MATEMÁTICAS PARA ARQUITECTURA
Primera Parte

Sergio Falcón Santana

Curso 2018 – 2019

Este libro trata de ser una herramienta básica para los alumnos que pretenden seguir estudios universitarios de Ciencias, en particular, para los estudiantes de Arquitectura e Ingeniería. En este texto no se pretende que el alumno tenga amplísimos conocimientos de un tema determinado y escasos en otros, sino que es deseo del autor que el alumno acabe el curso teniendo una idea global de las Matemáticas que necesita para la comprensión de la Tecnología que aprenderá en sus estudios así como de la aplicación de la Matemática en sus aspectos más prácticos.

Puesto que es posible que un alumno comience sus estudios universitarios con pocos conocimientos de Matemáticas, este libro está estructurado de tal forma que cada capítulo comienza en los niveles más básicos del tema en cuestión hasta conseguir alcanzar los conocimientos que todo alumno universitario necesita.

Los temas tratados en este libro son los básicos en cualquier carrera universitaria de Ciencias, aunque tratados en forma práctica y abandonando las demostraciones farragosas, y a menudo innecesarias, para la comprensión de la Matemática.

En una primera parte se estudia el Álgebra mientras que en la segunda se trata el Cálculo.

Dentro del Álgebra, estudiamos las Matrices y los Determinantes, los Sistemas de Ecuaciones, los Espacios Vectoriales y la Diagonalización de matrices.

En la parte de Cálculo tratamos en primer lugar la Matemática más visual de Curvas y Superficies, para estudiar luego la aplicación matemática al cálculo de longitudes, áreas y volúmenes mediante el Cálculo Integral terminando con las integrales de lnea y sus aplicaciones.

Índice general

Capítulo 1

MATRICES Y DETERMINANTES

Existen operaciones matemáticas que son sencillas de realizar pero que, al ampliarse a otros campos más extensos, se pueden hacer mucho más complejas por lo que necesitan un tratamiento diferente al inicial para poder realizarlas. Por ejemplo, es muy fácil multiplicar dos cantidades A y B. Pero supongamos que se necesita multiplicar ordenadamente un conjunto de cantidades del tipo A por un conjunto del mismo número de cantidades del tipo B y sumar los productos resultantes. Esta operación se podría indicar en la forma $(a_1, a_2, a_3, \ldots) \cdot (b_1, b_2, b_3, \ldots) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \cdots$. Pero si se tuviera que multiplicar varios conjuntos del tipo A por otros conjuntos del tipo B de la forma anterior, sería bastante complicado efectuar la operación correctamente si no se busca un procedimiento que permita clarificar el algoritmo empleado. Esta clarificación se consigue con el uso de las matrices. De hecho, una matriz no es más que un conjunto ordenado de vectores.

LOS CONJUNTOS NUMÉRICOS

Empezaremos recordando los distintos tipos de números usados en la ciencia, incluida la Matemática y algunas relaciones entre ellos.

El conjunto numérico más simple es el conjunto de los *números naturales* $\mathcal{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Si al conjunto de los números naturales se le añade el conjunto de los números naturales negativos, se obtiene el conjunto de los *números enteros* $\mathcal{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$.

Un *número racional* es el cociente entre dos números enteros, el segundo de los cuales no puede ser nulo. El conjunto de los números racionales se indica como $\mathcal{Q}$, por lo que $\mathcal{Q} = \left\{\frac{a}{b},\ a \in \mathcal{Z} \wedge b \in \mathcal{Z} - \{0\}\right\}$.

Un *número es irracional* si admite infinitas cifras decimales no periódicas. Los números irracionales son las raíces no exactas, el número π y el número e. Un *número es real* si es racional o irracional y el conjunto de los mismos se indica como $\mathcal{R}$.

Finalmente, un *número es complejo* si es de la forma $a + ib$, siendo a y b dos números reales e $i = \sqrt{-1}$. El conjunto de los números complejos se indica como $\mathcal{C}$.

El conjunto de los números reales positivos $a \geq 0$ se indica como $\mathcal{R}^+$.

Algunas notas sobre los números:

1. Debido a su construcción es evidente que se verifica la relación de inclusión $\mathcal{N} \subset \mathcal{Z} \subset \mathcal{Q} \subset \mathcal{R} \subset \mathcal{C}$.

2. Cualquier número es complejo.

3. Un número natural es entero, por lo que es racional, y por tanto real y, en consecuencia, complejo.

4. Esta clasificación de los números es total, lo que indica que no existe ningún otro tipo de número en la Ciencia.

5. Entre dos números naturales (o enteros) sólo hay un número finito de números naturales (o enteros), y no hay ningún otro si los números son consecutivos: n y $n+1$.

6. Entre dos números racionales (o reales) hay infinitos números racionales (o reales).

7. Todos los conjuntos, salvo el $\mathcal{C}$, son totalmente ordenados en crecimiento: $\forall a, b \notin \mathcal{C}: \ a \leq b \vee a > b$.

1.1. MATRICES

Definición 1.1 *Una matriz puede definirse como un conjunto de elementos colocados ordenadamente en la forma* $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$

El primer subíndice de cada elemento indica la *fila* que ocupa dicho elemento y el segundo subíndice, la *columna*. Salvo que se indique lo contrario, en este curso sólo se tratará de matrices numéricas reales. es decir, $a_{i,j} \in \mathcal{R}$.

Se llama *dimensión* de una matriz al símbolo $m \times n$, donde m indica el número de filas y n el de columnas. Las matrices se suelen indicar por letras mayúsculas, por lo que $A_{4\times 3}$ indica que se trata de una matriz que tiene 4 filas y 3 columnas, siendo 4×3 su dimensión. En forma reducida, una matriz A se indica en la forma $A_{m\times n} = (a_{i\,j})$

Ejemplo 1.1 *Hallar las siguientes matrices:*

1. $A_{4\times 3} = (a_{i\,j})$ *tal que* $a_{i\,j} = 3i - 2j + 4$

2. $B_{3\times 4} = (b_{i\,j})$ *tal que* $b_{i\,j} = i \cdot j - j^i$

Solución:

1. Basta dar a i (fila) los valores 1, 2, 3, 4 mientras que j (columna) va tomando los valores 1, 2 y 3 para obtener la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 8 & 6 & 4 \\ 11 & 9 & 7 \\ 14 & 12 & 10 \end{pmatrix}$

2. Haciendo $i = 1, 2, 3$ mientras $j = 1, 2, 3, 4$ se obtiene la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & -8 \\ 2 & -2 & -18 & -52 \end{pmatrix}$$

A continuación definiremos algunas operaciones que pueden efectuarse con las matrices. Pero antes de continuar se debe indicar que para poder efectuar una operación con dos matrices, éstas han de verificar siempre alguna condición, y esta condición depende de la operación de que se trate.

1.1.1. Suma de matrices.

Sea $\mathcal{M}_{m\times n}$ el conjunto de todas las matrices reales de dimensión $m \times n$.

Para sumar dos matrices del conjunto $\mathcal{M}_{m\times n}$ se suman los elementos que ocupan el mismo lugar: $(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$

Por lo tanto, para sumar dos matrices es necesario que ambas tengan la misma dimensión. Evidentemente, la suma de dos matrices es otra matriz de la misma dimensión: $A_{m\times n} + B_{m\times n} = C_{m\times n}$

Ejemplo 1.2 *Hallar $A + B$ si*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -4 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

En este caso $A+B=\begin{pmatrix} 5 & -4 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Propiedades de la suma de matrices

1. *Conmutativa*: $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}: \ A+B=B+A$
2. *Asociativa*: $\forall A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}: A+(B+C)=(A+B)+C$
3. *Elemento neutro*: $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}, \exists 0 \in \mathcal{M}_{m\times n}: A+0=0+A=A$
4. *Elemento opuesto*: $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}, \exists (-A) \in \mathcal{M}_{m\times n}: A+(-A)=(-A)+A=0$

El elemento neutro es la matriz $O_{m\times n}$ cuyos elementos son todos nulos mientras que la matriz opuesta de $A=(a_{ij})$ es la matriz $-A=(-a_{ij})$. Por verificar las cuatro propiedades anteriores, se dice que el conjunto de las matrices $\mathcal{M}_{m\times n}$ es un *grupo abeliano.*

Ejemplo 1.3 *Hallar la matriz opuesta de* $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

Basta cambiar el signo a cada uno de los elementos para hallar la matriz opuesta: $-A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

1.1.2. Producto de una matriz por un escalar.

El producto de una matriz por un escalar es una matriz cuyos elementos se forman multiplicando cada elemento de la matriz por dicho escalar:

$$A = (a_{ij}) \rightarrow c \cdot A = (c \cdot a_{ij})$$

Ejemplo 1.4 *Si* $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ *hallar* $-3A$

Según lo indicado es $-3A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 9 \\ -12 & 0 & 6 \\ 9 & -12 & 0 \\ 3 & -6 & 6 \end{pmatrix}$

Propiedades del producto de una matriz por un escalar:

1. *Asociativa*: $\forall a, b \in \mathcal{R}, \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n} : a \cdot (bA) = (a \cdot b)A$
2. *Distributiva respecto a las matrices*: $\forall a \in \mathcal{R}, \forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$: $a(A + B) = aA + aB$
3. *Distributiva respecto a los escalares*: $\forall a, b \in \mathcal{R}, \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}$: $(a + b)A = aA + bA$
4. *Elemento neutro*: $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n} : 1 \cdot A = A$

Por verificar estas cuatro propiedades más las cuatro de la suma de matrices, $(\mathcal{M}_{m\times n}, +, \cdot)$ es un *espacio vectorial* de dimensión $m \times n$ sobre el conjunto de los números reales $\mathcal{R}$ (Los conceptos de espacio vectorial y dimensión se explicarán con más detalle en el Capítulo 4).

Ejemplo 1.5 *Si $A_{3\times 4} = (a_{ij})$ tal que $a_{ij} = i - j + i \cdot j$, hallar $4A$*

Puesto que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 & 11 \end{pmatrix}$ entonces $4A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 12 & 16 & 20 & 24 \\ 20 & 28 & 36 & 44 \end{pmatrix}$

Ejemplo 1.6 *Resolver el sistema de ecuaciones de matrices*

$2X + 3Y = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 10 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$, $3X - 5Y = \begin{pmatrix} -7 & -11 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 8 & 16 & 2 \end{pmatrix}$

Método de reducción.

