Caso 2. Que las raíces del denominador sean reales y múltiples.

Ej:

$$I = \int \frac{x^5 - 2x^4 + x + 1}{x^3 - 3x^2 + 4}\, dx$$

En este caso, como el grado del numerador es mayor que el del denominador, primero tendremos que dividir ambos polinomios

$$\begin{array}{l|l}
\cancel{x^5} - 2x^4 \qquad\qquad + x \quad + 1 & x^3 - 3x^2 + 4 \\ \cline{2-2}
-\cancel{x^5} + 3x^4 \qquad - 4x^2 & x^2 + x + 3 \\ \cline{1-1}
\qquad \cancel{x^4} \qquad - 4x^2 + x & \\
\quad -\cancel{x^4} + 3x^3 \qquad - 4x & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad 3\cancel{x^3} - 4x^2 - 3x + 1 & \\
\qquad -\cancel{3x^3} + 9x^2 \qquad - 12 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad 5x^2 - 3x - 11 &
\end{array}$$

Aplicando la regla de la división queda

$$x^5 - 2x^4 + x + 1 = (x^2 + x + 3)(x^3 - 3x^2 + 4) + (5x^2 - 3x - 11)$$

Luego

$$I = \int \frac{(x^2+x+3)(x^3-3x^2+4) + (5x^2-3x-11)}{x^3-3x^2+4}\, dx =$$

$$= \int \frac{(x^2+x+3)\cancel{(x^3-3x^2+4)}}{\cancel{x^3-3x^2+4}}\, dx + \int \frac{5x^2-3x-11}{x^3-3x^2+4}\, dx =$$

$$= \int (x^2+x+3)\, dx + \int \frac{5x^2-3x-11}{x^3-3x^2+4}\, dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 3x + \int \frac{(5x^2-3x-11)\,dx}{x^3-3x^2+4}$$

(I)

Ahora tenemos que resolver

$$I_1 = \int \frac{5x^2-3x-11}{x^3-3x^2+4}\, dx$$

donde el grado del numerador es más pequeño que el grado del denominador.

Calculemos las raíces de x^3-3x^2+4.

Aplicando Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 0 & 4 \\ -1) & & -1 & 4 & -4 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

Las otras dos raíces son de $x^2-4x+4=0$, es decir

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = \frac{4 \pm 0}{2} \begin{array}{l} \nearrow 2 \\ \searrow 2 \end{array}$$

Luego las raíces son $\{-1, 2, 2\}$ es decir reales y la raíz 2 es doble.

La descomposición de x^3-3x^2+4 sería

$$x^3-3x^2+4 = (x+1)(x-2)^2$$

Ahora para resolver $\int \frac{5x^2-3x-11}{x^3-3x^2+4}\, dx$, descomponemos la fracción $\frac{5x^2-3x-11}{x^3-3x^2+4}$ en fracciones simples de la siguiente manera, para cada raíz real α simple aparecerá la fracción $\frac{A}{x-\alpha}$ (igual que en el caso 1) y para cada raiz real β de multiplicidad p, aparecera las siguientes fracciones simples

$$\frac{B_1}{(x-\beta)^p} + \frac{B_2}{(x-\beta)^{p-1}} + \frac{B_3}{(x-\beta)^{p-2}} + \cdots + \frac{B_{p}}{(x-\beta)}$$

donde $B_1, B_2, \ldots B_{p-1}$ hay que calcularlo. En nuestro caso

$$\frac{5x^2-3x-11}{x^3-3x^2+4} = \frac{5x^2-3x-11}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x-2}$$

Hagamos la suma del ultimo miembro usando el minimo común múltiplo

$$\frac{5x^2-3x-11}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{A(x-2)^2 + B(x+1) + C(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-2)^2}$$

Como ambas fracciones son iguales y tienen los mismos denominadores los numeradores tendrán que ser iguales, es decir

$$5x^2-3x-11 = A(x-2)^2 + B(x+1) + C(x+1)(x-2) \quad (*)$$

Para calcular A, buscamos como en el caso 1 el paréntesis común a B y C que es $x+1$, luego $x+1=0$ y $x=-1$

Poniendo $x=-1$ en $(*)$ queda

$$5(-1)^2-3(-1)-11 = A(-1-2)^2$$

es decir,

$$-3 = A \cdot 9 \quad ; \quad \boxed{A = -\frac{3}{9} = -1/3}$$

Para calcular B, buscamos el paréntesis común ~~a~~ A y C que es $x-2$. Luego haciendo $x-2=0$, es decir, $x=2$ en (*) queda

$$5 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 - 11 = B(2+1)$$

$$3 = 3B \quad y \quad \boxed{B = 1}$$

Para calcular C, como no hay paréntesis común a A y B se le da a la x un valor sencillo distinto de los dos dados antes $(-1, 2)$, por ejemplo, $x=0$ en (*) y queda

$$5 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 - 11 = -\frac{1}{3}(0-2)^2 + \cancel{B} 1 \cdot (0+1) + C(0+1)(0-2)$$

$$-11 = -\frac{4}{3} + 1 - 2C$$

Luego

$$-33 = -4 + 3 - 6C$$

$$-32 = -6C \quad ; \quad \boxed{C = \frac{32}{6}}$$

Por tanto, la descomposición en fracciones simples es

$$\frac{5x^2 - 3x - 11}{x^3 - 3x^2 + 4} = \frac{-1/3}{x+1} + \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{\frac{32}{6}}{x-2}$$

Integrando queda

$$\int \frac{5x^2-3x-11}{x^3-3x^2+4}\,dx = -\frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \int \frac{1}{(x-2)^2}\,dx + \frac{32}{6}\int \frac{1}{x+2}\,dx$$

Tener en cuenta que $\int \frac{1}{x+1}\,dx = \ln(x+1)$ porque $(x+1)' = 1$

$$\int \frac{1}{x+2}\,dx = \ln(x+2) \quad \text{porque } (x+2)'=1$$

y $\int \frac{1}{(x-2)^2}\,dx$ ya fue vista en a1 que se hace con el cambio $x-2=t$, es decir $dx=dt$ y, por tanto,

$$\int \frac{1}{(x-2)^2}\,dx = \int \frac{1}{t^2}\,dt = \int t^{-2}\,dt = \frac{t^{-1}}{-1} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{x-2}$$

Luego

$$\int \frac{5x^2-3x-11}{x^3-3x^2+4}\,dx = -\frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{x-2} + \frac{32}{6}\ln(x+2)$$

y nuestra integral se obtiene llevando la integral anterior a (I), es decir,

$$\boxed{I = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 3x - \frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{x-2} + \frac{32}{6}\ln(x+2) + C}$$

Caso 3 Que el denominador tenga raices complejas simples.

En este caso, a la hora de descomponer en fracciones simples, para las raices reales seguiremos la misma técnica que en los casos 1 y 2 y para las raices complejas simples aparecerá una fraccion del tipo $\frac{Mx+N}{x^2+bx+c}$ (ver apartado (a) ⑧) que tiene una integral que sabemos hacer.

