Aplicaciones lineales

1 Definiciones, ejemplos y propiedades básicas.

Definición 1: Sean $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ (en general $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Una aplicación $T : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{W}$ se llama aplicación lineal u homomorfismo (o simplemente morfismo) si

1) $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ para todo $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$
2) $T(\lambda\mathbf{u}) = \lambda T(\mathbf{u})$ para todo $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ y para todo $\lambda \in \mathbb{K}$

Las dos condiciones anteriores son equivalentes a la única condición:

$T(\lambda\mathbf{u}+\mu\mathbf{v}) = \lambda T(\mathbf{u}) + \mu T(\mathbf{v})$ para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ y para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

Ejemplos 1:

1. La aplicación $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (x, -y)$ es lineal

2. Sean $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales. Entonces, $T_0 : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{W}$, definida por $T_0(\mathbf{v}) = \mathbf{0_W}$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, es una aplicación lineal.

3. Si $\mathbf{V}$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, la aplicación $Id : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$, definida por $Id(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, es una aplicación lineal.

4. Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ una matriz de orden $m \times n$ con coeficientes en $\mathbb{K}$. Entonces $T_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ definida por $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ es una aplicación lineal (asociada a la matriz A). Obviamente, para que tenga sentido el producto $A\mathbf{x}$, se entiende que el vector $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ se escribe en columna, como se hará siempre que este implicado en operaciones matriciales. Esto nos permite pensar toda matriz de orden $m \times n$ como una aplicación lineal de $\mathbb{K}^n$ a $\mathbb{K}^m$. Más adelante veremos que esto es cierto para todas las aplicaciones lineales de $\mathbb{K}^n$ a $\mathbb{K}^m$.

Definición 2: Si $T : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{W}$ es una aplicación lineal (u homomorfismo), entonces

1. se llama *monomorfismo* si T es inyectiva.

2. se llama *epimorfismo* si T es epiyectiva.

3. se llama *isomorfismo* si T es biyectiva. En este caso, se dice que $\mathbf{V}$ es *isomorfo* a $\mathbf{W}$ y se escribirá $\mathbf{V} \cong \mathbf{W}$.
4. si $\mathbf{V} = \mathbf{W}$, $T : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$ se llama un *endomorfismo* (o un operador lineal)
5. si $T : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$ es un endomorfismo biyectivo se llama *automorfismo.*

La siguiente proposición nos proporciona algunas propiedades de las aplicaciones lineales.

Proposición 1: Si $T : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{W}$ es una aplicación lineal, se verifica:

1. $T(\mathbf{0_V}) = \mathbf{0_W}$
2. $T(-\mathbf{v}) = -T(\mathbf{v})$
3. $T(\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + ... + \lambda_n\mathbf{v}_n) = \lambda_1 T(\mathbf{v}_1) + \lambda_2 T(\mathbf{v}_2) + ... + \lambda_n T(\mathbf{v}_n)$
4. Si $\mathbf{S}$ es un subespacio vectorial de $\mathbf{V}$, entonces $T(\mathbf{S})$ es un subespacio vectorial de $\mathbf{W}$.
5. Si $\mathbf{H}$ es un subespacio vectorial de $\mathbf{W}$, entonces $T^{-1}(\mathbf{H})$ es un subespacio vectorial de $\mathbf{V}$.

Núcleo e Imagen de una aplicación lineal

Definición 3: Sean $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales y sea $T : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{W}$ una aplicación lineal.

1. Se llama *Núcleo de* T, y se denotará por $\ker(T)$, al conjunto

$$\ker(T) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} \ / \ T(\mathbf{v}) = \mathbf{0_W}\} = T^{-1}(\mathbf{0_W})$$

2. Se llama Imagen de T, y se denotará por $\mathrm{Im}(T)$, al conjunto

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(T) &= \{\mathbf{w} \in \mathbf{W} \ / \ \mathbf{w} = T(\mathbf{v}) \text{ para algún } \mathbf{v} \in \mathbf{V}\ \} = T(\mathbf{V}) = \\ &= \{T(\mathbf{v}) : \mathbf{v} \in \mathbf{V}\} \end{aligned}$$

Proposición 2: $\ker(T)$ es un subespacio vectorial de $\mathbf{V}$ e $\mathrm{Im}(T)$ es un subespacio vectorial de $\mathbf{W}$.