Multiplicando la primera ecuación por 3, la segunda por –2 y sumando las ecuaciones obtenidas resulta

$$3E_1 - 2E_2 = 19Y = \begin{pmatrix} 38 & 19 & 0 \\ 0 & 19 & 38 \\ -19 & -38 & -19 \end{pmatrix} \to Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Mutiplicando la primera ecuación por 5, la segunda por 3 y sumando resulta

$$5E_1 + 3E_2 = 19X = \begin{pmatrix} 19 & -38 & 19 \\ 0 & 19 & 38 \\ 19 & 38 & -19 \end{pmatrix} \to X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.7 *Hallar las matrices X e Y si $2X - 3Y = 4A$, $3X + 4Y = -2B$ sabiendo que $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$*

Aplicando el método de reducción al sistema indicado resulta:

$$-3E_1 + 2E_2 = 17Y = -12A - 4B \to Y = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} -12 & 16 & -48 \\ 8 & 12 & 52 \end{pmatrix}$$

Igualmente, $4E_1 + 3E_2 = 17X = 16A - 6B \to X = \dfrac{1}{17}\begin{pmatrix} 8 & -7 & 21 \\ -6 & 1 & -14 \end{pmatrix}$

1.1.3. Producto de dos matrices.

Se define el producto de las matrices $A_{m\times n} = (a_{ij})$, $B_{n\times p} = (b_{kr})$ como la matriz $A_{m\times n} \cdot B_{n\times p} = C_{m\times p}$ siendo $C = (c_{ir})$ tal que $c_{ir} = \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij}b_{jr}$ (En forma esquemática: para multiplicar dos matrices, se multiplican todos los elementos de cada fila de la primera por su correspondiente elemento de cada columna de la segunda matriz).

El producto de dos matrices es otra matriz cuyo número de filas coincide con el número de filas de la primera matriz mientras que su número de columnas es el número de columnas de la segunda. Por lo tanto, *para poder multiplicar dos matrices es necesario que el número de columnas de la primera sea igual al número de filas de la segunda.* Como consecuencia de la definición, el producto de matrices es una operación interna en el conjunto de todas las matrices de dimensión finita, pero no lo es en el conjunto $\mathcal{M}_{m\times n}$

Ejemplo 1.8 *Si* $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, *hallar* $A \cdot B$

Como el número de columnas de la matriz A (3), es el mismo que el número de columas de la matriz B, se puede multiplicar A por B y se obtiene la matriz

$$A{\cdot}B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 & 5 & -2 \\ 5 & 4 & -7 & 9 & 4 \\ 5 & -5 & -8 & 9 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.9 *Si* $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{r} & \frac{1}{r} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *calcular* A^n.

Buscaremos la respuesta mediante productos sucesivos:

$$\begin{aligned}
A^2 &= A\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{r} & \frac{1}{r} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{r} & \frac{1}{r} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{r} & \frac{2}{r} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
A^3 &= A^2\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{r} & \frac{2}{r} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{r} & \frac{1}{r} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{r} & \frac{3}{r} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\ldots \\
A^n &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{r} & \frac{n}{r} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Propiedades del producto de matrices:

1. *Asociativa*: $\forall A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n} : A\cdot(B\cdot C) = (A\cdot B)\cdot C$

2. *Distributiva por la derecha*: $\forall A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n} : A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$

3. *Distributiva por la izquierda*: $\forall A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n} : (A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$

Por verificar las tres propiedades anteriores más las cuatro de la suma, $(\mathcal{M}_{m\times n}, +, \cdot)$, es un anillo no conmutativo sin elemento neutro para el producto.

Nota 1

En general, el producto de matrices no es conmutativo.

Ejemplo 1.10 *Si* $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ *hallar* $A\cdot B$, $B\cdot A$ *y comprobar que el producto de estas dos matrices no es conmutativo.*

Este producto no puede ser conmutativo puesto que $A \cdot B$ es una matriz 2×2 mientras que $B \cdot A$ es una matriz 3×3. Por otra parte,

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -8 \\ -19 & -9 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -10 & 15 \\ 8 & -8 & 14 \\ 16 & -18 & 29 \end{pmatrix}$$

Que el producto de matrices no sea conmutativo no quiere decir que jamás lo sea, sino que no lo es en general. Y de hecho pueden encontrarse multitud de ejemplos de matrices cuyo producto sí es conmutativo.

Ejemplo 1.11 *Hallar el conjunto de las matrices que conmutan con* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Una matriz que conmute con ésta ha de ser de la forma $A' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de forma que $A \cdot A' = A' \cdot A$ por lo que

$A \cdot A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ 2c & 2d \end{pmatrix}$ mientras que

$A' \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -a+2b \\ c & -c+2d \end{pmatrix}$

Igualando ambas matrices se obtiene el sistema $\left\{ \begin{array}{l} a = a - c \rightarrow c = 0 \\ -a + 2b = b - d \rightarrow d = a - b \end{array} \right\}$

mientras que las otras dos ecuaciones son sobreabundantes.

En consecuencia, dos de los parámetros se pueden expresar en función de los otros dos. Por lo tanto, las matrices que conmutan con A son de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$

Por ejemplo, la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ conmuta con la matriz dada.

Ejemplo 1.12 *Hallar el conjunto de matrices que conmutan con* $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}$

Al igual que en el ejercicio anterior, resulta que si $B' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de forma que $B \cdot B' = B' \cdot B$, entonces

$B \cdot B' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a+c & 3b+d \\ -7a+8c & -7b+8d \end{pmatrix}$ mientras que

$B' \cdot B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a-7b & a+8b \\ 3c-7d & c+8d \end{pmatrix}$

Igualando ambas matrices se obtiene $\left\{ \begin{array}{l} 3a-7b = 3a+c \to c = -7b \\ a+8b = 3b+d \to d = a+5b \end{array} \right\}$

Por tanto, las matrices que conmutan con B son de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ -7b & a+5b \end{pmatrix}$

Por ejemplo, la matriz $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 21 & -13 \end{pmatrix}$ conmuta con la matriz B como se puede compruebar fácilmente.

Nota 2

Puede suceder que el producto de dos matrices no nulas sea la matriz nula.

Ejemplo 1.13 *Comprobar que si* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 6 & -10 \end{pmatrix}$, *entonces* $A \cdot B = 0$

Esto quiere decir que, si bien $0 \cdot A = 0$ y $A \cdot 0 = 0$, esto no significa que $A \cdot B = 0 \to A = 0 \vee B = 0$

1.1.4. Matriz traspuesta.

Una matriz $A = (a_{ij})$ es *traspuesta* de otra matriz $B = (b_{hk})$ si verifica que $a_{ij} = b_{ji},\ \forall i, j.$
En forma simple se dice que para trasponer una matriz se cambia sus filas por columnas. La matriz traspuesta de A se indica por A^T

Propiedades de las matrices traspuestas:

- $(A^T)^T = A$
- Si existe, es $(A + B)^T = A^T + B^T$
- Si existe, es $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

Ejemplo 1.14 *Hallar la matriz traspuesta de* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & -5 & 6 \end{pmatrix}$

La matriz traspuesta es $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 3 & -3 & -5 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

A continuación estudiaremos las matrices cuadradas y algunas de sus propiedades.

1.1.5. Definición

Una matriz es *cuadrada* si su número de filas coincide con su número de columnas. En este caso, este número se llama *orden de la matriz* y la matriz

se representa como A_n.
A partir de este punto, y mientras no se diga lo contrario, todas las matrices a tratar son cuadradas.

Ejemplo 1.15 *Si $A, B \in \mathcal{M}_n$ ¿es cierto que $(A+B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2$?*

No siempre, puesto que $(A+B)^2 = (A+B)\cdot(A+B) = A^2 + A \cdot B + B \cdot A + B^2$ y no necesariamente ha de ser $A \cdot B = B \cdot A$

1.1.6. Traza de una matriz cuadrada.

En una matriz cuadrada, el conjunto de elementos $\{a_{ii}\}$ recibe el nombre de *diagonal principal* de la matriz.

La suma de los elementos de la diagonal principal de la matriz A se llama *traza* de la matriz y se indica en la forma $traza(A)$ o bien como $tr(A)$.

Ejemplo 1.16 *Hallar la diagonal principal y la traza de la matriz cuadrada*

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

En este ejemplo la diagonal principal es $\Delta = \{2, 2, 1, 0\}$ y la traza es $traza = 2 + 2 + 1 + 0 = 5$

Propiedades de la traza de una matriz:

- $traza(A) = traza(A^T)$
- $traza(A + B) = traza(A) + traza(B)$
- $traza(k \cdot A) = k \cdot traza(A)$
- $traza(A \cdot B) = traza(B \cdot A)$
- En general, $traza(A \cdot B) \neq traza(A) \cdot traza(B)$

1.1.7. Matriz simétrica

Una matriz cuadrada es *simétrica* si coincide con su traspuesta. Es decir: A es simétrica si $A = A^T$. En consecuencia, una matriz cuadrada es simétrica si $a_{ij} = a_{ji},\ \forall i, j$

Ejemplo 1.17 *Poner un ejemplo de matriz simétrica de tercer orden*

Una matriz simétrica de tercer orden es $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

Es fácil comprobar que el producto de una matriz por su traspuesta siempre es una matriz simétrica: $B = A \cdot A^T \rightarrow B = B^T$.
Tambin es simétrica la suma de una matriz cuadrada y su traspuesta: $A + A^T$.

Ejemplo 1.18 *Si* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$*, comprobar que* $A \cdot A^T$ *es una matriz simétrica.*

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -10 & 3 \\ -10 & 9 & -9 \\ 3 & -9 & 26 \end{pmatrix}$$

1.1.8. Matriz triangular, diagonal, unidad

Una matriz cuadrada es *triangular superior* si todos sus elementos situados por debajo de la diagonal principal son nulos; es decir, (a_{ij}) es triangular superior si $a_{ij} = 0, \forall i > j$

Ejemplo 1.19 *Poner un ejemplo de matriz triangular superior de orden 4*

La matriz $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ es triangular superior.

Una matriz cuadrada es *triangular inferior* si son nulos todos los elementos situados por encima de la diagonal principal; es decir, si $a_{ij} = 0, \forall i < j$

Ejemplo 1.20 *Poner un ejemplo de matriz triangular inferior de orden 5*

La matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ es triangular inferior.

Una matriz cuadrada que es triangular inferior y superior a la vez se dice que es una *matriz diagonal*

Ejemplo 1.21 *Poner un ejemplo de matriz diagonal de orden 5*

La matriz $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ es diagonal.

Una matriz diagonal también puede expresarse sólo con los elementos de la diagonal principal, y así la matriz anterior se indicaría como

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 3 & \\ & & & & 4 \end{pmatrix}$$

Una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal principal son todos 1, se llama *matriz unidad o matriz identidad* y se representa como I_n.

Por ejemplo, $I_4 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz unidad de cuarto orden.

La matriz identidad I_n tiene la propiedad de que: $A \cdot I = I \cdot A = A$

El conjunto de las matrices cuadradas de orden "n".

Sea $\mathcal{M}_n$ el conjunto de las matrices reales cuadradas de orden "n". Por ser un subconjunto de $\mathcal{M}_{m\times n}$ es un anillo no abeliano, y como posee matriz unidad para el producto de matrices, $(\mathcal{M}_n, +, \cdot)$ es un anillo unitario no abeliano.