Ej: $$\int \frac{dx}{x^2\,(x^2+2)}$$

Observamos que el denominador tiene como raices

$$x^2(x^2+2)=0 \begin{cases} x^2=0 \Rightarrow x=0 \text{ (doble)} \\ x^2+2=0 \Rightarrow x^2=-2;\quad x=\pm\sqrt{-2}= \\ \qquad =\pm\sqrt{2}\sqrt{-1}= \\ \qquad =\pm\sqrt{2}\,i \end{cases}$$

(compleja simple)

Descomponemos en fracciones simples de la siguiente manera

$$\frac{1}{x^2(x^2+2)}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{Mx+N}{x^2+2}$$

Hagamos la suma del segundo miembro tomando minimo común múltiplo

$$\frac{1}{x^2(x^2+2)}=\frac{A(x^2+2)+Bx(x^2+2)+(Mx+N)x^2}{x^2(x^2+2)}$$

y, de aquí, se sigue

$$1 = A(x^2+2) + Bx(x^2+2) + (Mx+N)x^2 \qquad (*)$$

Como B y $Mx+N$ tiene como factor común x, haciendo $x=0$ en $(*)$ queda

$$1 = A(0^2+2); \quad \text{de aquí} \quad 1 = 2A; \quad \boxed{A = 1/2}$$

Como los otros factores comunes son x^2+2 que tiene raíces complejas, lo que se hace es darle cualquier valor sencillo y distinto de $x=0$, por ejemplo, $x=1$ queda

$$1 = \frac{1}{2}(1^2+2) + B \cdot 1(1^2+2) + (M \cdot 1+N) \cdot 1$$

de aquí

$$1 = \frac{3}{2} + 3B + M + N; \quad \boxed{3B + M + N = -1/2}$$

Para $x=-1$ queda

$$1 = \frac{1}{2}((-1)^2+2) + B(-1)[(-1)^2+2] + [M(-1)+N](-1)^2$$

y queda

$$1 = \frac{3}{2} - 3B - M + N, \quad \text{es decir,} \quad \boxed{-3B - M + N = -1/2}$$

Para $x=2$ queda

$$1 = \frac{1}{2}(2^2+2) + B \cdot 2(2^2+2) + (M \cdot 2+N) \cdot 2^2$$

y de aquí

$$1 = 3 + 12B + 8M + 4N$$

es decir

$$12B + 8M + 4N = -2$$

y simplificando por 2

$$\boxed{6B + 4M + 2N = -1}$$

Es decir, tenemos el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{r} 3B + M + N = -\frac{1}{2} \\ -3B - M + N = -\frac{1}{2} \\ 6B + 4M + 2N = -1 \end{array}\right\}$$

Este sistema se puede resolver por Rouché-Fröbenius (ver Álgebra), pero en este caso, observamos que sumando las dos primera queda

$$2N = -1; \quad \boxed{N = -\frac{1}{2}}$$

Luego la primera ecuación queda

$$3B + M - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}, \text{ es decir, } \boxed{3B + M = 0}$$

y la última

$$6B + 4M + 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -1, \text{ es decir}$$

$$6B + 4M - 1 = -1, \text{ es decir } \boxed{6B + 4M = 0}$$

Es decir

$$\left.\begin{array}{r} 3B + M = 0 \\ 6B + 4M = 0 \end{array}\right\}$$

simplificando la segunda

$$\left.\begin{array}{l}3B+M=0\\3B+2M=0\end{array}\right\}$$

Restando queda $-M=0$; $\boxed{M=0}$ y por tanto $3B+0=0$, es decir $\boxed{B=0}$

Por tanto,

$$\frac{1}{x^2(x^2+2)}=\frac{1/2}{x^2}+\frac{-1/2}{x^2+2}$$

e integrando

$$I=\int\frac{dx}{x^2(x^2+2)}=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2}dx-1/2\int\frac{dx}{x^2+2}=$$

$$=1/2\int x^{-2}dx-1/2\int\frac{dx}{x^2+2}=\frac{1}{2}\frac{x^{-1}}{-1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+2}=$$

$$=-\frac{1}{2x}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+2}$$

La integral $\int\frac{dx}{x^2+2}$ se parece a $\int\frac{dx}{x^2+1}=\text{arctg}\,x$, luego

$$I_1=\int\frac{dx}{x^2+2}=\int\frac{dx}{2(1/2x^2+1)}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1/2x^2+1}$$

Haciendo $\frac{1}{2}x^2=t^2$, tomando raíces cuadradas

$$\frac{1}{\sqrt{2}}x=t$$

Diferenciando $\frac{1}{\sqrt{2}}dx=dt$, es decir, $dx=\sqrt{2}\,dt$, luego

$$I_1 = \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{2}\, dt}{t^2+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} t = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} x\right)$$

Luego nuestra integral es

$$\boxed{I = -\frac{1}{2x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} x\right) + C}$$

Caso 4: Que el denominador tenga raíces complejas múltiples

Supongamos que queremos calcular $\int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx$ con $R(x)$ y $Q(x)$ polinomios y grad $R(x) <$ grad $Q(x)$. y, además, $Q(x)$ tiene raíces complejas múltiples. En este caso, se utiliza el llamado método de Hermite que se fundamenta en la siguiente descomposición de la función racional $\frac{R(x)}{Q(x)}$

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{Q_1(x)}\right] + \frac{R_1(x)}{Q_2(x)}$$

donde $Q_1(x)$ es un polinomio con las mismas raíces que $Q(x)$ pero con orden de multiplicidad una unidad menos, $f(x)$ es un polinomio a determinar con grado una unidad inferior a $Q_1(x)$

y $Q_2(x)$ es un polinomio con las mismas raíces que $Q(x)$ pero con orden de multiplicidad igual a 1

Ej:

(Examen) $I = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

Observamos que el denominador tiene como raíces

$(x^2+1)^2 = 0 \Rightarrow x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1;\ x=\pm i$

y como (x^2+1) está elevado al cuadrado estas raíces $x=\pm i$ son dobles.