Determinación de una aplicación lineal

Observación: Una aplicación lineal $T : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{W}$ queda completamente determinada si conocemos las imágenes de los vectores de una base cualquiera de $\mathbf{V}$. En efecto, si $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ es una base de $\mathbf{V}$ y conocemos $T(\mathbf{v}_i)$ para $1 \leq i \leq n$ se puede hallar la imagen de cualquier vector $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Puesto que β es base de $\mathbf{V}$, se sigue que $\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + ... + \lambda_n\mathbf{v}_n$, donde los λ_i son escalares únicos. Entonces,

$$T(\mathbf{v}) = T(\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + ... + \lambda_n\mathbf{v}_n) = \lambda_1 T(\mathbf{v}_1) + \lambda_2 T(\mathbf{v}_2) + ... + \lambda_n T(\mathbf{v}_n)$$

Condición necesaria y suficiente de monomorfismo

Recordemos que una aplicación lineal T es inyectiva si $T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{u})$ implica que $\mathbf{v} = \mathbf{u}$.

Proposición 4: Una aplicación lineal $T : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{W}$ es inyectiva si, y sólo si, $\ker(T) = \{\mathbf{0_V}\}$

Proposición 5: Sea $T : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{W}$ una aplicación lineal entre espacios vectoriales. Si $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ es una base de $\mathbf{V}$, entonces

$$\mathrm{Im}(T) = \langle T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), ..., T(\mathbf{v}_n)\rangle$$

El siguiente teorema demuestra que las dimensiones del Núcleo y de la Imagen de una aplicación lineal están relacionadas.

Teorema 1: (Fórmula de las dimensiones para aplicaciones lineales) Sea $T : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{W}$ una aplicación lineal entre espacios vectoriales siendo $\dim \mathbf{V} = n$. Entonces

$$\dim \ker(T) + \dim \mathrm{Im}(T) = n = \dim \mathbf{V}$$

Definición 4: Sea $T : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{W}$ una aplicación lineal. Entonces, se llama *rango de* T, y se denota por $rg(T)$, a

$$rg(T) = \dim \mathrm{Im}(T)$$

Proposición 6: Sea $T : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{W}$ una aplicación lineal entre espacios vectoriales con $\dim V = n$ y $\dim W = m$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. T es inyectiva.
2. $\ker(T) = \{\mathbf{0_V}\}$.
3. Si E es un sistema de vectores linealmente independientes de $\mathbf{V}$, entonces $T(E)$ es un sistema de vectores linealmente independientes de $\mathbf{W}$.
4. $\dim \mathbf{V} = rang(T) = \dim \mathrm{Im}(T) = n$
5. Si $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ es una base de $\mathbf{V}$, entonces $T(\beta) = \{T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), ..., T(\mathbf{v}_n)\}$ es una base de $\mathrm{Im}(T)$.

Proposición 7: Sea $T : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{W}$ una aplicación lineal entre espacios vectoriales con $\dim V = n$ y $\dim W = m$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. T es epiyectiva.
2. Si G es un sistema de generadores de $\mathbf{V}$, entonces $T(G)$ es un sistema de generadores de $\mathbf{W}$.
3. $\dim \mathbf{W} = rang(T) = \dim \mathrm{Im}(T) = m$

Proposición 8: Sean $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ espacios vectoriales de igual dimensión finita, esto es, $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W} = n$ y sea $T : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{W}$ una aplicación lineal. Entonces,

$$T \text{ es isomorfismo} \iff T \text{ es inyectiva} \iff T \text{ es epiyectiva}$$

2 Matriz asociada a una aplicación lineal respecto de una pareja de bases.

Hasta aquí hemos estudiado aplicaciones lineales examinando su Núcleo y su Imagen. A continuación, vamos a representar las aplicaciones lineales mediante matrices hasta el punto de establecer una correspondencia biyectiva entre aplicaciones lineales y matrices. Esto nos permitirá utilizar las propiedades de las matrices para estudiar propiedades de las aplicaciones lineales.

