3. ESPACIOS VECTORIALES Y APLICACIONES LINEALES

PROBLEMAS RESUELTOS

1.- Sean en $\mathbb{R}^4$ **los vectores** $\overline{u} = (2,3,2,5),\ \overline{v} = (1,-2,4,0),\ \overline{w} = (1,1,10/7,m)$**. Calcular el valor de** m **para que** $\overline{w}$ **pertenezca al subespacio engendrado por** $\overline{u}$ **y** $\overline{v}$ **.**

SOLUCIÓN:

Para que el vector $\overline{w}$ pertenezca al subespacio generado por $\overline{u}$ y $\overline{v}$ es necesario que existan dos escalares α y β que cumplan lo siguiente:

$$\overline{w} = \alpha\overline{u} + \beta\overline{v} = \alpha(2,3,2,5) + \beta(1,-2,4,0) = (2\alpha+\beta, 3\alpha-2\beta, 2\alpha+4\beta, 5\alpha)$$
.

Es decir, se tiene que dar la siguiente igualdad:

$(1,1,10/7,m) = (2\alpha+\beta, 3\alpha-2\beta, 2\alpha+4\beta, 5\alpha)$.

Sabemos que dos vectores son iguales si coinciden componente a componente, de donde obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{ccc} 2\alpha+\beta & = & 1 \\ 3\alpha-2\beta & = & 1 \\ 2\alpha+4\beta & = & 10/7 \\ 5\alpha & = & m \end{array}\right\}$$ si multiplicamos la primera ecuación por 2 y se la sumamos a la 2^o ecuación, obtenemos que: $7\alpha = 3 \Rightarrow \alpha = \dfrac{3}{7}$ y de aquí ya obtenemos, despejando por ejemplo de la 1^o ecuación que

$\beta = 1 - \frac{6}{7} = \frac{1}{7}$. Sólo hemos utilizado las dos primeras ecuaciones, veamos que estos valores de α y β también sastisfacen la 3^a ecuación:

$2.\frac{3}{7} + 4.\frac{1}{7} = \frac{10}{7}$, luego, efectivamente, sí se cumple. Por último como también se tiene que cumplir la 4^o ecuación $5.\frac{3}{7} = m \Rightarrow m = \frac{15}{7}$.

2.- Sea la aplicación lineal $f \ :\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z) = x - y - 2z$. Calcular el núcleo de f .

SOLUCIÓN:

$$Ker(f) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / f(x,y,z) = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x - y - 2z = 0 \right\} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = y + 2z \right\}$$

$$= \{ (y+2z, y, z) / \ y,z \in \mathbb{R} \} = \left\langle (1,1,0), (2,0,1) \right\rangle$$

3.- Sea f la aplicación lineal de matriz asociada $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Hallar la dimensión de $Im(f)$.

SOLUCIÓN:

Sabemos que $\dim(Im(f)) = rang(A) = rang \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$

4.- En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se considera el subespacio

$V = \langle (1,1,a),(1,a,1),(a,1,1) \rangle$. **Razonar para qué valores de** a **se tiene que** $\dim(V)=2.$

SOLUCIÓN:

Estudiar la $\dim(V)$ es equivalente a estudiar el rango de la matriz cuyas columnas son los vectores de V. Sea esta matriz la siguiente:

$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Una condición necesaria, aunque no suficiente para que $\dim V=2$ es que $|A|=0.$ Si desarrollamos este determinante obtenemos que: $|A|=0 \Longleftrightarrow (a-1)^2(a+2)=0 \Longleftrightarrow a=1$ ó $a=-2.$

5.- ¿Cual de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ **no es subespacio vectorial?**

a) $L_1=\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \ / \ \begin{matrix} x_1=x_2 \\ x_2=2x_3 \end{matrix}\right\}$

b) $L_1=\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \ / \ \begin{matrix} x_1-x_2=0 \\ x_2-x_3=0 \end{matrix}\right\}$

c) $L_3=\left\{(4s,s,s)\in\mathbb{R}^3 \ / \ s\in R\right\}$

d) $L_4=\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \ / \ x_1-x_2=1\right\}$

SOLUCIÓN:

Para que un subconjunto sea subespacio vectorial debe cumplir que la suma de dos elementos de el también pertenezca al subconjunto y que al multiplicar un elemento de el por un escalar también siga perteneciendo al subconjunto, es decir:

$i)\ \overline{x}+\overline{y}\in L_1,\ \forall\ \overline{x},\overline{y}\in L_1$