Entonces apliquemos Hermite

$$\frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{ax+b}{x^2+1}\right) + \frac{Mx+N}{x^2+1}$$

Entonces derivando queda

$$\frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{a(x^2+1) - 2x(ax+b)}{(x^2+1)^2} + \frac{Mx+N}{x^2+1}$$

es decir,

$$\frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{ax^2+a-2ax^2-2bx}{(x^2+1)^2} + \frac{Mx+N}{x^2+1}$$

Resolviendo el segundo miembro queda

$$\frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{ax^2+a-2ax^2-2bx + (Mx+N)(x^2+1)}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{-ax^2-2bx+a + Mx^3+Mx+Nx^2+N}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{Mx^3 + (-a+N)x^2 + (-2b+M)x + (a+N)}{(x^2+1)^2}$$

De aquí se obtiene

$$1 = Mx^3 + (-a+N)x^2 + (-2b+M)x + (a+N)$$

e identificando coeficientes queda

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{M=0} \\ -a+N=0 \\ -2b+M=0 \\ a+N=1 \end{array}\right\} \rightarrow -2b=0 \rightarrow \boxed{b=0}$$

$$\left.\begin{array}{r} -a+N=0 \\ a+N=1 \end{array}\right\}$$

$$\oplus \quad 2N = 1 \longrightarrow \boxed{N = 1/2}$$

y, por tanto, $-a + 1/2 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 1/2}$

Luego nuestra descomposición es

$$\frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1/2\, x}{x^2+1}\right) + \frac{1/2}{x^2+1}$$

e integrando

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{d}{dx}\left(\frac{1/2\, x}{x^2+1}\right) + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= \frac{1/2\ x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,x + C$$

Ej:
$$I = \int \frac{3x+2}{x^2(x^2+2)^2}\,dx$$

Observamos que el denominador tiene como raíces $x=0$ doble y $(x^2+2)^2=0 \Rightarrow x^2+2=0 \Rightarrow x^2=-2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-2}=\pm\sqrt{2}\,i$ y estas raíces son complejas múltiples porque aparece x^2+2 elevado al cuadrado.

Aplicamos Hermite

$$\frac{3x+2}{x^2(x^2+2)^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{ax^2+bx+c}{x\,(x^2+2)}\right] + \frac{A}{x} + \frac{Mx+N}{x^2+2}$$

Desarrollando queda

$$\frac{3x+2}{x^2(x^2+2)^2} = \frac{(2ax+b)\,x\,(x^2+2)-(3x^2+2)(ax^2+bx+c)}{x^2(x^2+2)^2} + \frac{A}{x} + \frac{Mx+N}{x^2+2} =$$

$$= \frac{(2ax+b)(x^3+2x)-(3x^2+2)(ax^2+bx+c)+Ax(x^2+2)^2+(Mx+N)x^2(x^2+2)}{x^2(x^2+2)^2}$$

$$= \frac{2ax^4+4ax^2+bx^3+2bx-3ax^4-3bx^3-3cx^2-2ax^2-2bx-2c+}{x^2(x^2+2)^2}$$

$$+ \frac{Ax^5+4Ax^3+4Ax+Mx^5+2Mx^3+Nx^4+2Nx^2}{x^2(x^2+2)^2} =$$

$$= \frac{(A+M)x^5+(2a-3a+N)x^4+(b-3b+4A+2M)x^3+(4a-3c-2a+2N)x^2}{x^2(x^2+2)^2}$$

$$+ \frac{(2b-2b+4A)x-2c}{x^2(x^2+2)^2}$$

de donde

$$3x+2 = (A+M)x^5 + (-a+N)x^4 + (-2b+4A+2M)x^3 + (2a-3c+2N)x^2$$
$$+ 4Ax - 2c$$

Igualando coeficientes

$A+M=0$

$-a+N=0$

$-2b+4A+2M=0$

$2a-3c+2N=0$

$4A=3 \longrightarrow \boxed{A=\frac{3}{4}}$

$-2c=2 \Rightarrow \boxed{c=-1}$

Como $M=-A \Rightarrow \boxed{M=-\frac{3}{4}}$

De $-2b+4A+2M=0 \Rightarrow -2b+4\cdot\frac{3}{4}+2(-\frac{3}{4})=0$ y de

aquí, $-2b+3-\frac{3}{2}=0$; $-2b=-\frac{3}{2}$; $\boxed{b=-\frac{3}{4}}$

Como $-a+N=0 \Rightarrow N=a$ luego

$2a-3c+2N=0 \Rightarrow 2a-3c+2a=0 \Rightarrow 4a=3c \Rightarrow$

$\Rightarrow 4a=-3$; $\boxed{a=-\frac{3}{4}}$

y como $N=a \Rightarrow \boxed{N=-\frac{3}{4}}$

Por tanto, la descomposición es

$$\frac{3x+2}{x^2(x^2+1)^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{-\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{4}x-1}{x(x^2+1)}\right] + \frac{\frac{3}{4}}{x} + \frac{-\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}}{x^2+2}$$

e integrando

$$\int \frac{3x+2}{x^2(x^2+1)^2}\,dx = \frac{-\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{4}x-1}{x(x^2+1)} + \frac{3}{4}\int\frac{dx}{x} - \frac{3}{4}\int\frac{x+1}{x^2+2}\,dx$$

es decir,

$$\int \frac{3x+2}{x^2(x^2+1)^2}\,dx = \frac{-\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{4}x - 1}{x(x^2+1)} + \frac{3}{4}\ln x - \frac{3}{4}\int \frac{x+1}{x^2+2}\,dx$$

Ahora hay que resolver $I_1 = \int \frac{x+1}{x^2+2}\,dx$.

Como $(x^2+2)' = 2x$, entonces

$$I_1 = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\left[\int \frac{2x}{x^2+2}\,dx + 2\int \frac{dx}{x^2+2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln(x^2+2) + 2\int \frac{dx}{x^2+2}\right]$$

Si $I_2 = \int \frac{dx}{x^2+2} = \int \frac{dx}{2\left(\frac{1}{2}x^2+1\right)} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\frac{1}{2}x^2+1}$

Haciendo $\frac{1}{2}x^2 = t^2$, tomando raíces cuadradas

$$\frac{1}{\sqrt{2}}x = t$$

Diferenciando $\frac{1}{\sqrt{2}}dx = dt \Rightarrow dx = \sqrt{2}\,dt$

Luego $I_2 = \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{2}\,dt}{t^2+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg} t =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x\right)$$

Por tanto,

$$I_1 = \frac{1}{2}\left[\ln(x^2+2) + 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln(x^2+2) + \sqrt{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x\right)\right]$$

y nuestra integral es

$$\int \frac{3x+2}{x^2(x^2+1)^2}\,dx = \frac{-\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{4}x - 1}{x\,(x^2+1)} + \frac{3}{4}\ln x - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\Big[\ln(x^2+2) +$$

$$+ \sqrt{2}\,\operatorname{arctg}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}x\right)\Big] + C$$

ⓓ Integrales de la forma

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx \quad y \quad \int \frac{dx}{(x-\alpha)^p\sqrt{ax^2+bx+c}}$$, donde $P(x)$ es un polinomio.

Empecemos con las integrales del tipo $\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$, donde $P(x)$ es un polinomio

Un método para resolver este tipo de integrales es el llamado "método alemán" que consiste en la siguiente descomposición

$$\frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{d}{dx}\left[f(x)\sqrt{ax^2+bx+c}\right] + \frac{A}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

donde $f(x)$ es un polinomio a determinar de grado una unidad inferior al de $P(x)$ y A una constante a determinar.

