FUNCIONES HIPERBÓLICAS

Definición de seno hiperbólico:

Llamaremos "seno hiperbólico de x" y lo denotamos por $\text{sh}\,x$ a

$$\boxed{\text{sh}\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}}$$

Nota: $\text{sh}\,x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \dfrac{e^x - \frac{1}{e^x}}{2} = \dfrac{e^{2x} - 1}{2e^x}$

Definición de coseno hiperbólico

Llamaremos "coseno hiperbólico de x" y lo denotamos por $\text{ch}\,x$ a

$$\boxed{\text{ch}\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}}$$

Nota: $\text{ch}\,x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \dfrac{e^x + \frac{1}{e^x}}{2} = \dfrac{e^{2x} + 1}{2e^x}$

Teorema: $\boxed{\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1}$

En efecto:

$$\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Definicion de "tangente hiperbólica"

Llamaremos "tangente hiperbólica de x" y lo denotamos por $\text{th}\,x$ a

$$\boxed{\text{th}\,x = \frac{\text{sh}\,x}{\text{ch}\,x} = \frac{\frac{e^{2x}-1}{2e^x}}{\frac{e^{2x}+1}{2e^x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}}$$

Funcion inversa

Dada una funcion $y=f(x)$, para calcular la función inversa se siguen los siguientes pasos

Paso 1) Se despeja la "x" en funcion de "y"

Paso 2) Se cambia la "x" por la "y" y la "y" por la "x"

Ejemplo 1 Hallar la función inversa de $y = 4x-3$

Solución

Despejo la x en funcion de la y

$$y-3 = 4x$$

$$\frac{y-3}{4} = x$$

Y la función inversa se obtiene cambiando la "x" por la "y" y la "y" por la "x"

$$\boxed{y = \frac{x-3}{4}}$$

Ejemplo 2 Hallar la función inversa de $y = e^{2x}+1$

Solución

Despejo la x en función de la y

$$e^{2x} = y-1$$

Tomando logaritmo neperiano

$$\ln\left(e^{2x}\right) = \ln(y-1)$$

$$2x \ln e = \ln(y-1)$$

Como $\ln e = 1$,

$$2x = \ln(y-1)$$

y de aquí $\quad x = \frac{1}{2}\ln(y-1)$

La función inversa se obtiene cambiando la "x" por la "y" y la "y" por la "x"

$$\boxed{y = \frac{1}{2}\ln(x-1)}$$

Inversas de las funciones hiperbólicas

ⓐ Inversa de la función seno hiperbólico

Desde que $\cancel{s}y = \operatorname{sh} x = \dfrac{e^{2x}-1}{2e^x}$, despejamos la x en función de y,

$$2e^x y = e^{2x} - 1$$

y de aquí

$$e^{2x} - 2e^x y - 1 = 0,$$

o, lo que es lo mismo,

$$e^{2x} - 2y\,e^x - 1 = 0.$$

Llamando $Z = e^x$ entonces $Z^2 = e^{2x}$ y la ecuación anterior queda

$$Z^2 - 2yZ - 1 = 0$$

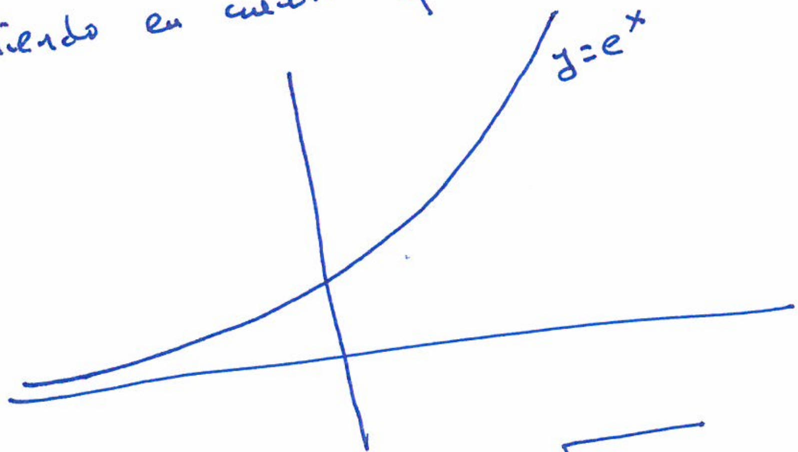
$$Z = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2+4}}{2} = \frac{2y \pm 2\sqrt{y^2+1}}{2} =$$

$$= y \pm \sqrt{y^2+1}$$

Luego sustituyendo Z por su valor

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2+1}.$$

Teniendo en cuenta que $e^x > 0$ ya que su gráfica es



entonces la opcion $y-\sqrt{y^2+1}$ no puede ser porque

$$y-\sqrt{y^2+1} < 0.$$

Por tanto

$$e^x = y + \sqrt{y^2+1}$$

Tomando logaritmo neperiano queda

$$x \cdot \ln e = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$$

Desde que $\ln e = 1$,

$$x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$$

La función inversa se obtiene cambiando la "x" por la "y" y la "y" por la "x", es decir

$$y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$ (Función inversa del seno hiperbólico)

Nota: La función inversa del seno hiperbólico se suele denotar por $\operatorname{argsh} x$, es decir

$$\boxed{\operatorname{argsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)}$$

(b) Siguiendo un razonamiento parecido se puede probar que la función inversa del coseno hiperbólico es

$$y = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right).$$

Esta función inversa se suele denotar por $\operatorname{argch} x$, es decir

$$\boxed{\operatorname{argch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)}$$

ⓒ De la misma manera, se puede probar que la función inversa de la tangente hiperbólica que se denota por $\operatorname{argth} x$ viene dada por

$$\boxed{\operatorname{argth} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$$

Derivada de las inversas de las funciones hiperbólicas

ⓐ Derivada de argsh x

$$y = \operatorname{argsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

entonces su derivada es

$$y' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1 + \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\cancel{x+\sqrt{x^2+1}}} \cdot \frac{\cancel{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

es decir $$\boxed{(\operatorname{argsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}$$

ⓑ Derivada de argch x

$$y = \operatorname{argch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

entonces su derivada es

$$y' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} \cdot \left(1 + \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2-1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\cancel{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}} \cdot \frac{\cancel{\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)}}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

es decir

$$\boxed{(\operatorname{argch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}}$$

ⓒ Derivada de argth x

$$y = \operatorname{argth} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

entonces su derivada es

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{1\cdot(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \quad \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1-\cancel{x}+1+\cancel{x}}{(1-x)^2} = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{1-x}}{1+x} \cdot \frac{\cancel{2}}{(1-x)^{\cancel{2}}}$$

$$= \frac{1}{(1+x)(1-x)} = \frac{1}{1-x^2}$$

es decir

$$\boxed{(\operatorname{argth} x)' = \frac{1}{1-x^2}}$$