$ii)\ k\overline{x}\in L_1,\ \forall\ \overline{x}\in L_1, \forall\ k\in\mathbb{R}$

a) Si es un subespacio vectorial:

$$i)\ \overline{x},\overline{y}\in L_1 \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x_1=x_2 \\ x_2=2x_3 \\ y_1=y_2 \\ y_2=2y_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x_1+y_1=x_2+y_2 \\ x_2+y_2=2(x_3+y_3) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)\in L_1 \Rightarrow \overline{x}+\overline{y}\in L_1.$$

$$ii)\ \overline{x}\in L_1 \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x_1=x_2 \\ x_2=x_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} kx_1=kx_2 \\ kx_2=2kx_3 \end{array}\right\} \Rightarrow (kx_1, kx_2, kx_3)\in L_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k\overline{x}\in L_1$$

b) Si es un subespacio vectorial:

$$i)\ \overline{x},\overline{y}\in L_1 \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x_1-x_2=0 \\ x_2-x_3=0 \\ y_1-y_2=0 \\ y_2-y_3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} (x_1+y_1)-(x_2+y_2)=0 \\ (x_2+y_2)-(x_3+y_3)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)\in L_1 \Rightarrow \overline{x}+\overline{y}\in L_1.$$

$$ii)\ \overline{x}\in L_1 \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x_1-x_2=0 \\ x_2-x_3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} k(x_1-x_2)=0 \\ k(x_2-x_3)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} kx_1-kx_2=0 \\ kx_2-kx_3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow (kx_1, kx_2, kx_3)\in L_1 \Rightarrow k\overline{x}\in L_1.$$

c) Si es un subespacio vectorial:

$i)\ \overline{x},\overline{y}\in L_1 \Rightarrow \left.\begin{matrix}\overline{x}=(4s,s,s)\\ \overline{y}=(4t,t,t)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \overline{x}+\overline{y}=(4(s+t),s+t,s+t) \Rightarrow \overline{x}+\overline{y}\in L_1.$

$ii)\ \overline{x}\in L_1 \Rightarrow \overline{x}=(4s,s,s) \Rightarrow k\overline{x}=(4ks,ks,ks) \Rightarrow k\overline{x}\in L_1.$

d) No es subespacio vectorial ya que incumple las dos propiedades (Nota: deja de ser subespacio vectorial desde que incumpla una de ellas). Veamos que no cumple la segunda.

$\overline{x}=(4,3,0)\in L_1$ y sin embargo $5\overline{x}=(20,15,0)\notin L_1$ ya que $20-15=5\neq 1.$

6.- Sea la aplicación lineal $g:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ **definida por**

$g(x,y,z)=(-x+2y+z,x+z)$**,**

calcular una base de su núcleo.

SOLUCIÓN:

Por definición sabemos que el $Ker(g)$ está formado por los vectores de $\mathbb{R}^3$ cuya imagen mediante g es el vector $\overline{0}\in\mathbb{R}^2$. Es decir:

$$Ker(g)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\ g(x,y,z)=(0,0)\right\}=$$

$$=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/(-x+2y+z,x+z)=(0,0)\right\}=$$

$$=\left\{(x,y,z)\in R^3/\left.\begin{matrix}-x+2y+z=0\\ x+z=0\end{matrix}\right\}\right\}=$$

$$=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\ x=-z \quad \text{y} \quad y=-z\right\}=$$

$$=\{(-z,-z,z)\in\mathbb{R}^3,\ \forall z\in R\}=\left\langle(-1,-1,1)\right\rangle=\left\langle(1,1,-1)\right\rangle$$

7.- Sea la aplicación lineal $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por la matriz

$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ **. Estudiar si se trata de una aplicación inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.**

SOLUCIÓN:

En primer lugar estudiamos el rango de la matriz A que nos dará la dimensión de la Imagen de f .

$$rang(A) = rang\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \overset{(oper.elemen.)}{=} rang\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \dim(Im(f)) = 2$, para que fuera sobreyectiva tendría que suceder que $\dim(Im(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3,$ es decir, la dimensión de $Im(f)$ tiene que coincidir con la del espacio de llegada, $\mathbb{R}^3$ que es 3. Por lo tanto, ya podemos concluir que la aplicación no es sobreyectiva, porque

$\dim(Im(f)) = 2 \neq \dim(\mathbb{R}^3) = 3$.

Al no ser sobreyectiva, tampoco puede ser biyectiva la aplicación.

La dimensión del Núcleo de f la podemos obtener de la fórmula:

$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(Ker(f)) + \dim(Im(f)),$

como la dimensión de $Im(f)$ es 2 y la dimensión de $\mathbb{R}^3$ es 3, concluimos que $\dim(Ker(f)) = 1.$ Este resultado nos indica que f tampoco es inyectiva, pues para ello tendría que suceder que $\dim(Ker(f)) = 0$.

8.- Dados los subespacios vectoriales de R^3 definidos por $H = \langle (1,1,1),(1,2,1) \rangle$ y $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ x = z\}$ calcular la dimensión de $S \cap H$.

