EXAMEN ESPECIAL noviembre 2015

Apellidos	Nombre	Firma
1º 2º		

1. Comprobar que los vectores $(1, 2, -1, 1)$, $(0, 1, 0, -1)$, $(2, 1, -2, 5)$ son linealmente dependientes y hallar las ecuaciones cartesianas del subespacio vectorial que generan.

2. Estudiar el crecimiento e indicar los puntos extremos, si los hay, de la curva $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$

3. Estudiar la diagonalización de la matriz $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ para los distintos valores del número real a.

4. Hallar el área limitada por la curva $f(x) = x^3\sqrt{x^2+1}$ y el eje de abscisas en el intervalo $[-1, +1]$.

5. Hallar el volumen comprendido entre el paraboloide $z = 1 - \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4}$ y el plano XOY.

6. Hallar la longitud de la curva $\rho = a \operatorname{sen}^3\left(\dfrac{t}{3}\right)$ (Aplicar $L = \displaystyle\int_0^{3\pi} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} dt$).

[1]

[1]Los ejercicios 1, 2, 3 y 5 se califican sobre 1,5 puntos; el 4 y el 6 sobre 2.

RESPUESTAS:

1. *Comprobar que los vectores* $(1,2,-1,1),\ (0,1,0,-1),\ (2,1,-2,5)$ *son linealmente dependientes y hallar las ecuaciones cartesianas del subespacio vectorial que generan.*

   El número de vectores independientes coincide con el rango de la matriz formada por estos vectores:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \equiv \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 2F_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + 3F_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow rango(A) = 2$$

   por lo que sólo los dos primeros vectores son linealmente independientes y por lo tanto dim(L) = 2. En consecuencia, sólo dos ecuaciones cartesianas (dim R^4 – dim L = 4 – 2) definen este subespacio:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x_1 + x_3 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ x_1 & x_2 & x_4 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -3x_1 + x_2 + x_4 = 0$$

2. *Estudiar el crecimiento e indicar los puntos extremos, si los hay, de la curva* $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$

   Puesto que el radicando es positivo para todo valor de x, el dominio de esta función es $\mathcal{R}$.

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - (x-1)\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{x^2+1-x^2+x}{\sqrt{(x^2+1)^3}} = 0 \rightarrow x = -1$$

Como el denominador es positivo $\forall x \in \mathcal{R}$, el signo de la derivada depende de $1+x$. Luego:

$x < -1 \rightarrow 1+x < 0 \rightarrow f'(x) < 0$ y la curva es decreciente;

$x > -1 \rightarrow 1+x > 0 \rightarrow f'(x) > 0$ y la curva es creciente.

En resumen: la curva es decreciente en el intervalo $]-\infty, -1[$ y creciente en $]-1, +\infty[$ por lo que posee un mínimo en el punto $(-1, -\sqrt{2})$.

3. *Estudiar la diagonalización de la matriz* $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ *para los distintos valores del número real* a.

Ecuación característica:

$|C - \lambda I| = (1-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) = 0 \rightarrow \lambda = 2,\ \lambda = 1(\alpha = 2)$

Para $\lambda = 1$ es $orden(C) - \alpha = 3 - 2 = 1$ mientras que

$rango(C - I) = rango \begin{pmatrix} 0 & 3 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \iff a = 0$ por lo que la matriz C es diagonalizable si y sólo si $a = 0$.

4. *Hallar el área limitada por la curva* $f(x) = x^3\sqrt{x^2+1}$ *y el eje de abscisas en el intervalo* $[-1, +1]$.

Puesto que la curva es simétrica con respecto al origen debido a la potencia impar de x, el área en el intervalo $[-1, +1]$ es el doble que el área en el intervalo $[0, +1]$: $A = 2\int_0^1 f(x)dx = 2\int_0^1 x^3\sqrt{x^2+1}\,dx$.