Ej: $I = \int \frac{x^2+1}{\sqrt{2x^2+x+1}}\,dx$

Aplicando el método alemán queda

$$\frac{x^2+1}{\sqrt{2x^2+x+1}} = \frac{d}{dx}\left[(ax+b)\sqrt{2x^2+x+1}\right] + \frac{A}{\sqrt{2x^2+x+1}}$$

Derivando en el segundo miembro y operando queda:

$$\frac{x^2+1}{\sqrt{2x^2+x+1}} = a\sqrt{2x^2+x+1} + (ax+b)\cdot\frac{(4x+1)}{2\sqrt{2x^2+x+1}} + \frac{A}{\sqrt{2x^2+x+1}} ;$$

de donde

$$\frac{x^2+1}{\sqrt{2x^2+x+1}} = a\sqrt{2x^2+x+1} + \frac{(ax+b)(2x+1/2)}{\sqrt{2x^2+x+1}} + \frac{A}{\sqrt{2x^2+x+1}} =$$

$$= \frac{a(2x^2+x+1)+(ax+b)(2x+1/2)+A}{\sqrt{2x^2+x+1}}$$

y, por tanto,

$$x^2+1 = a(2x^2+x+1)+(ax+b)(2x+1/2)+A,$$

es decir,

$$x^2+1 = 2ax^2+ax+a+2ax^2+\tfrac{1}{2}ax+2bx+b/2+A$$

o lo que es lo mismo

$$x^2+1 = 4ax^2+(a+1/2a+2b)x+(a+b/2+A)$$

Identificando coeficientes queda

$$\left.\begin{array}{l} 4a=1 \\ a+\frac{1}{2}a+2b=0 \\ a+b/2+A=1 \end{array}\right\} \quad \boxed{a=1/4}$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+2b=0; \quad 2b=-\frac{3}{8}; \quad \boxed{b=-\frac{3}{16}}$$

$$\frac{1}{4}-\frac{3}{32}+A=1; \quad \boxed{A=1-\frac{5}{32}=\frac{27}{32}}$$

Por tanto,

$$\frac{x^2+1}{\sqrt{2x^2+x+1}} = \frac{d}{dx}\left[\left(\frac{1}{4}x-\frac{3}{16}\right)\sqrt{2x^2+x+1}\right] + \frac{27/32}{\sqrt{2x^2+x+1}}$$

Integrando

$$\int \frac{x^2+1}{\sqrt{2x^2+x+1}}\,dx = \int \frac{d}{dx}\left[\left(\tfrac{1}{4}x-\tfrac{3}{16}\right)\sqrt{2x^2+x+1}\right] + \frac{27}{32}\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2+x+1}} =$$

$$=\left(\frac{1}{4}x-\frac{3}{16}\right)\sqrt{2x^2+x+1} + \frac{27}{32}\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2+x+1}}$$

Ahora hay que resolver $I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+x+1}}$ que se corresponden con las integrales ⓐ ⑧

$$I_1 = \int\frac{dx}{\sqrt{2x^2+x+1}} = \int\frac{dx}{\sqrt{2\left(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}}$$

Completando cuadrados $x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ queda

$$x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} = x^2+2\cdot\frac{1}{4}x+\left(\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{2} = \left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}+\frac{1}{2} =$$

$$=\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{16}$$

Luego

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{16}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{7}{16}\left[\frac{16}{7}\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+1\right.}} =$$

$$= \cancel{\frac{4}{\sqrt{2}\sqrt{7}}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{7}{16}}}}$$

$$I_1 = \frac{4}{\sqrt{2}\sqrt{7}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{16}{7}\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+1}}$$

Haciendo $\frac{16}{7}\left(x+\frac{1}{4}\right)^2 = t^2$, tomando raíces cuadradas

$$\frac{4}{\sqrt{7}}\left(x+\frac{1}{4}\right) = t$$

diferenciando $\frac{4}{\sqrt{7}}\, dx = dt \rightarrow dx = \frac{\sqrt{7}}{4}\, dt$

Luego

$$I_1 = \frac{4}{\sqrt{2}\sqrt{7}} \int \frac{\frac{\sqrt{7}}{4}\, dt}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arg\,sh} t = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arg\,sh}\left(\frac{4}{\sqrt{7}}\left(x+\frac{1}{4}\right)\right)$$

Por tanto, nuestra integral será

$$\boxed{\int \frac{x^2+1}{\sqrt{2x^2+x+1}}\, dx = \left(\frac{1}{4}x - \frac{3}{16}\right)\sqrt{2x^2+x+1} + \frac{27}{32}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arg\,sh}\left(\frac{4}{\sqrt{7}}\left(x+\frac{1}{4}\right)\right) + C}$$

Veamos ahora las integrales del tipo

$$I = \int \frac{dx}{(x-\alpha)^p \sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Si en esta integral hacemos el cambio $x - \alpha = \frac{1}{t}$, diferenciando

queda

$$dx = -\frac{1}{t^2}\, dt$$

Por tanto

$$I = \int \frac{-\frac{1}{t^2}\, dt}{\frac{1}{t}\sqrt{a\left(\frac{1}{t}+\alpha\right)^2 + b\left(\frac{1}{t}+\alpha\right)+c}} = -\int \frac{\frac{1}{t}\, dt}{\sqrt{a\left(\frac{1}{t^2}+\frac{2\alpha}{t}+\alpha^2\right)+\frac{b}{t}+b\alpha+c}}$$

$$= -\int \frac{\frac{1}{t}\, dt}{\sqrt{a\left(\frac{1+2\alpha t+\alpha^2 t^2}{t^2}\right)+\frac{b}{t}+b\alpha+c}} =$$

$$= -\int \frac{\frac{1}{t}\, dt}{\sqrt{\frac{a+2\alpha a t + a\alpha^2 t^2 + bt + (b\alpha+c)t^2}{t^2}}} =$$

$$= -\int \frac{\frac{1}{t}\, dt}{\frac{\sqrt{(a\alpha^2+b\alpha+c)t^2+(2a\alpha+b)t+a}}{t}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{(a\alpha^2+b\alpha+c)t^2+(2a\alpha+b)t+a}}$$

y esta última integral se resuelve por el método alemán.

Ej: $$I = \int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+1}}$$

Haciendo el cambio $x+2 = \frac{1}{t}$, diferenciando $dx = -\frac{1}{t^2}\,dt$

Luego

$$I = \int \frac{-\frac{1}{t^2}\,dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\left(\frac{1}{t}-2\right)^2+1}} = \int \frac{-\frac{1}{t}\,dt}{\sqrt{\frac{1}{t^2}-\frac{4}{t}+4+1}} =$$

$$= \int \frac{-\frac{1}{t}\,dt}{\sqrt{\frac{1}{t^2}-\frac{4}{t}+5}} = \int \frac{-\frac{1}{t}\,dt}{\sqrt{\frac{1-4t+5t^2}{t^2}}} = \int \frac{-\frac{1}{t}\,dt}{\frac{\sqrt{5t^2-4t+1}}{t}} =$$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{5t^2-4t+1}}$$

Pero $\int \frac{dt}{\sqrt{5t^2-4t+1}}$ es una integral del tipo ⓐ ⑧.

$$\int \frac{dt}{\sqrt{5t^2-4t+1}} = \int \frac{dt}{\sqrt{5}\sqrt{t^2-\frac{4}{5}t+\frac{1}{5}}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-\frac{4}{5}t+\frac{1}{5}}}$$