1.2. MATRICES: EJERCICIOS RESUELTOS

1. Hallar la matriz $A_{3\times 4} = (a_{ij})$ tal que $a_{ij} = 3i - 4j + 2$

   Basta dar valores a i desde 1 hasta 3 mientras que j varía de 1 a 4 por lo que la matriz A toma la forma $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -7 & -11 \\ 4 & 0 & -4 & -8 \\ 7 & 3 & -1 & -5 \end{pmatrix}$

2. Hallar la matriz $B_{4\times 2} = (b_{ij})$ tal que $b_{ij} = i \cdot j - j^i$

   En este caso, i varía de 1 a 4 mientras que j lo hace de 1 a 2 por lo que
   $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}$

3. Si $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -4 & -4 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 2 \\ -2 & 3 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, hallar las matrices X e Y tales que $\begin{cases} 2X - 3Y = M \\ 3X + 4Y = N \end{cases}$

   Reducción: Multiplicando la primera ecuación por –3, la segunda por 2 y sumando, se elimina X:

   $17Y = -3\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -4 & -4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 2 \\ -2 & 3 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow$

   $Y = \dfrac{1}{17}\begin{pmatrix} 5 & 0 & -15 & -2 \\ -13 & 12 & -14 & 6 \\ 2 & 5 & 10 & 20 \end{pmatrix}$

   Multiplicando la primera ecuación por 4, la segunda por 3 y sumando se elimina Y:

$$17X = 4\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -4 & -4 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 2 \\ -2 & 3 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$X = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} -1 & 17 & 3 & 14 \\ 6 & 1 & -4 & -8 \\ 3 & -1 & -19 & -4 \end{pmatrix}$$

4. Resolver el sistema matricial $\begin{cases} 2X + 3Y = 4A \\ 3X - Y = -2B \end{cases}$ si

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Al igual que el anterior, tras multiplicar la primera ecuación por 3, la segunda por 2 y sumar se obtiene Y, mientras que si se multiplica la segunda por 3 y se le suma la primera se obtiene X. De esta forma

$$Y = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -4 & 32 & 12 \\ -4 & 12 & -32 \\ 40 & -24 & 20 \end{pmatrix}, \qquad X = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -16 & -4 & 4 \\ 6 & 4 & 4 \\ 6 & 14 & -8 \end{pmatrix}$$

5. Si $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & -1 \\ 4 & 0 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, hallar $A \cdot B$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & -1 \\ 4 & 0 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & -9 & -17 \\ -10 & 5 & -3 \\ -13 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

6. Hallar $A \cdot A^T$, $A^T \cdot A$, A^2 si $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} A \cdot A^T &= \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 30 & -8 & -21 \\ -8 & 6 & 13 \\ -21 & 13 & 30 \end{pmatrix} \\ A^T \cdot A &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 14 & -9 & -15 & 16 \\ -9 & 10 & 14 & -7 \\ -15 & 14 & 21 & -14 \\ 16 & -7 & -14 & 21 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A^2 no se puede hallar porque A no es una matriz cuadrada.

7. Hallar el conjunto de matrices que conmutan con la matriz
$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$
Las matrices que conmutan con ésta, serán todas las matrices cuadradas de segundo orden $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que $A \cdot X = X \cdot A$:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a - 3c & 2b - 3d \\ -4a + 5c & -4b + 5d \end{pmatrix}$$

$$X \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-4b & -3a+5b \\ 2c-4d & -3c+5d \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2a-3c = 2a-4b \rightarrow c = \frac{4b}{3} \\ 2b-3d = -3a+5b \rightarrow d = a-b \end{cases}$$

Luego, el conjunto de matrices que conmutan con A es

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{4b}{3} & a-b \end{pmatrix}, a, b \in \mathcal{R} \right\}$$

8. Hallar A^{23} si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Multiplicando iteradamente la matriz A por sí misma resulta

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 9 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 \cdot 3 & 3 & 2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 \cdot (2^2-1) & 2^2-1 & 2^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 9 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 21 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 \cdot 7 & 7 & 2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 \cdot (2^3-1) & 2^3-1 & 2^3 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 21 & 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 45 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \quad A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 \cdot 15 & 15 & 2^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 \cdot (2^4 - 1) & 2^4 - 1 & 2^4 \end{pmatrix}$$

$\cdots$

$$\rightarrow \quad A^{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 \cdot (2^{23} - 1) & 2^{23} - 1 & 2^{23} \end{pmatrix}$$

1.3. DETERMINANTES

En esta sección trataremos de una aplicación del conjunto de las matrices cuadradas de números reales en el conjunto de los números reales, llamada determinante. Esto quiere decir que sólo las matrices cuadradas poseen determinante, que el determinante de una matriz cuadrada es único y que el determinante de una matriz de números reales es siempre un número real.

Sólo se estudiarán los determinantes de matrices de números reales (aunque el proceso es el mismo para cualquier tipo de matriz).

1.3.1. Definición.

Un *determinante* es una aplicación del conjunto de las matrices cuadradas reales en el cuerpo de los números reales en la forma que indicaremos más adelante. El determinante de la matriz cuadrada A se indica en la forma $det(A)$, o también mediante dos barras verticales en la forma $|A|$. Por lo tanto, a toda matriz cuadrada le corresponde un determinante que es un número real: $f : \mathcal{M}_n \longrightarrow \mathcal{R} : f(A) = |A|$.

A continuación indicaremos la forma de hallar el determinante de las matrices de orden 1, 2 y 3.

1. El determinante de una matriz de primer orden es el mismo número: $det(a_{11}) = a_{11}$.

2. Si la matriz es de segundo orden $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, el valor de su determinante es $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

3. Si la matriz es de tercer orden, su determinante se puede hallar mediante la llamada regla de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13})$$
$$- (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{23}a_{32}a_{11})$$

4. El determinante de una matriz de orden superior al tercero se desarrollará más adelante pues necesitaremos algunos conocimientos aún no estudiados.

Ejemplo 1.22 *Hallar el valor de los siguientes determinantes:*

1. $|-3|$, $|5|$

2. $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$, $\quad \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 7 & -5 \end{vmatrix}$, $\quad \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -8 & 6 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \end{vmatrix}$, $\quad \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 8 \end{vmatrix}$

El valor de estos determinantes es el siguiente:

1. $|-3| = -3, \qquad |5| = 5$

2. $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 - 5 \cdot 4 = 1$

   $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} = 2(-5) - (-3)7 = 11$

   $\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -8 & 6 \end{vmatrix} = 4 \cdot 6 - (-3)(-8) = 0$

3. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$
$(3{\cdot}4(-1){+}4{\cdot}1{\cdot}5{+}(-2)3{\cdot}2){-}(2{\cdot}4{\cdot}5{+}4(-2)(-1){+}1{\cdot}3{\cdot}3) = -4{-}57 = -61$
$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 8 \end{vmatrix} = (80+0+4)-(60+0+24) = 0$

1.3.2. Matriz adjunta.

Se llama *menor complementario* del elemento a_{ij} de la matriz cuadrada $A_n = (a_{ij})$, al valor del determinante que se obtiene suprimiendo la fila i y la columna j en dicha matriz. El menor complementario del elemento a_{ij} se representa por M_{ij}

Ejemplo 1.23 *Dada la matriz* $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$*, hallar los menores complementarios* M_{23} *y* M_{22}

Es $M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2+3 = 1,\ \ M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0-9 = -9$

Se llama determinante adjunto o simplemente *adjunto* del elemento a_{ij} de la matriz cuadrada A_n, al valor $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$. Dado que $(-1)^{i+j} = \pm 1$, si $i+j$ es un número par el adjunto de un elemento coincide con su menor complementario $A_{ij} = M_{ij}$, mientras que si $i+j$ es impar el adjunto de $a_{i,j}$ es el opuesto de su menor complementario $A_{ij} = -M_{ij}$

Ejemplo 1.24 *En la matriz del ejemplo anterior, hallar los adjuntos* A_{23} *y* A_{12}

$A_{23} = -M_{23} = -1$ y $A_{12} = -M_{12} = 9$

Se llama *matriz adjunta* de una matriz cuadrada a la matriz formada por los adjuntos de todos sus elementos colocados en el lugar correspondiente. La matriz adjunta de la matriz A se indica en la forma $adj(A) = (A_{ij})$

Ejemplo 1.25 *Hallar la matriz adjunta de la matriz* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

La matriz adjunta está formada por los adjuntos de los elementos de la matriz dada, por lo que, teniendo en cuenta que $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ resulta que la matriz adjunta es $adj(A) = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & 1 \\ -1 & -6 & 2 \end{pmatrix}$

Es fácil comprobar que la matriz adjunta de una matriz simétrica es también una matriz simétrica.

Ejemplo 1.26 *Hallar la matriz adjunta de la matriz simétrica*
$S = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ *y comprobar que también es simétrica.*

Su matriz adjunta es $adj(S) = \begin{pmatrix} -4 & 10 & 6 \\ 10 & 7 & 1 \\ 6 & 1 & -9 \end{pmatrix}$ que es también simétrica.

1.3.3. Determinante: definición y propiedades

Sea $\mathcal{M}_n$ el conjunto de las matrices cuadradas de orden n y sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada perteneciente a $\mathcal{M}_n$. Se llama *determinante* de la matriz cuadrada A a la aplicación $det : \mathcal{M}_n \longrightarrow \mathcal{R}$ tal que $det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$ siendo i un número fijo comprendido entre 1 y n y $A_{i,j}$ el determinante adjunto del elemento a_{ij}.

Por lo tanto, *para hallar el determinante de una matriz cuadrada se multiplica cada elemento de una línea cualquiera por su adjunto correspondiente y se suman todos estos productos.*

Es fácil comprobar que los métodos indicados anteriormente para los determinantes de primero, segundo y tercer orden, no son más que casos particulares de esta fórmula.

Ejemplo 1.27 *Hallar los determinantes siguientes a partir de la definición:*

- $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & -3 \end{vmatrix}$
- $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

Hallaremos estos determinantes desarrollando por los elementos de la primera fila:

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & -3 \end{vmatrix} \\ &= 1\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -24 \end{aligned}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1\begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$
$$+0|\cdots| = 18$$

El problema de la resolución de determinantes se complica en caso de que la matriz sea de orden superior a 3 ya que, por ejemplo, para resolver el determinante anterior de cuarto orden $|B|$, dado que cada línea tiene 4 elementos, hemos tenido que hallar 4 determinantes de tercer orden por la regla de Sarrus pero para poder hallar un determinante de quinto orden será necesario resolver $5 \times 4 = 20$ determinantes de tercer orden, etc.

Es conveniente por tanto mejorar la fórmula indicada en la definición anterior. Una forma de mejorar este procedimiento consiste en anular todos los términos de una línea cualquiera del determinante (fila o columna) salvo uno de ellos, lo que recibe el nombre de *método de Gauss*.

Para hacerlo, aplicaremos las propiedades de los determinantes que indicamos a continuación, teniendo en cuenta que al indicar dos líneas nos referimos indistintamente a dos filas o a dos columnas pero no a una fila y una columna conjuntamente. Las llamamos propiedades internas para indicar que son propiedades que dependen de los elementos del propio determinante y no de causas externas como serán otras propiedades que indicaremos más adelante.