SOLUCIÓN:

Sabemos que se cumple la siguiente relación:

$\dim(H+S) = \dim H + \dim S - \dim(H \cap S)$

Tenemos que H está generado por dos vectores que son linealmente independientes, por lo tanto, $\dim H = 2$, por otro lado, se tiene que

$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = z\} \overset{(*)}{=} \{(x,y,x), \forall x,y \in R\} = \langle (1,0,1),(0,1,0) \rangle$, es decir, S también está generado por dos vectores linealmente independientes, por lo que $\dim S = 2.$

$(*) NOTA$: En las ecuaciones de S sólo aparecen las coordenadas x y z . Un error generalizado entre los alumnos es el pensar , en este caso, que la coordenada $y = 0$. En caso de que eso sucediera vendría especificado como una ecuación más de las de S .

Sabiendo que el subespacio $H+S$ está generado por los vectores que generan a H junto con los vectores que generan a S, entonces se tiene que si colocamos esos vectores como columnas de una matriz:

$$\dim(H+S) = rang\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = rang\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Sustituyendo estos datos en la fórmula de las dimensiones, tenemos que: $2 = 2 + 2 - \dim(H \cap S)$, es decir: $\dim(H \cap S) = 2.$

9.- Sea $f:\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por:

$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_2+2x_3+2x_4, x_1+x_2+3x_3+2x_4, 2x_1+2x_2+6x_3+4x_4).$

Calcular la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas.

SOLUCIÓN:

La base canónica de $\mathbb{R}^4$ es $\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$.

Veamos cuáles son sus imágenes mediante la aplicacion f.

$f(1,0,0,0)=(0,1,2);$ $\quad f(0,1,0,0)=(1,1,2);$

$f(0,0,1,0)=(2,3,6);$ $\quad f(0,0,0,1)=(2,2,4)$

por lo tanto, la matriz asociada a f en las bases canónicas es aquella cuyas columnas son las imágenes de los vectores de la base:

$$A=\begin{pmatrix} f(1,0,0,0) & f(0,1,0,0) & f(0,0,1,0) & f(0,0,0,1)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

10.- Calcular la dimensión del núcleo de la aplicación lineal cuya matriz asociada es:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

SOLUCIÓN:

Como la matriz A es de orde $3x5$, entonces la aplicación lineal será $f:\mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Sabemos que:

$$\dim(R^5) = \dim(Ker(f)) + \dim(Im(f))$$

Por otro lado sabemos que:

$$\dim(Im(f)) = rang(A) = rang\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \overset{(oper.elem.)}{=}$$

$$\overset{(oper.elem.)}{=} rang\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Luego: $5 = \dim(Ker(f)) + 2 \Rightarrow \dim(Ker(f)) = 3$

11.- Estudiar para qué valores de a y b los vectores $(3,0,a,-1),(1,1,0,b)$ y $(2,5,b,-4)$ de $\mathbb{R}^4$ son linealmente dependientes.

SOLUCIÓN:

Para que sean linealmente independientes la matriz que definen tiene que tener rango 3.

Dicha matriz es $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ a & 0 & b \\ -1 & b & -4 \end{pmatrix}$. Realizando transformaciones elementales obtenemos la siguiente forma escalonada reducida de A: $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & 3b+3a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Como el rango de una matriz y el de cualquiera de sus formas escalonadas reducidas coincide, tenemos que $rang(A) = 2$, si y sólo si $3b + 3a = 0,$ es decir, si y sólo si $a = -b.$

12.- Para la aplicación $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ **la aplicación lineal definida por:**

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 + 2x_3 + 2x_4, x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4, 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 4x_4)$$

calcular unas ecuaciones del subespacio $Im(f)$ **.**

SOLUCIÓN:

$$Im(f) = \left\{ \overline{y} \in R^3 / \exists \overline{x} \in \mathbb{R}^4 : f\left(\overline{x}\right) = \overline{y} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} \overline{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 / \exists \ \overline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \\ (x_2 + 2x_3 + 2x_4, x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4, 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 4x_4) \\ = \left(y_1, y_2, y_3\right) \end{array} \right.$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} \left(y_1, y_2, y_3\right) \in \mathbb{R}^3 / \exists \left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) \in \mathbb{R}^4 : \\ \left. \begin{array}{rcl} x_2 + 2x_3 + 2x_4 & = & y_1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 & = & y_2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 4x_4 & = & y_3 \end{array} \right\} \end{array} \right\} \overset{(1)}{=}$$

NOTA: La matriz del sistema es $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

$$Rang(A) = rang\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$ y la matriz ampliada viene dada por

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & | \, y_1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & | \, y_2 \\ 2 & 2 & 6 & 4 & | \, y_3 \end{pmatrix},$$

$$rang(A^*) = rang\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & y_1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_3 - 2y_2 \end{pmatrix}$$