Completando cuadrados $t^2-\frac{4}{5}t+\frac{1}{5}$ queda

$$t^2-\frac{4}{5}t+\frac{1}{5} = t^2 - 2\cdot\frac{4}{10}t + \left(\frac{4}{10}\right)^2 - \left(\frac{4}{10}\right)^2 + \frac{1}{5} =$$

$$= t^2 - 2\cdot\frac{2}{5}t + \left(\frac{2}{5}\right)^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{5} =$$

$$= \left(t-\frac{2}{5}\right)^2 - \frac{4}{25} + \frac{1}{5} = \left(t-\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{25}$$

Luego

$$\int \frac{dt}{\sqrt{5t^2-4t+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{dt}{\sqrt{(t-\frac{2}{5})^2+\frac{1}{25}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{dt}{\sqrt{\frac{1}{25}\left[25(t-\frac{2}{5})^2+1\right]}} = \frac{5}{\sqrt{5}} \int \frac{dt}{\sqrt{25(t-\frac{2}{5})^2+1}}$$

Haciendo $25\left(t-\frac{2}{5}\right)^2 = u^2$ y tomando raíces cuadradas

$$5\left(t-\frac{2}{5}\right) = u$$

y diferenciando $5\,dt = du$; $dt = \frac{1}{5}\,du$

Luego

$$\int \frac{dt}{\sqrt{5t^2-4t+1}} = \frac{5}{\sqrt{5}} \int \frac{\frac{1}{5}\,du}{\sqrt{u^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{du}{\sqrt{u^2+1}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \arg sh\, u = \frac{1}{\sqrt{5}} \arg sh \left(5\left(t-\frac{2}{5}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \arg sh\,(5t-2)$$

Pero $t = \frac{1}{x+2}$ luego

$$I = -\int \frac{dt}{\sqrt{5t^2-4t+1}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \arg sh\,(5t-2) + C =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{5}} \arg sh \left(\frac{5}{x+2} - 2\right) + C =$$

$$\boxed{= -\frac{1}{\sqrt{5}} \arg sh \left(\frac{1-2x}{x+2}\right) + C}$$

Nota: Si nosotros tenemos

$$I = \int \sqrt{ax^2+bx+c}\, dx$$

multiplicando y dividiendo por $\sqrt{ax^2+bx+c}$ esta integral se reduce a

$$I = \int \frac{ax^2+bx+c}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx$$

y ésta se resuelve por el método aleman

Ej: $$I = \int \sqrt{2x^2-3}\, dx$$

Entonces multiplicando y dividiendo por $\sqrt{2x^2-3}$ queda

$$I = \int \frac{2x^2-3}{\sqrt{2x^2-3}}\, dx$$

Aplicando el método alemán

$$\frac{2x^2-3}{\sqrt{2x^2-3}} = \frac{d}{dx}\left[(ax+b)\sqrt{2x^2-3}\right] + \frac{A}{\sqrt{2x^2-3}} =$$

$$= a\sqrt{2x^2-3} + (ax+b)\frac{4x}{2\sqrt{2x^2-3}} + \frac{A}{\sqrt{2x^2-3}} =$$

$$= a\sqrt{2x^2-3} + (ax+b)\cdot\frac{2x}{\sqrt{2x^2-3}} + \frac{A}{\sqrt{2x^2-3}}$$

Luego resolviendo el segundo miembro

$$\frac{2x^2-3}{\sqrt{2x^2-3}} = \frac{a(2x^2-3)+2(ax+b)x + A}{\sqrt{2x^2-3}}$$

y de aquí

$$2x^2-3 = a(2x^2-3) + 2(ax+b)x + A$$

es decir

$$2x^2-3 = 2ax^2 - 3a + 2ax^2 + 2bx + A = 4ax^2 + 2bx + A - 3a$$

Identificando coeficientes

$$4a = 2 \longrightarrow \boxed{a = \frac{1}{2}}$$

$$2b = 0 \longrightarrow \boxed{b = 0}$$

$$A - 3a = -3 \Rightarrow A - \frac{3}{2} = -3 \; ; \quad \boxed{A = -3 + 3/2 = -3/2}$$

Luego

$$\frac{2x^2-3}{\sqrt{2x^2-3}} = \frac{d}{dx}\left[1/2\, x \cdot \sqrt{2x^2-3} \right] + \frac{-3/2}{\sqrt{2x^2-3}}$$

Integrando

$$\int \frac{2x^2-3}{\sqrt{2x^2-3}}\, dx = 1/2\, x \sqrt{2x^2-3} - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-3}}$$

Ahora hay que resolver

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3\left(\frac{2}{3}x^2-1\right)}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{3}x^2-1}}$$

Haciendo $\frac{2}{3}x^2 = t^2$, tomando raíces cuadradas

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} x = t,$$

y diferenciando $\sqrt{2}/\sqrt{3}\, dx = dt$; $dx = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} dt$

Luego

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} dt}{\sqrt{t^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arg\,ch} t = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arg\,ch}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} x\right)$$

Luego

$$\boxed{I = \int \frac{2x^2-3}{\sqrt{2x^2-3}} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{2x^2-3} - \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arg\,ch}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} x\right) + C}$$

ⓕ Integrales del tipo

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\, dx$$

donde R es una funcion racional en $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$

Previamente a la discusión de cómo se resuelven este tipo de integrales necesitamos algunas definiciones

Definicion La funcion $R(t, u)$ se dice par t si al sustituir t por $-t$ la expresion no varía, es decir

$$R(t, u) = R(-t, u).$$

Ej: $R(t,u) = \dfrac{t^2 - 3u}{t^4 + 5u}$ entonces cambiando t por $-t$

queda $R(-t,u) = \dfrac{(-t)^2 - 3u}{(-t)^4 + 5u} = \dfrac{t^2 - 3u}{t^4 + 5u} = R(-t,u)$

En este caso $R(t,u)$ es par en t.

Definición La funcion $R(t,u)$ se dice impar en t si al sustituir t por $-t$ la expresión cambia de signo, es decir,

$$R(-t,u) = -R(t,u)$$

Ej: $R(t,u) = \dfrac{t^3 - t}{t^2 + u}$

cambiando t por $-t$ queda

$$R(-t,u) = \frac{(-t)^3-(-t)}{(-t)^2+u} = \frac{-t^3+t}{t^2+u} = -\frac{t^3-t}{t^2+u} =$$

$$= -R(t,u)$$

Luego en este caso se dice que $R(t,u)$ es impar en t.

<u>Definición</u> La función $R(t,u)$ se dice par en t y u si al sustituir t por $-t$ y u por $-u$ la expresión no se altera, es decir

$$R(-t,-u) = R(t,u)$$

Ej: $R(t,u) = \dfrac{t^2+2u^2}{t^4-3u^6}$.

cambiando t por $-t$ y u por $-u$ queda

$$R(-t,-u) = \frac{(-t)^2+2(-u)^2}{(-t)^4-3(-u)^6} = \frac{t^2+2u^2}{t^4-3u^6} = R(t,u)$$

Por tanto, en este caso $R(t,u)$ es par en t y u.