1.3.4. Propiedades internas de los determinantes.

Entre las muchas propiedades de los determinantes destacamos las siguientes:

1. Si se intercambian entre sí dos líneas de un determinante, éste cambia de signo.

2. Si se sustituye una línea por su suma con otra línea cualquiera, el determinante no varía.

3. Si se multiplica una línea por un número, el determinante queda multiplicado por este número.

4. Si una línea es combinación lineal de otras, el determinante es nulo y viceversa. Como consecuencia de esta propiedad:

   a) Si dos líneas de un determinante son iguales, el determinante es nulo.

   b) Si una línea es nula, el determinante es nulo.

Ejemplo 1.28 *Hallar el valor de los siguientes determinantes*

1. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 5 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & -1 \end{vmatrix}$

2. $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}$

3. $|C| = \begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix}$

A partir de ahora, F_i indica la fila de orden i.

Para resolver estos determinantes, aplicaremos las propiedades anteriores (las cuales indicaremos en una columna añadida al comienzo), hasta conseguir un determinante de tercer orden el cual resolveremos por la regla de Sarrus (o por los adjuntos de una línea):

$$
\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 5 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 + F_1 \\ F_4 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 8 & -9 \\ 0 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 8 & -9 \\ 0 & -3 & 7 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 4F_1 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 8 & -9 \\ 0 & -3 & 7 \\ 0 & -29 & 35 \end{vmatrix} = 98 \\
|B| &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + F_1 \\ F_3 \\ F_4 - 2F_1 \\ F_5 - F_1 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + F_1 \\ F_3 + 2F_1 \\ F_4 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & -3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} - 0 - \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \\
&= 3(-5) - (-11) = -4
\end{aligned}
$$

$$|C| = \begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix} = \begin{matrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_2 \end{matrix} \begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Como se ve por estos ejemplos, el método consiste en anular todos los elementos de una columna (o una fila) salvo uno de ellos (preferiblemente el que sea un 1) de forma que el determinante se reduzca a otro de un orden menor y repetir el proceso hasta conseguir un determinante de tercer orden que se puede resolver por la regla de Sarrus o por los adjuntos de una línea. Esta forma de resolver un determinante de cualquier orden se llama *método de Gauss*.

1.3.5. Propiedades externas de los determinantes

Si A y B son matrices cuadradas del mismo orden:

1. $|A| = |A^T|$
2. $|A + B| \leq |A| + |B|$
3. $|k \cdot A| = k^n \cdot |A|$
4. $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$
5. Si T es una matriz triangular, $|T| = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots$
6. $|I_n| = 1$, $|O_n| = 0$

Ejemplo 1.29 *Comprobar que* $|X| = |X^T|$ *si* $X = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

Efectuando el método de los adjuntos de la tercera columna para $|X|$ y de la tercera fila para $|X^T|$, resulta

$$|X| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 0 + 5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 10$$

$$|X^T| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} - 0 + 5 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 10$$

Ejemplo 1.30 *Sea la matriz* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Hallar:

1. $|A|$
2. $|2A|$
3. $|A^T|$

Aplicando la regla de Sarrus encontramos que $|A| = 6$. Por lo tanto:

1. $|A| = 6$
2. $|2A| = 2^3|A| = 8 \cdot 6 = 48$
3. $|A^T| = |A| = 6$

1.3.6. Matriz inversa.

Una matriz es *inversa* de otra si el producto de ambas es la matriz identidad. Si existe, la matriz inversa de A se representa por A^{-1}, por lo que se ha de verificar que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$.

La inversa de una matriz puede calcularse de varias formas. Una de ellas es haciendo uso de la matriz adjunta de la matriz inicial de tal forma que $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\,(A_{ij})^T$: para hallar la matriz inversa se multiplica el valor inverso del determinante de la matriz dada por la matriz traspuesta de la matriz adjunta. De aquí se deduce que para que exista la matriz inversa es necesario y suficiente que el determinante de la matriz dada sea distinto de cero: $\exists A^{-1} \longleftrightarrow |A| \neq 0$

Ejemplo 1.31 *Hallar la matriz inversa de* $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Puesto que $|A| = -10 \neq 0$, esta matriz posee inversa y es

$$A^{-1} = \frac{1}{-10}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -7 & 4 & -5 \\ -3 & 6 & -5 \end{pmatrix}^T = -\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & -7 & -3 \\ -4 & 4 & 6 \\ 0 & -5 & -5 \end{pmatrix}$$

Propiedades de la matriz inversa

Entre las propiedades de las matrices inversas destacamos las siguientes:

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
3. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
4. $det(A^{-1}) = \dfrac{1}{det(A)}$

Una matriz es *regular o inversible* si su determinante es no nulo. Una matriz que no es regular se dice que es *singular*. En consecuencia, sólo las matrices regulares admiten matriz inversa.

Ejemplo 1.32 *Para los distintos valores del parámetro k, estudiar la existencia de la matriz inversa de*

1. $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & k & -1 \\ 3 & -2 & k \end{pmatrix}$

2. $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & k \\ 1 & k-1 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

1. Para que exista la matriz inversa es necesario que el determinante de la matriz sea no nulo. Puesto que $det(M) = k^2 + 5k + 4$, entonces $|M| = 0 \rightarrow k^2 + 5k + 4 = 0 \rightarrow k = -4 \wedge k = -1$. Existe la matriz inversa de M para todo valor de k distinto de -1 y distinto de -4.

2. Igualmente
   $|N| = 0 \rightarrow k - k^2 = 0 \rightarrow k = 0 \wedge k = 1 \rightarrow (\exists N^{-1} \iff k \neq 0 \wedge k \neq 1)$

Ejemplo 1.33 *Estudiar la existencia de la matriz inversa para los distintos valores de m en las siguientes matrices:*

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & m \end{pmatrix}$

2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & m \\ 2 & 1+m & 2 \end{pmatrix}$

3. $C = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$

Solución:

1. $det(A) = 2m + 7 = 0 \rightarrow m = -\frac{7}{2} \rightarrow \left(\exists A^{-1} \iff m \neq -\frac{7}{2}\right)$

2. $det(B) = -m^2 + 3m + 4 = 0 \rightarrow m = -1 \wedge m = 4:$
   $(\exists B^{-1} \iff m \neq -1 \wedge m \neq 4)$

3. $det(C) = m^3 - 3m + 2 = 0 \rightarrow m = 1(doble), m = -2:$
   $(\exists C^{-1} \iff m \neq 1 \wedge m \neq -2)$

1.3.7. Rango de una matriz.

Se llama *rango* de una matriz al número de vectores linealmente independientes que la conforman. Se llama *menor* de una matriz a todo determinante que puede obtenerse de la misma suprimiendo las filas y columnas que sean necesarias. El rango de una matriz coincide con el máximo orden de sus menores no nulos.

Otra forma de hallar el rango de una matriz consiste en reducir dicha matriz mediante transformaciones elementales a una matriz triangular en cuyo momento el rango de la matriz coincide con el número de vectores filas no nulas (método de Gauss). Este método es práctico en caso de la matriz tenga un número de filas y de columnas mayor de 3 ya que así se evita tener que calcular ningún determinante de orden igual o mayor que 4.

Tenemos, por tanto, tres métodos distintos para calcular el rango de una matriz:

- Dependencia: estudiando la dependencia lineal de los vectores filas (Capítulo 4).
- Menores: hallando el máximo orden de sus menores no nulos.
- Gauss: reduciendo la matriz de las n primeras filas a una matriz triangular superior.

Ejemplo 1.34 *Aplicar el método de Gauss para hallar el rango de la matriz*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 11 \end{pmatrix}$$

Se anulan los elementos de la primera columna excepto el primero y luego los de la segunda excepto los dos primeros:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 11 \end{pmatrix} \equiv \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 + F_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -9 \\ 0 & 5 & 15 \end{pmatrix} \equiv \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 3F_3 + 5F_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En consecuencia, $rango(P) = 2$ (número de filas no nulas).

Ejemplo 1.35 *Aplicar el método de Gauss para hallar el rango de la matriz*

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}$$

Repitiendo lo indicado en el ejemplo anterior resulta:

$$\begin{aligned} V &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 8 & -2 \end{pmatrix} \equiv \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 2F_1 \\ F_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 8 & -2 \end{pmatrix} \\ &\equiv \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \\ F_4 + 2F_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\equiv \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 + 5F_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $rango(V) = 3$

Ejemplo 1.36 *Hallar el rango de las matrices*

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & -13 & 7 \end{pmatrix}$

Solución:

1. Hallaremos el rango por el método de los menores no nulos:
   $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow rango(A) \geq 2.$

   $det(A) = -9 \neq 0 \rightarrow rango(A) = 3$

2. Hallaremos el rango por el método de Gauss:

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & -13 & 7 \end{pmatrix} \equiv \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 3F_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \\ &\equiv \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + 2F_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   por lo que $r(B) = 2$: número de filas no nulas.

Ejemplo 1.37 *Hallar el rango de las siguientes matrices para los distintos valores del parámetro que se indica:*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & k \end{pmatrix}, \ N = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & m & -2 \\ 3 & 1 & m \end{pmatrix}, \ P = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Solución:

1. $|M| = 0 \to 14 + 7k = 0 \to k = -2$

   a) $k \neq -2 \to r(M) = 3$

   b) $k = -2 \to r(M) = 2$

2. $|N| = 0 \to 2m^2 + 6m - 14 = 0 \to m = \dfrac{-3 + \sqrt{37}}{2}$

   a) $m = \dfrac{-3 \pm \sqrt{37}}{2} \to r(N) = 2$

   b) $m \neq \dfrac{-3 \pm \sqrt{37}}{2} \to r(N) = 3$

3. $|P| = 0 \to a^3 - 3a + 2 = 0 \to m = -2 \wedge a = 1$ (doble)

   $$a \neq -2 \wedge a \neq 1 \to r(P) = 3$$

   $$a = -2 \to P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \ \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

   $$\to r(P) = 2$$

   $$a = 1 \to P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to r(P) = 1$$

Ejemplo 1.38 *Hallar el rango de las matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Repitiendo alguno de los procesos anteriores se encuentra $rango(A) = 3$, $rango(B) = 2$ y $rango(C) = 3$

Ejemplo 1.39 *Según los valores del número real k, hallar el rango de la matriz* $P = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ k & 1 & 2 & 1 \\ 8 & 9 & k & k(k-1) \end{pmatrix}$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ k & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \to rango(P) \geq 1$$

$$\begin{array}{rcl} P & = & \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ k & 1 & 2 & 1 \\ 8 & 9 & k & k(k-1) \end{pmatrix} \\ & \equiv & \begin{array}{c} F_1 \\ 2F_2 - k\ F_1 \\ F_3 - 4F_1 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2+3k & 4-k & 2 \\ 0 & 21 & k-4 & k-1 \end{pmatrix} \\ & \equiv & \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ (2+3k)F_3 - 21F_2 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2+3k & 4-k & 2 \\ 0 & 0 & 3k^2+11k-92 & 3k^2-k-44 \end{pmatrix} \end{array}$$

$3k^2 + 11k - 92 = 0 \rightarrow k = 4 \wedge k = -\frac{23}{3}$
$3k^2 - k - 44 = 0 \rightarrow k = 4 \wedge k = -\frac{11}{3}$
Discusión:

- Si $k = 4 \rightarrow rango(P) = 2$

- Si $k \neq 4 \rightarrow rango(P) = 3$

Se habrían simplificado un tanto las operaciones si en la segunda matriz se intercambian entre sí las columnas 2 y 3 y a continuación se suman las filas 2 y 3.