El sistema será compatible cuando $rang(A) = rang(A^*) = 2$ y eso sólo ocurre cuando $y_3 - 2y_2 = 0$ por lo que se obtiene que:

−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−

$$\overset{(1)}{=} \left\{ \left(y_1, y_2, y_3 \right) \in \mathbb{R}^3 / y_3 - 2y_2 = 0 \right\}$$

13.- Calcular una base para el núcleo de la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ **definida por:**

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 + 2x_3 + 2x_4, x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4, 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 4x_4)$$

SOLUCIÓN:

$$Ker(f) = \left\{ \left(x_1, x_2, x_3, x_4 \right) \in \mathbb{R}^4 / f\left(\left(x_1, x_2, x_3, x_4 \right) \right) = \left(0,0,0 \right) \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} \left(x_1, x_2, x_3, x_4 \right) \in \mathbb{R}^4 / \\ (x_2 + 2x_3 + 2x_4, x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4, 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 4x_4) = \\ = \left(0,0,0 \right) \end{array} \right\} =$$

$$=\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4/\ \begin{array}{rcl} x_2+2x_3+2x_4 & = & 0\\ x_1+x_2+3x_3+2x_4 & = & 0\\ 2x_1+2x_2+6x_3+4x_4 & = & 0\end{array}\right\}=$$

$$=\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4/\ \begin{array}{rcl} x_1 \qquad +x_3 & = & 0\\ x_2+\ \ 2x_3+2x_4 & = & 0\end{array}\right\}=$$

$$=\left\langle(-1,-2,1,0),(0,-2,0,1)\right\rangle=$$

$$=\left\langle(1,2,-1,0),(0,2,0,-1)\right\rangle.$$

14.- Consideremos los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$: $L=\left\langle(-1,0,2),(0,1,0)\right\rangle$ **y** $M=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/x=y\right\}$. **Estudiar cuándo el vector $\overline{x}=(a,-1,2)$ pertenece al subespacio $L\cap M$.**

SOLUCIÓN:

Si $a=-1$

Entonces $\overline{x}=(-1,-1,2)$, cumple que como sus dos primeras componentes coinciden entonces $\overline{x}\in M$, veamos si $\overline{x}\in L$. Para ello tendríamos que encontrar $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tal que: $\overline{x}=\alpha(-1,0,2)+\beta(0,1,0)\Rightarrow$

$\Rightarrow(-1,-1,2)=(-\alpha,0,2\alpha)+(0,\beta,0)=(-\alpha,\beta,2\alpha)\Rightarrow$

$\Rightarrow(-1,-1,2)=(-\alpha,\beta,2\alpha)\Rightarrow\alpha=1\quad y\quad\beta=-1$, es decir $\overline{x}\in L.$

Obtenemos que $\overline{x}\in L\cap M$.

15.- Dados los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$:

$L=\left\langle(1,0,2,0),(-1,2,1,1),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\right\rangle$ **y**

$S=\{(x,y,z,t)/x-y=0\}$. **Se pide la dimensión de** $L\cap S$ **.**

SOLUCIÓN:

Tenemos que $S=\{(x,y,z,t)/x-y=0\}=\{(x,x,z,t)/x,z,t\in\mathbb{R}\}=$

$=\langle(1,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\rangle.$

Para calcular $\dim(L\cap S)$, lo que vamos a hacer es calcular $\dim(L+S)$ y a continuación aplicar la fórmula:

$\dim(L+S)=\dim(L)+\dim(S)-\dim(L\cap S)\Rightarrow$

$\Rightarrow\dim(L\cap S)=\dim(L)+\dim(S)-\dim(L+S).$

Tenemos que:

$$\dim(L)=Rang\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&2&0&0\\2&1&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}=Rang\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}=4$$

$$\dim(S)=Rang\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=Rang\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=3$$

$L+S$ está generado por los vectores que generan a L junto con los vectores que generan a S, por lo tanto:

$L+S=\langle(1,0,2,0),(-1,2,1,1),(0,0,1,0),(0,0,0,1),(1,1,0,0)\rangle\Rightarrow$

$\Rightarrow\dim(L+S)=$

$$= Rang\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = Rang\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 4$$

Sustituyendo estos datos en la fórmula de las dimensiones, obtenemos que:

$\dim(L \cap S) = 4 + 3 - 4 = 3$

Otra forma de haberlo razonado es, una vez sabido que $\dim(L) = 4$, como L es un subespacio de $\mathbb{R}^4$, se obtiene que $L = \mathbb{R}^4 \Rightarrow L \cap S = \mathbb{R}^4 \cap S = S \Rightarrow \dim(L \cap S) = \dim(S) = 3$