Ej: La función $f(\operatorname{sen} x, \cos x) = \dfrac{\operatorname{sen}^3 x \cos^2 x}{1+\operatorname{sen}^2 x}$ es impar en $\operatorname{sen} x$ porque si cambiamos $\operatorname{sen} x$ por $-\operatorname{sen} x$ queda

$$f(-\operatorname{sen} x, \cos x) = \frac{(-\operatorname{sen} x)^3 \cdot \cos^2 x}{1+(-\operatorname{sen} x)^2} = -\frac{\operatorname{sen}^3 x \cos^2 x}{1+\operatorname{sen}^2 x} =$$

$$= -f(\operatorname{sen} x, \cos x)$$

En cambio, esta función es par en $\cos x$ porque

$$f(\operatorname{sen} x, -\cos x) = \frac{\operatorname{sen}^3 x \ (-\cos x)^2}{1+\operatorname{sen}^2 x} = \frac{\operatorname{sen}^3 x \cdot \cos^2 x}{1+\operatorname{sen}^2 x} = f(\operatorname{sen} x, \cos x)$$

Distingamos varios casos

1) Que $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ es impar en $\operatorname{sen} x$, es decir

$$R(-\operatorname{sen} x, \cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$$

En este caso, se hace el cambio $\cos x = t$

Ejemplo (Examen)

$$I = \int \frac{1}{\operatorname{sen} x \ \cos^2 x} dx$$

En este caso $R(\operatorname{sen} x, \cos x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x \cdot \cos^2 x}$ y observamos

que $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ es impar en $\operatorname{sen} x$ ya que

$$R(-\operatorname{sen} x, \cos x) = \frac{1}{-\operatorname{sen} x \cdot \cos^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sen} x \cdot \cos^2 x} =$$

$$= -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$$

Hagamos el cambio $\cos x = t$, diferenciando $-\operatorname{sen} x \, dx = dt$

es decir, $dx = -\dfrac{1}{\operatorname{sen} x} dt$

Luego $I = \displaystyle\int \frac{-\frac{1}{\operatorname{sen} x} dt}{\operatorname{sen} x \ t^2} dt = -\int \frac{dt}{t^2 \ \operatorname{sen}^2 x} =$

$$= - \int \frac{dt}{t^2 (1 - \cos^2 x)} = - \int \frac{dt}{t^2 (1 - t^2)}$$

Pero $1 - t^2 = -(t^2 - 1)$, luego

$$I = - \int \frac{dt}{t^2 (-(t^2-1))} = \int \frac{dt}{t^2 (t^2 - 1)}$$

y $t^2 - 1 = 0 \Rightarrow t^2 = 1 \Rightarrow t = \pm 1$

Luego

$$I = \int \frac{dt}{t^2 (t+1)(t-1)}$$

es de tipo racional con raices del denominador reales y multiples.

Luego

$$\frac{1}{t^2 (t+1)(t-1)} = \frac{A}{t^2} + \frac{B}{t} + \frac{C}{t+1} + \frac{D}{t-1}$$

Resolviendo el segundo miembro con el minimo común múltiplo queda

$$1 = A(t+1)(t-1) + B\,t(t+1)(t-1) + C\,t^2(t-1) + D\,t^2(t+1)$$

Dandole a $t = 0$ queda

$1 = A(0+1)(0-1) \Rightarrow -A = 1 \Rightarrow \boxed{A = -1}$

Para $t = 1$ queda

$1 = D \cdot 1^2 \cdot 2$; $\boxed{D = \frac{1}{2}}$

Para $t=-1$ queda

$$1 = C\,(-1)^2(-1-1) \Rightarrow \boxed{C=-\tfrac{1}{2}}$$

y por ejemplo para $t=2$ queda

$$1 = -1\,(2+1)(2-1) + B\cdot 2\,(2+1)(2-1) + \left(-\tfrac{1}{2}\right)\cdot 2^2(2-1) + \tfrac{1}{2}\cdot 2^2(2+1)$$

y de aquí

$$1 = -3 + 6B - 2 + 6 \;;$$

$$6B = 0 \Rightarrow \boxed{B=0}$$

luego

$$\frac{1}{t^2(t+1)(t-1)} = \frac{-1}{t^2} + \frac{-1/2}{t+1} + \frac{1/2}{t-1}$$

e integrando

$$I = \int \frac{dt}{t^2(t+1)(t-1)} = -\int t^{-2}\,dt - \tfrac{1}{2}\int \frac{1}{t+1}\,dt + \tfrac{1}{2}\int \frac{dt}{t-1} =$$

$$= -\frac{t^{-1}}{-1} - \frac{1}{2}\ln(t+1) + \tfrac{1}{2}\ln(t-1) =$$

$$= \frac{1}{t} - \tfrac{1}{2}\ln(t+1) + \tfrac{1}{2}\ln(t-1)$$

y como $t = \cos x$

$$\boxed{I = \frac{1}{\cos x} - \frac{1}{2}\ln(\cos x + 1) + \tfrac{1}{2}\ln(\cos x - 1) + C}$$

(2) Que $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ sea impar en $\cos x$, es decir

$$R(\operatorname{sen} x, -\cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$$

En este caso utilizamos el cambio $\operatorname{sen} x = t$

Ej: (Examen)

$$I = \int \frac{dx}{(1+\operatorname{sen} x)\cos x}$$

En este caso $R(\operatorname{sen} x, \cos x) = \frac{1}{(1+\operatorname{sen} x)\cos x}$ y observemos que

$$R(\operatorname{sen} x, -\cos x) = \frac{1}{(1+\operatorname{sen} x)(-\cos x)} = -\frac{1}{(1+\operatorname{sen} x)\cos x} = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$$

Luego es impar en $\cos x$.

Hagamos el cambio $\operatorname{sen} x = t$, entonces $\cos x \, dx = dt$;

$dx = \frac{1}{\cos x} dt$, luego

$$I = \int \frac{\frac{1}{\cos x} dt}{(1+t)\cos x} = \int \frac{dt}{(1+t)\cos^2 x} = \int \frac{dt}{(1+t)(1-\operatorname{sen}^2 x)} =$$

$$= \int \frac{dt}{(1+t)(1-t^2)} = -\int \frac{dt}{(t+1)(t^2-1)} = -\int \frac{dt}{(t+1)^2(t-1)}$$

Ahora bien

$$\frac{1}{(t+1)^2(t-1)} = \frac{A}{(t+1)^2} + \frac{B}{t+1} + \frac{C}{t-1}$$

$$\boxed{I = -\frac{1}{2(\operatorname{sen} x + 1)} + \frac{1}{4}\ln(\operatorname{sen} x + 1) - \frac{1}{4}\ln(\operatorname{sen} x - 1) + C}$$

③ Que $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ sea par en $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$, es decir

$$R(-\operatorname{sen} x, -\cos x) = R(\operatorname{sen} x, \cos x)$$

En este caso utilizaremos el cambio $\operatorname{tg} x = t$

Necesitaremos expresar en función de t. las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$.