Propiedades del rango de una matriz

1. El rango de una matriz es igual al rango de su traspuesta: $rango(A) = rango(A^T)$

2. Si se intercambian entre sí dos líneas de una matriz, su rango no varía

1.3.8. Relación entre rango de una matriz y dimensión de un espacio vectorial.

Teniendo en cuenta que el rango de una matriz es el número de vectores independientes que la forman, para hallar la dimensión del espacio vectorial generado por un conjunto de vectores basta con hallar el rango de la matriz que forman dichos vectores.

Ejemplo 1.40 *Hallar el rango de la matriz* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 2 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Emplearemos el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 2 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{array}{c} F_1 \\ F_2+F_1 \\ F_3 \\ F_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 2 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3-F_2 \\ 2F_4+3F_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4+F_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo que el rango de esta matriz (que coincide con el número de filas no nulas), es 3.

1.4. DETERMINANTES. EJERCICIOS RESUELTOS

1. Hallar el valor de los siguientes determinantes:

   a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

   Aplicamos el método de Gauss para reducirlo a un determinante de tercer orden y éste lo resolveremos por la regla de Sarrus:

   $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{matrix} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 + 3F_1 \\ F_4 - F_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 8 & -5 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -125$$

   b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & -3 \\ 4 & 9 & 4 & 9 \\ 8 & 27 & -8 & -27 \end{vmatrix}$

   Al igual que antes,

   $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & -3 \\ 4 & 9 & 4 & 9 \\ 8 & 27 & -8 & -27 \end{vmatrix} = \begin{matrix} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 4F_1 \\ F_4 - 8F_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 19 & -16 & -35 \end{vmatrix} = -600$$

2. Comprobar que el determinante $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 3 & 7 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ es nulo. Qué se

puede deducir de este hecho?.

Que una de las líneas es combinación lineal de las otras tres (los cuatro vectores son linealmente dependientes).

3. Resolver la ecuación $|A - \lambda \cdot I| = 0$ siendo $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

(Las raíces de esta ecuación se llaman valores propios o autovalores de la matriz A, como veremos en el Capítulo 5)

$$A - \lambda \cdot I = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & -3 \\ 2 & -3 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

por lo que, hallando su determinante, la ecuación indicada es $-\lambda^3 - 2\lambda^2 + 24\lambda = 0 \rightarrow \lambda(\lambda^2 + 2\lambda - 24) = 0$ cuyas soluciones son $\lambda = 0,\ \lambda = 4,\ \lambda = -6$.

4. Hallar la matriz inversa de

   a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(A_{ij}\right)^T = \frac{1}{-10}\begin{pmatrix} 2 & -7 & -3 \\ -4 & 4 & 6 \\ 0 & -5 & -5 \end{pmatrix}$$

   b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|}\left(B_{ij}\right)^T = \frac{1}{-28}\begin{pmatrix} -7 & -5 & 1 \\ -7 & 7 & -7 \\ 7 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

5. Hallar el rango de las siguientes matrices para los distintos valores de k:

   a) $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & k \end{pmatrix}$

   Se resuelve la ecuación $det(M) = 0 \rightarrow 14 + 7k = 0 \rightarrow k = -2$:

   - Si $k \neq -2 \rightarrow rango(M) = 3$
   - SI $k = -2 \rightarrow rango(M) = 2$

   b) $N = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & k & -2 \\ 3 & 1 & k \end{pmatrix}$

   $det(N) = 0 \rightarrow 2k^2 + 6k - 14 = 0 \rightarrow k = \dfrac{-3 \pm \sqrt{37}}{2}$.

   Si $k \neq \frac{-3\pm\sqrt{37}}{2} \rightarrow rango(N) = 3$ y $rango(N) = 2$ en caso contrario

6. Resolver la ecuación $A \cdot X = B$ siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$,

   $B = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 9 \\ 6 & 3 & -4 \\ -2 & -8 & 13 \end{pmatrix}$

   De la ecuación $A \cdot X = B$ se deduce que $X = A^{-1}B$, por lo que debemos hallar la matriz inversa de A y multiplicarla por la matriz B:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -7 \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-7} \begin{pmatrix} -7 & -7 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & -1 \end{pmatrix}^T$$

$$\rightarrow X = \frac{1}{-7} \begin{pmatrix} -7 & -1 & 4 \\ -7 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 & 9 \\ 6 & 3 & -4 \\ -2 & -8 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \quad X = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

1.5. MATRICES Y DETERMINANTES: EJERCICIOS PROPUESTOS

1.5.1. Enunciados

1. Hallar la matriz $A_4 = (a_{i,j}),\ a_{i,j} = \left\{ \begin{array}{lll} i^2 - j^2 & si & i \leq j \\ 3i - 2j & si & i > j \end{array} \right\}$

2. Si $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, hallar A^n

3. Hallar B^n, si $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4. Si M y N son matrices cuadradas del mismo orden, hallar $(M + N) \cdot (M - N)$

5. Se dice que una matriz cuadrada C es idempotente si $C^2 = C$.
   Comprobar que $C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ es idempotente y hallar C^n

6. Hallar el conjunto de matrices que conmutan con $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

7. Resolver el sistema matricial

$$3X - 5Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad 4X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

8. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, hallar $A \cdot A^T$ y $A^T \cdot A$

9. Si $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, comprobar que $M^3 = -M$.

10. Hallar el valor de los siguientes determinantes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 3 & 7 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

11. Hallar el rango de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

12. Hallar el rango de la matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ k & 1 & 2 & 1 \\ 8 & 9 & k & k-1 \end{pmatrix}$ para $k \in \mathcal{R}$.

13. Dadas las matrices $A = \{\{-1, 2, 0\},\ \{1, 2, 1\},\ \{2, -1, 1\}\}$ y $B = \{\{0, 1, 2\},\ \{2, 3, 1\},\ \{1, -1, -1\}\}$

    a) Hallar $A \cdot B$, $A \cdot B^T$, A^{-1}

    b) Resolver la ecuación $det(A - \lambda I) = 0$ si I es la matriz identidad

    - Comprobar que la suma de estas raíces coincide con $traza(A)$
    - Comprobar que el producto de dichas raíces coincide con $det(A)$

14. Si $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ hallar el valor de $A^2 - tA + |A|I$, siendo $t = traza(A)$

1.5.2. Matrices y determinantes: Soluciones

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -8 & -15 \\ 4 & 0 & -5 & -12 \\ 5 & 5 & 0 & -7 \\ 10 & 8 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

2. $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$ si n es par y $A^n = \begin{pmatrix} -2^n & 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$ si n es impar

3. $B^n = 3^{n-1}B$

4. $(M+N)(M-N) = M^2 - M \cdot N + N \cdot M - N^2$

5. $C^n = C$

6. $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a-b \end{pmatrix}, a, b \in \mathcal{R} \right\}$

7. $X = \dfrac{1}{11} \begin{pmatrix} 2 & 9 & -2 \\ 11 & 5 & 4 \\ 16 & -13 & 16 \end{pmatrix}, \qquad Y = \dfrac{1}{11} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 14 & -10 & 14 \end{pmatrix}$

8. $A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 14 & 7 & -5 \\ 7 & 14 & -4 \\ -5 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 14 & -10 & -4 \\ -10 & 11 & -1 \\ -4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

9. Basta hallar $(M \cdot M) \cdot M$

10. $|A| = -8,\ \ |B| = 12,\ \ |C| = 0$

11. $r(A) = 3,\ r(B) = 2,\ r(C) = 3$

12. $k \neq 4 \to r(M) = 3$
    $k = 4 \to r(M) = 2$

13. *a*) $A \cdot B = \{\{4, 5, 0\},\ \{5, 6, 3\},\ \{-1, -2, 2\}\}$

$A \cdot B^T = \{\{2, 4, -3\},\ \{4, 9, -2\},\ \{1, 2, 2\}\}$

$A^{-1} = \{\{-3, 2, -2\},\ \{-1, 1, -1\},\ \{5, -3, 4\}\}$

b) $\left\{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}, -1, \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right\}$

- $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} - 1 + \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} = 2$
- $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}(-1)\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} = -1$

14. 0

Capítulo 2

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

En este capítulo se estudian los Sistemas de Ecuaciones Lineales y su resolución por distintos métodos.

2.1. RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Definición 2.1 *Se dice que una ecuación es* lineal *si es una ecuación polinómica de primer grado en una o varias incógnitas.*

Por tanto, un sistema de ecuaciones lineales no es más que un conjunto de ecuaciones de primer grado. Si existe un término que no depende de ninguna incógnita se le llama *término independiente*.

2.1.1. Clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales

Los sistemas de ecuaciones lineales se pueden clasificar de dos formas diferentes según que lo hagan por su forma o por el número de soluciones:

1. Según su forma: un sistema de ecuaciones en el que todos los términos independientes son nulos se dice *homogéneo o incompleto.* Si alguno de los términos independientes no es nulo, el sistema se dice que es *completo.*

2. Según sus soluciones: Un sistema es *incompatible* si no tiene solución y *compatible* si la tiene. A su vez, un sistema compatible es *determinado* si tiene una única solución e *indeterminado* si admite infinitas soluciones.

   Por lo tanto, según sus soluciones los sistemas pueden ser

$$Sistemas \left\{ \begin{array}{l} Compatibles \left\{ \begin{array}{l} Determinados\ (SCD) \\ Indeterminados\ (SCI) \end{array} \right. \\ Incompatibles\ (SI) \end{array} \right.$$

Ejemplo 2.1 *El sistema* $\left\{ \begin{array}{l} x - 2y + 3z = -2 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ 3x - y - 2z = 5 \end{array} \right\}$ *es completo puesto que algún término independientes es no nulo.*

El sistema $\left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ 4x_1 - 5x_2 - x_3 = 0 \end{array} \right\}$ *es homogéneo porque todos los términos independientes son nulos.*

Ejemplo 2.2 *Clasificar los siguientes sistemas según sus soluciones:*

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y = -8 \\ 3x - 2y = 14 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 2x + 5y = 3 \\ 4x + 10y = 6 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 4x - 5y = 7 \\ 8x - 10y = -3 \end{array} \right\}$$

Aplicando alguno de los sistemas ya conocidos para resolver Sistemas de Ecuaciones Lineales como pueden ser los de Reducción, Sustitución o Igualación se encuentra que el primer sistema tiene una solución única por lo que es Compatible Determinado, el segundo posee infinitas soluciones por lo que es Compatible Indeterminado mientras que el tercero no tiene solución lo que indica que es un Sistema Incompatible.