A lo largo de esta sección, $\mathbf{V}_n$ y $\mathbf{W}_m$ son $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de dimensiones finitas n y m respectivamente y $T : \mathbf{V}_n \longrightarrow \mathbf{W}_m$ es una aplicación lineal. Sean ahora $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ y $\gamma = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_m\}$ bases (ordenadas) de $\mathbf{V}_n$ y $\mathbf{W}_m$ respectivamente. Entonces, la matriz asociada a T respecto de las bases β y γ, denotada por $[T]_\beta^\gamma$, es la matriz cuyas columnas están formadas por las coordenadas, respecto de la base γ, de las imágenes de los vectores de la base β, esto es,

$$A = [T]_\beta^\gamma = \Big([T(\mathbf{v}_1)]_\gamma, [T(\mathbf{v}_2)]_\gamma, ..., [T(\mathbf{v}_n)]_\gamma \Big)$$

Proposición 10: Sean $\mathbf{V}_n$ y $\mathbf{W}_m$ espacios vectoriales con bases (ordenadas) β y γ. Sea $T : \mathbf{V}_n \longrightarrow \mathbf{W}_m$ una aplicación lineal. Entonces, para cada vector $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_n$ se verifica que

$$[T(\mathbf{v})]_\gamma = [T]_\beta^\gamma \; [\mathbf{v}]_\beta$$

Cualquier matriz representa una aplicación lineal

Teorema 2: Cualquier matriz representa una aplicación lineal entre espacios vectoriales de adecuadas dimensiones con respecto a cualquier pareja de bases.

Observación 3: Por consiguiente, no sólo cualquier aplicación lineal viene descrita por una matriz sino que cualquier matriz representa una aplicación lineal. Si denotamos por $L(\mathbf{V}_n\ , \mathbf{W}_m)$ el conjunto de las aplicaciones lineales de $\mathbf{V}_n$ en $\mathbf{W}_m$, se sigue que la aplicación $L(\mathbf{V}_n , \mathbf{W}_m) \longrightarrow M_{m\times n}(\mathbb{R})$ que a cada aplicación lineal le hace corresponder su matriz asociada respecto de bases elegidas, es una biyección. Esto nos permitirá usar las matrices para obtener resultados acerca de las aplicaciones lineales y, en ocasiones, abusando del lenguaje, se confunde una aplicación lineal con su matriz asociada.

Rango de una aplicación lineal

Proposición 8: Sea $T : \mathbf{V}_n \longrightarrow \mathbf{W}_m$ una aplicación lineal y sea A la matriz asociada a T respecto de cualesquiera bases de $\mathbf{V}_n$ y $\mathbf{W}_m$. Entonces

1. El rango de la aplicación lineal T es igual al rango de su matriz asociada A.
2. T es un isomorfismo si, y sólo si, su matriz asociada A es regular.

Corolario 1: Sea $T : \mathbf{V}_n \longrightarrow \mathbf{W}_m$ una aplicación lineal y sea A cualquier matriz asociada a T. Entonces,

1. T es epiyectiva si, y sólo si, $rang(A) = m =$ número de filas de A.
2. T es inyectiva si, y sólo si, $rang(A) = n =$ número de columnas de A.

Invertibilidad e isomorfismos

Definición: Una aplicación lineal $T : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{W}$ tiene o admite aplicación inversa $U : \mathbf{W} \longrightarrow \mathbf{V}$ si $T \circ U = Id_{\mathbf{W}}$ y $U \circ T = Id_{\mathbf{V}}$. Como es bien sabido de teoría de funciones, la aplicación inversa, si existe, es única y se denota por $U = T^{-1}$. Si T tiene inversa diremos que T es invertible.

Al igual que en el caso de funciones, una aplicación lineal $T : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{W}$ tiene inversa si, y sólo si, es isomorfismo, esto es, si es inyectiva y epiyectiva.

Proposición 11: Sea $T : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{W}$ una aplicación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita con bases β y γ respectivamente. Entonces T es invertible si, y sólo si, $[T]_\beta^\gamma$ lo es. Además,

$$\left[T^{-1}\right]_\gamma^\beta = \left([T]_\beta^\gamma\right)^{-1}$$

Teorema 3 : Sean $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ espacios vectoriales de dimensión finita. Entonces $\mathbf{V}$ es isomorfo a $\mathbf{W}$ si, y sólo si, $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$.

Teorema 4: Sea β una base de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\mathbf{V}$ de dimensión n. Entonces la función $\phi_\beta : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{K}^n$ definida por $\phi_\beta(\mathbf{x}) = [\mathbf{x}]_\beta$ es un isomorfismo.

Corolario 1: Si $\mathbf{V}$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n, entonces $\mathbf{V}$ es isomorfo a $\mathbb{K}^n$.