En efecto, de

$$t = \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

tenemos $\operatorname{sen} x = t \cos x$ y como $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ queda

$$t^2 \cos^2 x + \cos^2 x = 1$$

y de aquí $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2}$; $\boxed{\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}}$

De $\operatorname{sen} x = t \cos x \Rightarrow \boxed{\operatorname{sen} x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}}$

Ej: $I = \displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1 + \cos^2 x}\, dx$

En este caso, $R(\operatorname{sen} x, \cos x) = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos^2 x}$ y vemos que

$$R(-\operatorname{sen} x, -\cos x) = \frac{(-\operatorname{sen} x)^2}{1+(-\cos x)^2} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos^2 x} = R(\operatorname{sen} x, \cos x)$$

Luego $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ es par en $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$.

Hacemos el cambio $\operatorname{tg} x = t$ y teniendo en cuenta que en este caso, $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ y $\operatorname{sen} x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ queda

$$I = \int \frac{\frac{t^2}{1+t^2}}{1+\frac{1}{1+t^2}}\, dt = \int \frac{t^2}{t^2+2}\, dt =$$

sumo y resto 2

$$= \int \left(\frac{t^2+2-2}{t^2+2} \right) dt = \int \frac{t^2+2}{t^2+2}\, dt - \int \frac{2}{t^2+2}\, dt =$$

$$= \int dt - 2\int \frac{dt}{t^2+2} = t - 2\int \frac{dt}{2+t^2}$$

Si $I_1 = \displaystyle\int \frac{dt}{2+t^2} = \int \frac{dt}{2(1+t^2/2)} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t^2/2}$

y haciendo $\dfrac{t^2}{2} = u^2$, de aquí $\frac{1}{2} t = u$ y diferenciando

$\frac{1}{2}\, dt = du$, es decir, $dt = 2\, du$

Luego $I_1 = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int \frac{2\, du}{1+u^2} = \int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{arctg} u = \operatorname{arctg}(\tfrac{1}{2} t)$

Por tanto,

$$I = t - 2\cdot \operatorname{arctg}(\tfrac{1}{2} t) + C$$

y como $t = \operatorname{tg} x$

$$\boxed{I = \operatorname{tg} x - 2 \operatorname{arctg}(\tfrac{1}{2} \operatorname{tg} x) + C}$$

4) Si $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ no es impar en $\operatorname{sen} x$ ni en $\cos x$ y no es par en $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ (es decir, no estamos en ninguno de los tres casos anteriores) se recurre al cambio general

$$\operatorname{tg} x/2 = t$$

En este caso, tendremos que expresar en función de t, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ y dx

De $\operatorname{tg} x/2 = t$, sale $x/2 = \operatorname{arctg} t$ es decir

$x = 2 \operatorname{arctg} t$ y diferenciando

$$\boxed{dx = \frac{2}{1+t^2} dt}$$

Por otra parte, utilizando que $\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$
$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$

queda

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 2 \cdot x/2 = 2 \operatorname{sen} x/2 \cdot \cos x/2 = \frac{2 \operatorname{sen} x/2 \cos x/2}{\operatorname{sen}^2 x/2 + \cos^2 x/2}$$

Dividiendo numerador y denominador por $\cos^2 x/2$ queda

$$\boxed{\operatorname{sen} x = \frac{2 \operatorname{tg} x/2}{\operatorname{tg}^2 x/2 + 1} = \frac{2t}{1+t^2}}$$

Análogamente,

$$\cos x = \cos 2 \cdot x/2 = \cos^2 x/2 - \operatorname{sen}^2 x/2 = \frac{\cos^2 x/2 - \operatorname{sen}^2 x/2}{\cos^2 x/2 + \operatorname{sen}^2 x/2}$$

y dividiendo numerador y denominador por $\cos^2 x/2$ queda

$$\boxed{\cos x = \frac{1 - tg^2 x/2}{1 + tg^2 x/2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

Ej: (Examen)

$$I = \int \frac{dx}{3+\cos x}$$

En este caso, $R(\operatorname{sen} x, \cos x) = \dfrac{1}{3+\cos x}$ que no es impar ni en $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$, en $\operatorname{sen} x$ ni en $\cos x$ y además no es par

por tanto, aplicaremos el cambio

$$tg\ x/2 = t$$

Teniendo en cuenta las fórmulas anteriores queda

$$I = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}\,dt}{3+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2}{4+2t^2}\,dt =$$

$$= \int \frac{dt}{2+t^2}$$

La integral $\int \frac{dt}{2+t^2}$ está hecha en el ejemplo del caso anterior y sale $I = \int \frac{dt}{2+t^2} = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}t\right) + C$

Luego como $t = tg\, x/2$ queda

$$\boxed{I = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\, tg\, x/2\right) + C}$$

(g) Integración de productos de senos y cosenos de distintos ángulos

En este caso, estudiaremos integrales del tipo

$$\int sen\,\alpha x \cdot sen\,\beta x\, dx \;;\; \int sen\,\alpha x \cdot \cos\beta x\, dx \;;\; \int \cos\alpha x \cdot \cos\beta x\, dx$$

Para resolver este tipo de integrales, recordar que (ver caso (a)(3))

que $\int sen\,\alpha x\, dx = -\frac{1}{\alpha}\cos\alpha x \;;\; \int \cos\alpha x\, dx = \frac{1}{\alpha}\, sen\,\alpha x$.

Luego, ahora transformamos los productos de senos y cosenos en suma.

Recordar que

$$sen(\alpha+\beta) = sen\,\alpha\cos\beta + \cos\alpha\, sen\,\beta$$
$$sen(\alpha-\beta) = sen\,\alpha\cos\beta - \cos\alpha\, sen\,\beta$$

Sumando (+) : $sen(\alpha+\beta) + sen(\alpha-\beta) = 2\, sen\,\alpha\cos\beta$ y de aquí

$$sen\,\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[sen(\alpha+\beta) + sen(\alpha-\beta)\right]$$

Luego

$$\int sen\,\alpha x \cdot \cos\beta x\, dx = \frac{1}{2}\int\left(sen(\alpha+\beta)x + sen(\alpha-\beta)x\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int sen[(\alpha+\beta)x]\, dx + \int sen[(\alpha-\beta)x]\, dx\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{\alpha+\beta}\cos[(\alpha+\beta)x] - \frac{1}{\alpha-\beta}\cos[(\alpha-\beta)x]\right] + C$$

Por otra parte, de

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$$

$(+)$ $\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$ y de aquí $\boxed{\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]}$

$(-)$ $\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$ y de aquí $\boxed{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = -\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right]}$

Ej:

$$I = \int \operatorname{sen} 5x \cdot \cos 7x \, dx$$

Como $\operatorname{sen} 5x \cdot \cos 7x = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen} 12x + \operatorname{sen}(-2x)\right]$, resultará que

$$I = \frac{1}{2}\left[\int \operatorname{sen} 12x \, dx + \int \operatorname{sen}(-2x)\, dx\right] = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{12}\cos 12x - \frac{1}{-2}\cos(-2x)\right]$$

y, de aquí,

$$\boxed{I = -\frac{1}{24}\cos 12x + \frac{1}{12}\cos(-2x) + C}$$

(h) Integrales del tipo $\int R(x, \sqrt{a+bx^2})\,dx$, donde R es una función racional.