A continuación estudiaremos algunos de los distintos métodos de resolución de los sistemas de ecuaciones lineales además de los ya indicados en el párrafo anterior. A un Sistema de Ecuaciones Lineales le llamaremos simplemente, sistema.

2.1.2. Método de Gauss

El método de Gauss consiste en transformar el sistema dado en otro sistema equivalente pero de forma triangular superior el cual es fácil de resolver por remonte (el método de Gauss no es más que el clásico método de reducción aplicado repetidamente). Para ello se anulan todos los coeficientes de la primera incógnita, salvo en la primera ecuación. En el sistema resultante se eliminan los coeficientes de la segunda incógnita salvo el segundo y así sucesivamente hasta llegar a la última incógnita como ya hicimos en el Capítulo 2 para hallar el valor de un determinante de orden superior a 3. Si es necesario, reordenar el sistema de forma que cada ecuación tenga alguna incógnita menos que la ecuación anterior. En este momento puede ocurrir alguno de los siguientes casos:

1. Si la última ecuación sólo posee una incógnita, ésta ha de ser de la forma $a\,x_n = b$. En este caso puede suceder alguno de los tres casos siguientes:

a) $a \neq 0$: el sistema es compatible determinado siendo $x_n = \dfrac{b}{a}$.
Este valor se sustituye en la ecuación anterior y se calcula el valor de otra incógnita. Los dos valores hallados se sustituyen en la antepenúltima ecuación y se calcula una nueva incógnita y así sucesivamente hasta resolver el sistema.

b) $a = b = 0$: la última ecuación es de la forma $0 = 0$ por lo que el sistema es compatible indeterminado y se resuelve a partir de la penúltima ecuación despejando una incógnita cualquiera en función de otra. A partir de este punto se remonta para hallar el valor del resto de las incógnitas.

c) $a = 0,\ b \neq 0$: la última ecuación es de la forma $0 \neq 0$ por lo que el sistema es incompatible (no tiene solución).

2. Si la última ecuación posee varias incógnitas, el sistema es compatible indeterminado, por lo que se debe expresar una de ellas en función de las restantes que constituirán las variables independientes del sistema. Procediendo como en el caso de un sistema compatible determinado se hallan las restantes incógnitas, siempre en función de las mismas incógnitas.

Ejemplo 2.3 *Aplicar el método de Gauss para resolver el sistema*

$$\left\{\begin{array}{l} x - 2y + 3z = -2 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ 3x - y - 2z = 5 \end{array}\right\}$$

Solución:

$$\begin{array}{rl} E_1: & x - 2y + 3z = -2 \\ -2E_1 + E_2: & 5y - 4z = 4 \\ -3E_1 + E_3: & 0 = 0 \end{array}$$

Por lo tanto, es un Sistema Compatible Indeterminado cuyas soluciones son $y = \dfrac{4z+4}{5}$; $x - 2y + 3z = -2 \to x - 2\dfrac{4z+4}{5} + 3z = -2 \to x = \dfrac{-7z-2}{5}$

2.1.3. Matrices de un sistema

Sea el sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{aligned}
$$

Se llama *matriz general* de un sistema de ecuaciones o matriz de los coeficientes, a la matriz formada por los coeficientes de las incógnitas. Si a la matriz general se le añade la columna formada por los términos independientes, se obtiene la llamada *matriz ampliada*.

En el sistema anterior, la matriz general es $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

siendo la matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$

La matriz ampliada también se representa en la forma $A|b$ con lo que el sistema anterior se puede expresar matricialmente como $A \cdot X = A|b$ siendo

X la matriz de las incógnitas $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$

Ejemplo 2.4 *Indicar las matrices general y ampliada del sistema de ecuaciones* $\begin{cases} x + 2y - 3z = -1 \\ 2x - 3y + z = -2 \\ 3x - 2z = 1 \end{cases}$

La matriz general es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

y la matriz ampliada $A|b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

2.1.4. Sistema de Cramer.

Sea un sistema que tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas. En este caso, la matriz general es cuadrada por lo que posee determinante y este determinante se llama *determinante general* del sistema. El determinante general se suele representar por la letra griega Δ (Delta mayúscula).

Se dice que un sistema de ecuaciones es de *Cramer* si el determinante general es distinto de cero: $\Delta \neq 0$ (esto obliga a que el número de ecuaciones coincida con el número de incógnitas).

Ejemplo 2.5 *Comprobar que el sistema de ecuaciones* $x - y + z = 0$, $x - 2y + 2z = 1$, $2x - 3y - 4z = -2$ *es de Cramer.*

Es un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas cuyo determinante general es $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$, por lo que el sistema es de Cramer.

Se llama *determinante particular* de una incógnita en un sistema de Cramer al determinante que se obtiene sustituyendo en el determinante general la columna formada por los coeficientes de dicha incógnita por la columna de los términos independientes. El determinante particular de la incógnita x_i se suele representar como Δ_{x_i}

Ejemplo 2.6 *Hallar los determinantes particulares del sistema anterior.*

Los tres determinantes particulares son

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{vmatrix} = -7,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -4,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 3$$

Regla de Cramer

En un sistema de Cramer, el valor de cada incógnita se obtiene dividiendo el determinante general entre su determinante particular: $x_i = \dfrac{\Delta_{x_i}}{\Delta}$

Ejemplo 2.7 *Comprobar que el siguiente sistema es de Cramer y resolverlo:* $x + 2y + 3z = 6,\ 2x + y - z = -1,\ 3x - 4y - 2z = -13$

Tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas y su determinante general es $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix} = -37 \neq 0$ por lo que es un sistema de Cramer.

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ -13 & -4 & -2 \end{vmatrix}}{-37} = \frac{37}{-37} = -1 \\
y &= \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -13 & -2 \end{vmatrix}}{-37} = \frac{-74}{-37} = 2 \\
z &= \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & -13 \end{vmatrix}}{-37} = \frac{-37}{-37} = 1
\end{aligned}$$

La solución del sistema es el punto $(-1, 2, 1)$

Teorema 2.1 Teorema de Rouché-Frobenius.

Sea un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Este sistema es compatible *si el rango (r) de la matriz general es igual al rango de la matriz ampliada: $rango(A) = rangoA|b = r$. Además:*

1. *Si $r = n$, el sistema es compatible determinado y se puede resolver por la regla de Cramer.*

2. *Si $r < n$ el sistema es compatible indeterminado. Para resolverlo es necesario eliminar $m - r$ ecuaciones; en el sistema resultante se despejan r incógnitas en función de las $n - r$ restantes y el sistema resultante es de Cramer.*

Es evidente que siempre se verifica que $rango(A|b) = rango(A)$ o bien $rango(A|b) = rango(A) + 1$.

Ejemplo 2.8 *Estudiar la compatibilidad del sistema que se indica y resolverlo en caso de que sea compatible:*
$x - 2y + 3z = 1,\ 2x + 3y + z = -2,\ 3x + 8y - z = -5$

La matriz ampliada es

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 3 & 8 & -1 & -5 \end{pmatrix} \equiv \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & -5 & -4 \\ 0 & 14 & -10 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ -F_3 + 2F_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $rango(A) = rango(A|b) = 2$, menor que el número de incógnitas (3) por lo que se trata de un Sistema Compatible Indeterminado que se puede reducir al sistema $x-2y = 1-3z,\ 7y-5z = -4$ obtenido de la última matriz. Despejando de la segunda ecuación resulta $y = \dfrac{5z-4}{7}$ y sustituyendo en la primera, $x = \dfrac{-11z-1}{7}$.

La solución puede escribirse en la forma $\left\{ \left(\dfrac{-11k-1}{7}, \dfrac{5k-4}{7}, k \right), k \in \mathcal{R} \right\}$

2.1.5. Sistemas homogéneos.

Conforme se estableció al comienzo de este capítulo, según su forma, un sistema es homogéneo si todos sus términos independientes son nulos y es completo si alguno no lo es.

Ejemplo 2.9 *Clasificar los siguientes sistemas según su forma:*
1: $x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4,\ 2x_1 + x_2 + x_3 = -5,\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 = 0$
2: $x_1 - x_2 + x_3 = 0,\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0,\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$

El primero de los sistemas es completo o no homogéneo mientras que el segundo es homogéneo por ser nulos todos sus términos independientes.
Es evidente que todo sistema homogéneo admite siempre, cuando menos la solución $x_i = 0$ (solución trivial), por lo que *todo sistema homogéneo es siempre compatible*. (También se puede comprobar que todo sistema homogéneo es compatible porque el rango de la matriz general, al ser ampliada con una columna formada de ceros, no varía: $rango(A|b) = rango(A)$.)

En consecuencia, para estudiar si un sistema homogéneo es determinado o indeterminado sólo es necesario estudiar el rango de la matriz general y compararlo con el número de incógnitas: si el rango de la matriz general coincide con el número de incógnitas es un Sistema Compatible Determinado por lo que la única solución es la trivial, $\forall x_i = 0$, mientras que si el rango de la matriz general es menor que el número de incógnitas el sistema admite infinitas soluciones pues es un Sistema Compatible Indeterminado.

Ejemplo 2.10 *Resolver los sistemas homogéneos*
1: $2x - 3y - 2z = 0,\ x + y + 2z = 0,\ x - 3y + 4z = 0$
2: $x + 2y - z = 0,\ 2x + 3y - z = 0,\ 4x + 5y - z = 0$

El determinante general del primer sistema es $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 34 \neq 0$
por lo que se trata de un Sistema Compatible Determinado y su única solución es la trivial: $z = y = z = 0$

El determinante general del segundo sistema es $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 0$ por lo que se trata de un Sistema Compatible Indeterminado siendo $rango(A) = 2$ por lo que el sistema dado es equivalente al sistema $x + 2y = z,\ 2x + 3y = z$ cuya solución, por el método de Cramer, es

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} z & 2 \\ z & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{z}{-1} = -z \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & z \\ 2 & z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-z}{-1} = z$$

y el conjunto de soluciones es $\{(-k, k, k), k \in \mathcal{R}\}$

2.1.6. Sistemas dependientes de un parámetro.

Recordemos que un parámetro es una constante de valor desconocido. Los parámetros se suelen indicar por las primeras letras latinas o griegas: $a, b, k, m, \ldots \alpha, \beta, \gamma$

Se dice que un sistema de ecuaciones depende de un parámetro si alguno de los coeficientes de las incógnitas o algún término independiente están expresados en función de un parámetro. En general, un sistema es compatible o no según los valores que pueda tomar el parámetro.