Con objeto de eliminar la raíz, hacemos el cambio de variable

$x^2+1 = t^2 \rightarrow x = \sqrt{t^2-1} \rightarrow dx = \dfrac{t}{\sqrt{t^2-1}}dt$ siendo los nuevos límites de integración $x = 0 \to t = 1$, $x = 1 \to t = \sqrt{2}$. En consecuencia,

$$\int_0^1 x^3\sqrt{x^2+1}\,dx = \int_1^{\sqrt{2}} \left(\sqrt{t^2-1}\right)^3 t\ \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}dt$$
$$= \int_1^{\sqrt{2}} (t^2-1)t^2\,dt = \int_1^{\sqrt{2}} (t^4-t^2)dt = \left[\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right]_1^{\sqrt{2}}$$
$$= \left(\frac{4\sqrt{2}}{5} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{15}\left(\sqrt{2}+1\right)$$

Luego, el área solicitada es $A = \dfrac{4}{15}\left(\sqrt{2}+1\right)$

5. *Hallar el volumen comprendido entre el paraboloide* $z = 1 - \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4}$ *y el plano XOY.*

   El volumen de este cuerpo se calcula mediante la integral doble $V = \displaystyle\iint_D z\,dxdy$ siendo D el recinto limitado por la proyección de la cuádrica sobre el plano $z = 0$, que es la elipse $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$. Esto sugiere un cambio de coordenadas cartesianas a coordenadas elípticas: $x = 3\rho\cos t,\ y = 2\rho \operatorname{sen} t$ siendo el jacobiano $J = ab\rho = 6\rho$ y las nuevas variables $0 \le \rho \le 1$, $0 \le t \le 2\pi$. Además, $z = 1 - \left(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}\right) = 1 - \rho^2$. Por tanto
   $V = \displaystyle\int_0^1\int_0^{2\pi} (1-\rho^2)6\rho\,d\rho dt = 6\left[\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 [t]_0^{2\pi} = 6\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)2\pi = 3\pi$

6. *Hallar la longitud de la curva* $\rho = a \operatorname{sen}^3\left(\dfrac{t}{3}\right)$
   (Aplicar $L = \displaystyle\int_0^{3\pi} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}dt$*).*

   Esta curva recibe el nombre de séxtica de Cayley y su forma es la que se indica en la Figura 1:

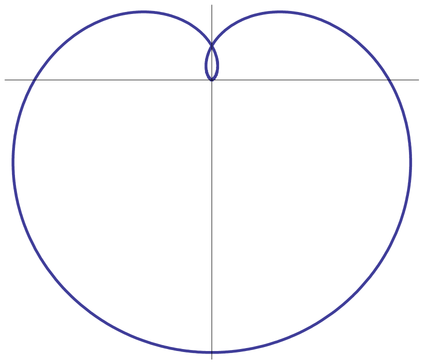

Figura 1: Séxtica de Cayley

La función se repite en el intervalo $[0, 3\pi]$ por lo que éstos serán los límites de integración.

$$\begin{aligned}
\rho' &= 3a\,\text{sen}^2\left(\frac{t}{3}\right)\cos\left(\frac{t}{3}\right)\frac{1}{3} = a\,\text{sen}^2\left(\frac{t}{3}\right)\cos\left(\frac{t}{3}\right) \\
\rho^2+\rho'^2 &= a^2\,\text{sen}^6\left(\frac{t}{3}\right) + a^2\,\text{sen}^4\left(\frac{t}{3}\right)\cos^2\left(\frac{t}{3}\right) = a^2\,\text{sen}^4\left(\frac{t}{3}\right) \\
L &= \int_0^{3\pi}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}dt = \int_0^{3\pi} a\,\text{sen}^2\left(\frac{t}{3}\right)dt \\
&= \frac{a}{2}\int_0^{3\pi}\left(1-\cos\left(\frac{2t}{3}\right)\right)dt = \frac{a}{2}\left[t - \frac{3}{2}\,\text{sen}\left(\frac{2t}{3}\right)\right]_0^{3\pi} \\
&= \frac{3\pi}{2}a
\end{aligned}$$