas bases canónicas:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\end{pmatrix}$$

a) $\mathbf{A}'=\mathbf{P}_{\mathbb{R}^4}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}_{\mathbb{R}^2}=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&0\\1&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&1&2\\0&1&0&-1\end{pmatrix}$

b)

$$\mathbf{N}_f=\left\{\left(x,y,z,t\right)\in\mathbb{R}^4\,/\,f\left(x,y,z,t\right)=\left(0,0\right)\right\}\Rightarrow\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x-z=0\\y-t=0\end{cases}\Rightarrow\mathbf{N}_f=\left\{\left(x,y,x,y\right)\in\mathbb{R}^4,\forall x,y\in\mathbb{R}\right\}$$

$$B_{\mathbf{N}_f}=\left\{\left(1,0,1,0\right),\left(0,1,0,1\right)\right\};\dim\mathbf{N}_f=2$$

o tambien, $\mathbf{N}_f=\left\{\begin{pmatrix}x&y\\x&y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4\,/\,x,y\in\mathbb{R}\right\};B_{\mathbf{N}_f}=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\right\};\dim\mathbf{N}_f=2$

No puede ser un isormorfismo porque los espacios vectoriales tienen distinta dimensión.

6.- Sean $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ dos espacios vectoriales reales y sean $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_4\}$ y $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\}$ bases de $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ respectivamente. Considérese la aplicación lineal $f:\mathbf{V}(\mathbb{R})\to\mathbf{W}(\mathbb{R})$ definida por:

$$\begin{cases} f(\mathbf{e}_1)=\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2-4\mathbf{u}_3 \\ f(\mathbf{e}_2)=2\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2-2\mathbf{u}_3 \\ f(\mathbf{e}_3)=3\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2 \\ f(\mathbf{e}_4)=\mathbf{u}_1+2\mathbf{u}_3 \end{cases}$$

a) Hallar la matriz asociada a la aplicación en las bases dadas.
b) Hallar las ecuaciones, una base y dimensión de $\mathbf{N}_f$ e $\mathbf{Im}f$.

SOLUCIÓN:

a) $\mathbf{A}=\left(f(\mathbf{e}_1)\middle|\, f(\mathbf{e}_2)\middle|\, f(\mathbf{e}_3)\middle|\, f(\mathbf{e}_4)\right)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{N}_f=\{\mathbf{x}\in\mathbf{V}(\mathbb{R})\,/\,f(\mathbf{x})=\mathbf{0}\in\mathbf{W}(\mathbb{R})\}\Rightarrow \mathbf{Ax}=\mathbf{0}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} x-2y+3z-t=0 \\ x+y+z=0 \\ -4x-2y+3t=0 \end{cases}\Rightarrow$$

b) $\mathbf{N}_f=\{(x,y,-x-y,2x+y)\in\mathbf{V}(\mathbb{R})\,/\,x,y\in\mathbb{R}\}$

$\mathbf{N}_f=\langle(1,0,-1,2),(0,1,-1,1)\rangle;\dim\mathbf{N}_f=2;$

$\dim\mathbf{Im}f=\dim\mathbf{V}(\mathbb{R})-\dim\mathbf{N}_f=2$

7.- Sea $\mathbf{V}$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que dos con coeficientes reales y considérese la aplicación lineal:

$$f:\mathbf{V}\to\mathbb{R}^3\,/\,f\left(ax^2+bx+c\right)=\left(a+b-2c,2a+b+c,2a+3b+\alpha c\right)$$

Hallar para que valor/es de α, f es un isomorfismo.

SOLUCIÓN:

Aplicamos el Teorema de Isomorfia:

$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3\,/\,f(a,b,c)=\left(a+b-2c,2a+b+c,2a+3b+\alpha c\right)$$

Hallamos la matriz asociada a f en la base canónica de $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & \alpha \end{pmatrix}$$

f isomorfismo $\Leftrightarrow rang\mathbf{A}=3\Leftrightarrow rang\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & \alpha \end{pmatrix}=3\Leftrightarrow\alpha\neq-9$

8.- Sea $\mathbf{V}$ el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que dos y sea $\mathbf{S}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices simétricas 2×2. Se considera la aplicación lineal:

$$f:\mathbf{V}\to\mathbf{S}_2(\mathbb{R}) \,/\, f\left(ax^2+bx+c\right)=\begin{pmatrix} -2a-c & a+b+c \\ a+b+c & a \end{pmatrix}$$

a) Hallar la matriz asociada a f en las respectivas bases canónicas.
b) Hallar el núcleo de f y una base del mismo y su dimensión.
SOLUCIÓN:

Aplicamos el Teorema de Isomorfia:

$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3 \,/\, f\left(a,b,c\right)=\left(-2a-c,a+b+c,a\right)$$

a)

$$\left.\begin{array}{l} f\left(1,0,0\right)=\left(-2,1,1\right) \\ f\left(0,1,0\right)=\left(0,1,0\right) \\ f\left(0,0,1\right)=\left(-1,1,0\right) \end{array}\right\}\Rightarrow \mathbf{A}=\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$\mathbf{N}_f=\left\{\mathbf{Ax}=\mathbf{0}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} -2x-z=0 \\ x+y+z=0 \\ x=0 \end{cases}\Rightarrow \mathbf{N}_f=\left\{\mathbf{0}\right\};\dim\mathbf{N}_f=0$$