Para discutir la resolución de un sistema de ecuaciones, se podrá aplicar el teorema de Rouché-Frobenius o bien el método de Gauss-Jordan.

Para resolverlo, cuando sea posible, se podrá aplicar alguno de los métodos ya conocidos.

Ejemplo 2.11 *Estudiar la compatibilidad de los siguientes sistemas según los valores de los parámetros a y b, y resolverlos cuando sea posible (no es necesario hallar todas las incógnitas):*

1. $x - 2y + 3z = 11,\ 2x + 3y - z = -6,\ 4x + 13y + az = 15$

   El determinante general del sistema es

   $$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 13 & a \end{vmatrix} = -63 + 7a = 0 \to a = 9$$

   Discusión:

- $a \neq 9 \to rango(A) = rango(A|b) = 3$, igual al número de incógnitas por lo que se trata de un sistema compatible determinado o de Cramer.

  Y así $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{\begin{vmatrix} 11 & -2 & 3 \\ -6 & 3 & -1 \\ 15 & 13 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 13 & a \end{vmatrix}} = \dfrac{-196+21a}{-63+7a} = \dfrac{3a-68}{a-9}$ y de forma parecida se calculan y, z.

- $a = 9 \to rango(A) = 2 \wedge rango(A|b) = r\begin{pmatrix} 1 & -2 & 11 \\ 2 & 3 & -6 \\ 4 & 13 & 15 \end{pmatrix} = 3$ por lo que se trata de un sistema incompatible

2. $x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0$,
   $2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 = 0$,
   $3x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 0$,
   $4x_1 - 3x_2 - 2x_3 + a\,x_4 = 0$

   Puesto que $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -3 & -2 & a \end{vmatrix} = 344 - 31a$

   - Si $a \neq \dfrac{344}{31}$ el sistema es Compatible Determinado por lo que la única solución es la trivial $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.
   - Si $a = \dfrac{344}{31}$, se trata de un Sistema Compatible Indeterminado cuyo conjunto de soluciones es $\left\{\left(-\dfrac{13k}{31}, \dfrac{66k}{31}, \dfrac{47k}{31}, k\right), k \in \mathcal{R}\right\}$

2.2. SISTEMAS DE ECUACIONES: EJERCICIOS PROPUESTOS

2.2.1. Enunciados

1. Resolver los siguientes sistemas cuando sea posible:

   a) $x + y + 2z = 2,$
   $2x - y - 3z = 15,$
   $3x + y - z = -10$

   b) $x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 5,$
   $x_1 + x_3 - 2x_4 = -3,$
   $2x_2 - x_3 + x_4 = -1,$
   $x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 9$

   c) $x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 3,$
   $2x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 5,$
   $3x_1 - x_2 + 2x_4 = 2,$
   $x_2 + 3x_3 + x_4 = 1$

   d) $x + y + z + t = 1,$
   $2x - 2y - z + 3t = 2,$
   $3x - 5y - 3z + 5t = 5,$
   $4y + 3z - t = -4$

   e) $x - 2y - 3z = 0,$
   $2x - y - z = 0,$
   $7x + y + 4z = 0$

   f) $x - 2y + z - t = 1,$
   $2x + y - 2z = 2,$
   $x + 3y - 3z + t = 1,$
   $x - 7y + 5z - 3t = 1$

2. Discutir la resolución de los siguientes sistemas:

    a) $x + y + 2z = 0,$
    $ax + y - z = a - 2,$
    $3x + ay + z = a + 2$

    b) $x - 2y + az = 0,$
    $2x - 3y + z = 0,$
    $x + (a - 1)y - 2z = 0$

3. Discutir (sin resolver) según los valores del parámetro k la resolución del sistema
   $x - 2y + z = k,$
   $3x - 2y + kz = k^2,$
   $2x + ky - z = 0$

4. Tres amigos deciden crear una empresa con un capital social de 100 mil euros. Para ello, el primer socio aporta los dos tercios del segundo y el tercero juntos mientras que el segundo entrega un capital que es la mitad del primero, más la quinta parte del tercero y 10 mil euros más. Suponiendo que los beneficios futuros se repartan de forma proporcional al capital invertido, indicar qué porcentaje le corresponderá a cada uno de ellos.

2.2.2. Sistemas de Ecuaciones: Soluciones

1.
   a) $(9, -27, 10)$

   b) $(11, -5, -4, 5)$

   c) $(0, 2, -1, 2)$

   d) Sistema Incompatible

   e) Sistema Compatible Indeterminado: $x = -\dfrac{z}{3},\ y = -\dfrac{5z}{3}$

   f) Sistema Compatible Indeterminado: $x = \dfrac{5 + 3z + t}{5},\ y = \dfrac{4z - 2t}{5}$

2.
   a) Sistema Compatible Determinado si $a \neq \pm 2$ y Sistema Incompatible si $a = \pm 2$

   b) Si $a = \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ el sistema es Compatible Indeterminado y es Compatible Determinado en caso contrario.

3.
   - Si $k \neq 0 \land k \neq -1$, es un Sistema Compatible Determinado
   - Si $k = 0$ es un Sistema Compatible Indeterminado
   - Si $k = -1$ es un Sistema Incompatible

4. $(40\,\%, 35\,\%, 25\,\%)$

Capítulo 3

ESPACIOS VECTORIALES

La estructura de espacio vectorial es una de las más importantes de la Matemática. Existen infinidad de conjuntos que con respecto a dos leyes de composición, una interna y otra externa, poseen la estructura de espacio vectorial.

Una de las cuestiones más interesantes en esta estructura es la consideración de la independencia o dependencia de vectores y, a partir de este concepto, llegar a construir bases del espacio vectorial en cuestión, lo que viene determinado por la dimensión del espacio vectorial.

3.1. EL ESPACIO VECTORIAL

Aunque en Matemáticas existen vectores de muy diversa forma y estructura, en este curso sólo estudiaremos vectores construídos con números reales.

3.1.1. Concepto de vector.

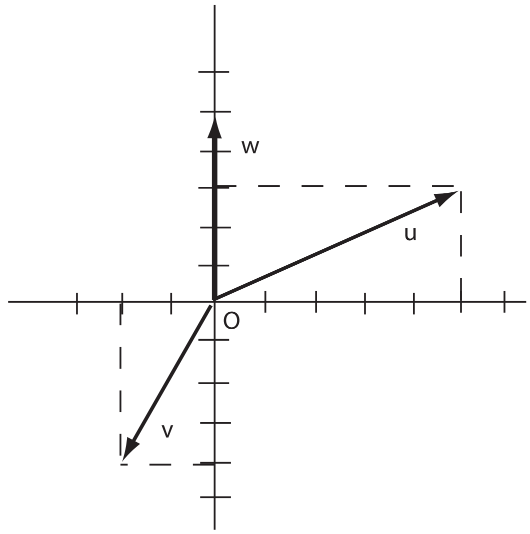
Supongamos que una empresa compra un mismo artículo en días distintos (lo que conlleva distintos precios) y desea manejar estos precios de forma fácil y cómoda. Una forma sencilla de colocar estas cantidades sería como $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ donde x_1 indica el precio del primer día, x_2 el del segundo, etc. Esta expresión se conoce con el nombre de *vector* y se suele representar en una de estas formas: $\mathbf{u}$, $\vec{u}$, $\bar{u}$, $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$

Por lo tanto, se puede definir un vector como un conjunto ordenado de números reales escrito en la forma $\vec{u} = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$. Los números reales $x_1, x_2, x_3, \ldots$ se llaman *componentes del vector* $\vec{u}$*.*

Un vector de una sola componente se dice que pertenece al espacio vectorial $\mathcal{R}$. Si tiene dos componentes pertenece al espacio $\mathcal{R}^2$, si tiene 3 a $\mathcal{R}^3$, etc. En consecuencia, un vector se puede representar en un sistema de coordenadas cartesianas en el espacio $\mathcal{R}^n$, dependiendo del valor del número n. Para ello basta representar el punto de coordenadas $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ y unir el origen de coordenadas con este punto mediante un segmento de recta. El origen de coordenadas es el *origen* del vector y el punto representado es el *extremo*. La longitud del vector se llama *módulo* del vector; la recta en la que se encuentra el vector es la *dirección* del vector y el *sentido* es el que va desde el origen hasta el extremo. El módulo del vector $\vec{u}$ (su longitud) se indica en la forma $|\vec{u}|$ y es evidente, sin más que aplicar el teorema de Pitágoras generalizado, que su valor viene dado por la fórmula $|\vec{u}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots}$ y es siempre un número positivo.

Ejemplo 3.1 *Representar los vectores* $\vec{u} = (5, 3)$*,* $\vec{v} = (-2, -4)$*,* $\vec{w} = (0, 5)$ *y hallar sus módulos.*

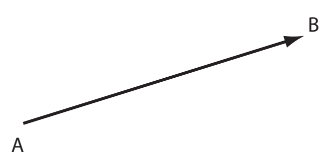
Estos vectores se encuentran en el espacio $\mathcal{R}^2$ por lo que su representación gráfica se realiza en el plano en la forma



Los respectivos módulos de estos vectores son:

$$\begin{aligned}
|\vec{u}| &= \sqrt{5^2+3^2} = \sqrt{34} \\
|\vec{v}| &= \sqrt{(-2)^2+(-4)^2} = \sqrt{20} \\
|\vec{w}| &= \sqrt{0^2+5^2} = 5
\end{aligned}$$

Si no se tiene en cuenta el espacio en el que se encuentra el vector, su representación gráfica es de la forma



en el que $A(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ es el origen del vector, $B(b_1, b_2, b_3, \ldots)$ su extremo y su módulo es $|\overrightarrow{AB}| = dist(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \cdots}$

Se dice que dos vectores son *equipolentes* (o *equipotentes*) si tienen la misma dirección, módulo y sentido. Por lo tanto, dos vectores equipolentes sólo se diferencian en que están situados en rectas paralelas distintas. En Matemáticas se trabaja siempre con vectores equipotentes, lo que quiere decir que se puede sustituir un vector por otro cualquiera que sea equipolente a él, cosa que no sucede en otras ciencias, como por ejemplo en la Física.

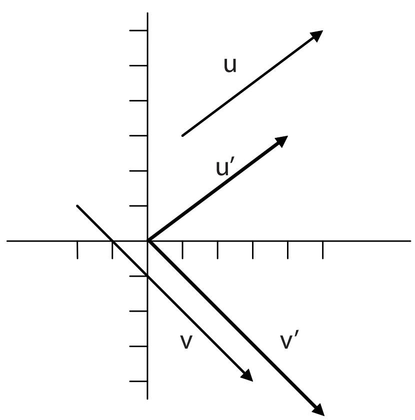
Ejemplo 3.2 *1. Representar y hallar el módulo del vector*

a) *$\vec{u}$ de origen el punto (1,3) y extremo el (5,6)*

b) *$\vec{v}$ de origen (-2, 1) y extremo (3, -4).*

2. Representar dos vectores equipolentes a los anteriores y cuyo origen sea el origen de coordenadas.

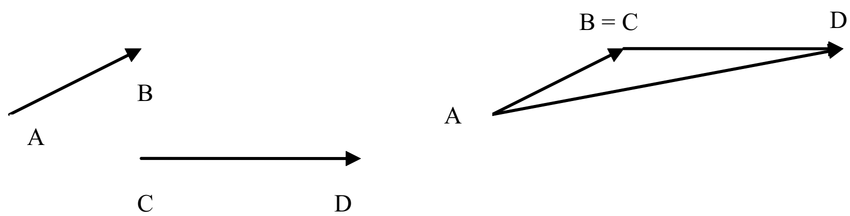
Respuesta:



El vector $\overrightarrow{u'}$ es equipolente al vector $\vec{u}$ mientras que $\overrightarrow{v'}$ lo es a $\vec{v}$.