En este caso, la "a" se convierte en "1" por la técnica clásica y teniendo en cuenta que

$$1 + tg^2\alpha = sec^2\alpha$$

se hace el cambio, "elemento cuadrático" $= tg^2 t$

Ej.:

$$I = \int \frac{\sqrt{2+x^2}}{x}\,dx$$

Entonces

$$I = \int \frac{\sqrt{2}\sqrt{1+\frac{x^2}{2}}}{x}\,dx = \sqrt{2}\int \frac{\sqrt{1+\frac{x^2}{2}}}{x}\,dx$$

Hacemos $\frac{x^2}{2} = tg^2 t$, tomando raíces cuadradas

$$\frac{x}{\sqrt{2}} = tg\,t \quad \text{y de aquí} \quad x = \sqrt{2}\,tg\,t$$

Diferenciando

$$dx = \sqrt{2}\,sec^2 t\,dt. \text{ Luego}$$

$$I = \sqrt{2}\int \frac{\sqrt{1+tg^2 t}}{\sqrt{2}\,tg\,t}\cdot\sqrt{2}\,sec^2 t\,dt =$$

$$I = \sqrt{2}\int \frac{\sqrt{sec^2 t}}{tg\,t}\cdot sec^2 t\,dt = \sqrt{2}\int \frac{sec^3 t}{tg\,t}\,dt =$$

$$= \sqrt{2}\int \frac{1}{sen\,t\,\cos^2 t}\,dt$$

Como $R(\operatorname{sen} t, \cos^2 t)$ es impar en $\operatorname{sen} t$, hacemos el cambio

$$\cos t = u$$

$$-\operatorname{sen} t \, dt = du \quad ; \quad dt = -\frac{1}{\operatorname{sen} t} du$$

Luego

$$I = \sqrt{2} \int \frac{-\frac{1}{\operatorname{sen} t} du}{\operatorname{sen} t \cdot u^2} = -\sqrt{2} \int \frac{du}{\operatorname{sen}^2 t \; u^2} =$$

$$= -\sqrt{2} \int \frac{du}{u^2 (1-\cos^2 t)} = -\sqrt{2} \int \frac{du}{u^2 (1-u^2)} =$$

$$= \sqrt{2} \int \frac{du}{u^2 (u^2-1)} = \sqrt{2} \int \frac{du}{u^2 (u+1)(u-1)}$$

y $\int \frac{du}{u^2 (u+1)(u-1)}$ está hecha en f) apartado 1, ejemplo, y sale

$$\int \frac{du}{u^2 (u+1)(u-1)} = \frac{1}{u} - \frac{1}{2} \ln(u+1) + \frac{1}{2} \ln(u-1)$$

Luego

$$I = \frac{\sqrt{2}}{u} - \frac{\sqrt{2}}{2} \ln(u+1) + \frac{\sqrt{2}}{2} \ln(u-1) + c \quad \text{y como } u = \cos t$$

$$I = \frac{\sqrt{2}}{\cos t} - \frac{\sqrt{2}}{2} \ln(\cos t + 1) + \frac{\sqrt{2}}{2} \ln(\cos t - 1) + c$$

y como $\frac{x}{\sqrt{2}} = \operatorname{tg} t$ de aquí $t = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$

Luego

$$I = \frac{\sqrt{2}}{\cos\left(\operatorname{arctg}\left(x/\sqrt{2}\right)\right)} - \frac{\sqrt{2}}{2} \ln\left(\cos\left(\operatorname{arctg}\left(x/\sqrt{2}\right)\right)+1\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot$$

$$\cdot \ln\left(\cos\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right) - 1\right) + C$$

(i) Integrales del tipo $\int R(x, \sqrt{a-bx^2})\, dx$, donde R es una función racional.

En este caso, la "a" se convierte en "1" por la técnica habitual y, teniendo en cuenta que

$$1 - \operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x$$

se hace el cambio: "elemento cuadrático" $= \operatorname{sen}^2 t$

Ej: (Examen)

$$I = \int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\, dx$$

$$I = \int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\, dx = \int \frac{2\sqrt{1-x^2/2}}{x}\, dx.$$

Haciendo $\frac{x^2}{2} = \operatorname{sen}^2 t$, tomando raíces cuadradas

$$\frac{x}{\sqrt{2}} = \operatorname{sen} t$$ y de aquí $x = \sqrt{2}\operatorname{sen} t$

Luego diferenciando $dx = \sqrt{2}\cos t\, dt$

Por tanto,

$$I = 2 \int \frac{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}}{\sqrt{2}\ \operatorname{sen} t} \cdot \sqrt{2} \cos t \, dt =$$

$$= 2 \int \frac{\sqrt{\cos^2 t} \cdot \cos t \, dt}{\operatorname{sen} t} = 2 \int \frac{\cos^2 t}{\operatorname{sen} t} dt$$

En este caso, $R(\operatorname{sen} t, \cos t) = \frac{\cos^2 t}{\operatorname{sen} t}$ es impar en $\operatorname{sen} t$, luego

hacemos el cambio $\cos t = u$, diferenciando

$$-\operatorname{sen} t \, dt = du \ ; \quad dt = -\frac{1}{\operatorname{sen} t} du$$

Luego

$$I = 2 \int \frac{u^2 \cdot \left(-\frac{1}{\operatorname{sen} t}\right) du}{\operatorname{sen} t} =$$

$$= -2 \int \frac{u^2}{\operatorname{sen}^2 t} du = -2 \int \frac{u^2}{1-\cos^2 t} du =$$

$$= -2 \int \frac{u^2}{1-u^2} du = 2 \int \frac{u^2}{u^2-1} du \underset{\text{restando y sumando 1}}{=}$$

$$= 2 \int \frac{u^2-1+1}{u^2-1} du = 2 \left[\int \frac{u^2-1}{u^2-1} du + \int \frac{1}{u^2-1} du \right] =$$

$$= 2 \left[\int du + \operatorname{argth} u \right] = 2u + 2 \operatorname{argth} u + C$$

Como $\cos t = u$ y $\frac{x}{\sqrt{2}} = \operatorname{sen} t$, es decir $t = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$

queda $\quad u = \cos\left(\text{arc sen } \frac{x}{\sqrt{2}}\right)$ y, por tanto,

$$\boxed{I = 2\cos\left(\text{arc sen } \frac{x}{\sqrt{2}}\right) + 2 \,\text{argth}\left[\cos\left(\text{arc sen } \frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right] + C}$$