3.1.2. Suma de vectores.

Gráficamente, para sumar dos vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ del plano $\mathcal{R}^2$, se representa uno de ellos a continuación del otro y el vector suma es el vector cuyo origen es el origen del primero y su extremo, el extremo del segundo:



En esta figura, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$

Es evidente que esta suma de vectores del plano es también un vector del plano. De la misma forma, la suma de dos vectores del espacio tridimensional es un vector de dicho espacio y, de forma general, la suma de vectores del espacio $\mathcal{R}^n$ es un vector de $\mathcal{R}^n$. Esta propiedad se expresa diciendo que *la suma de vectores del espacio $\mathcal{R}^n$ es una operación interna* en el conjunto de vectores de $\mathcal{R}^n$.

Analíticamente, para sumar dos vectores basta con sumar las componentes de ambos vectores que ocupan el mismo lugar.
Por lo tanto, si $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$ y $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3, \ldots)$ entonces
$\vec{u} + \vec{v} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \ldots)$

Se llama *vector nulo*, y lo representaremos como $\vec{0}$, al vector cuyas componentes son todas nulas. Se llama *vector opuesto* del $\overrightarrow{AB}$ al vector $\overrightarrow{BA}$: dos vectores son opuestos entre sí, si tienen el mismo módulo y la misma dirección pero sus sentidos son opuestos.

Entre otras, la suma de vectores verifica de $\mathcal{R}^n$ las propiedades siguientes:

- *Asociativa*: $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{R}^n : \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$

- *Elemento neutro*: $\forall \vec{u} \in \mathcal{R}^n, \exists \vec{0} \in \mathcal{R}^n : \vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$

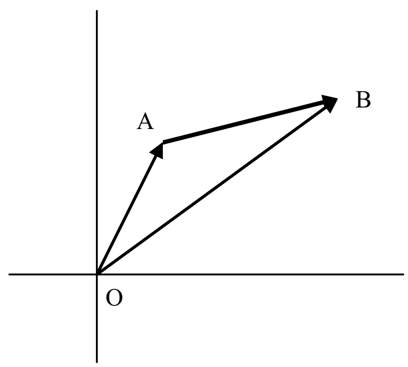
- *Elemento opuesto*: $\forall \vec{u} \in \mathcal{R}^n, \exists (-\vec{u}) \in \mathcal{R}^n : \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

- *Conmutativa*: $\forall u, v \in \mathcal{R}^n : \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

Se dice que un conjunto que verifica las cuatro propiedades anteriores para una operación interna, tiene estructura de grupo abeliano.

3.1.3. Componentes de un vector de $\mathcal{R}^n$.

Es evidente que el vector $\overrightarrow{AB}$ es la diferencia entre los vectores $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OA}$, es decir: $\overrightarrow{AB}$ =$\overrightarrow{OB}$ - $\overrightarrow{OA}$. De esta forma, si $A = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$ y $B = (b_1, b_2, b_3, \ldots)$ entonces es $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3, \ldots)$ y siempre se podrá dibujar un vector equipotente a $\overrightarrow{AB}$ cuyo origen sea el origen de coordenadas.



Ejemplo 3.3 *Hallar las componentes del vector de origen* $A(2, 3, -5)$ *y extremo* $B(-1, 3, 4)$

En este caso es $\overrightarrow{AB} = (-1 - 2, 3 - 3, 4 - (-5)) = (-3, 0, 9)$

3.1.4. Producto de un vector por un escalar.

Los elementos del cuerpo de los números reales $\mathcal{R}$ reciben el nombre de *escalares.*

El producto de un vector $\vec{u}$ por un escalar k, es un vector que tiene la misma dirección que $\vec{u}$, su mismo sentido si k es positivo y sentido contrario si k es negativo y cuyo módulo es el producto del módulo de $\vec{u}$ por el valor absoluto de k. El producto del vector $\vec{u}$ por el escalar k se indica en la forma $k\vec{u}$.

Según las componentes, el producto del vector $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$ por el escalar k es el vector $k\vec{u} = (ka_1, ka_2, ka_3, \ldots)$.

El producto de un vector por un escalar verifica las propiedades siguientes:

1. *Asociativa*: $\forall a, b \in \mathcal{R}, \forall \vec{u} \in \mathcal{R}^n : a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}$

2. *Distributiva con respecto a los vectores*: $\forall a \in \mathcal{R}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{R}^n :$ $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$

3. *Distributiva con respecto a los escalares*: $\forall a, b \in \mathcal{R}, \forall \vec{u} \in \mathcal{R}^n :$ $(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$

4. *Elemento neutro*: $\forall \vec{u} \in \mathcal{R}^n : 1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$

Ejemplo 3.4 *Hallar* $3\vec{u} - 4\vec{v}$ *si* $\vec{u} = (2, 1, -2),\ \vec{v} = (3, -2, 2)$

Respuesta:
$3\vec{u} - 4\vec{v} = 3(2, 1, -2) - 4(3, -2, 2) = (6, 3, -6) + (-12, 8, -8) = (-6, 11, -14)$

3.1.5. Concepto de espacio vectorial.

Sea V un conjunto de infinitos elementos a los que llamaremos vectores. Se dice que V es un *espacio vectorial* sobre el cuerpo de los números reales $\mathcal{R}$ si con respecto a la suma de vectores y al producto de un vector por un escalar, el conjunto V verifica las ocho propiedades indicadas en los dos párrafos anteriores.

Ejemplos de espacios vectoriales son los conjuntos $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}^2$, $\mathcal{R}^3 \ldots$, el conjunto de los polinomios de grado n con coeficientes reales, el conjunto de las funciones continuas en un intervalo, el conjunto de las matrices $\mathcal{M}_{m\times n}$, etc.

La expresión $V(\mathcal{R})$ indica que V es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales $\mathcal{R}$. Esto quiere decir que las componentes de cualquier vector de V son siempre números reales.

Ejemplo 3.5 *Comprobar que el conjunto $\mathcal{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3)\}$ es un espacio vectorial sobre $\mathcal{R}$.*

Teniendo en cuenta que la suma de números reales verifica las propiedades Asociativa, Conmutativa, Elemento neutro y Elemento opuesto y que su producto verifica las propiedades Asociativa, Distributiva y Elemento neutro, queda probado este ejemplo.

Ejemplo 3.6 *Comprobar que el conjunto de polinomios de segundo grado con coeficientes reales dotado de las operaciones suma de polinomios y producto de un polinomio por un escalar, es un espacio vectorial sobre $\mathcal{R}$.*

El polinomio de segundo grado $p(x) = ax^2 + bx + c$ puede ser escrito en la forma $p = (c, b, a)$ y ser considerado entonces como un elemento del espacio vectorial $\mathcal{R}^3$ del ejercicio anterior, por lo que $(\{P_2(x)\}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial sobre $\mathcal{R}$.

Ejemplo 3.7 *Comprobar que el conjunto de números reales $L = x\sqrt{2},\ x \in \mathcal{Q}$ donde $\mathcal{Q}$ es el cuerpo de los números racionales, es un espacio vectorial sobre $\mathcal{Q}$ respecto a la suma y el producto por un número racional.*

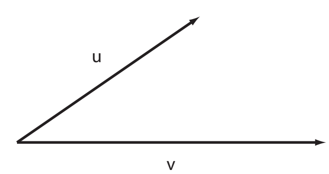
Comprobemos que la suma de elementos de L es un elemento de L:
Si x e y son números racionales, también lo es $x + y$, por lo que $x\sqrt{2} + y\sqrt{2} = (x + y)\sqrt{2}$ es un elemento de L. Y dado que la suma de números racionales verifica las propiedades Conmutativa, Asociativa, Elemento neutro y Elemento opuesto, el conjunto L es un grupo abeliano aditivo (para la suma).

Igualmente, el producto de dos números racionales es un número racional por lo que si $k, x \in \mathcal{Q}$: $k(x\sqrt{2}) = (kx)\sqrt{2} \in L$. Nuevamente, teniendo en cuenta que el producto de números racionales verifica las propiedades Asociativa, Distributiva y Elemento neutro, el conjunto L es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathcal{Q}$.

3.1.6. Dependencia e independencia lineal de vectores.

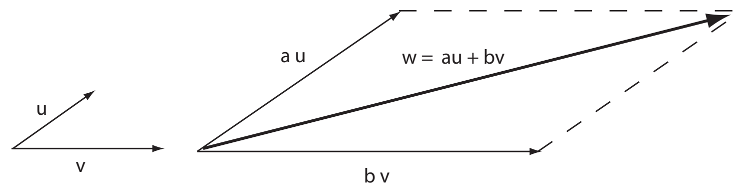
Como ya se ha visto al introducir el producto de un vector por un escalar, si se multiplica el vector $\vec{u}$ por un escalar no nulo, se obtendrá un vector $\vec{v}$ que tiene la misma dirección que $\vec{u}$. Se dice entonces que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son dos vectores linealmente dependientes: $\vec{v} = k\,\vec{u}$.

Por ejemplo, los vectores $(2, -3, 1)$ y $(-4, 6, -2)$ son linealmente dependientes puesto que si se multiplica el primer vector por –2 se obtiene el segundo. Por otra parte, dados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ del plano $\mathcal{R}^2$



ninguno de ellos se podrá obtener multiplicando al otro por un escalar, por lo que se dice que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes.
Por ejemplo, los vectores $(2, -3, 1)$ y $(4, 1, -2)$ son linealmente independientes ya que no existe ningún número que multiplique al primer vector y cuyo resultado sea el segundo o viceversa.

Pero si se multiplican $\vec{u}$ y $\vec{v}$ por el escalar apropiado y se suman los vectores resultantes, siempre se podrá obtener cualquier vector de $\mathcal{R}^2$. Es decir, dado los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ del plano $\mathcal{R}^2$, siempre será posible encontrar dos números a y b tales que uno de los vectores, por ejemplo el $\vec{w}$ se pueda expresar en la forma $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$:



Esto indica que todo vector $\vec{w}$ del plano $\mathcal{R}^2$ depende linealmente de los vectores independientes $\vec{u}$ y $\vec{v}$ por lo que el vector $\vec{w}$ se podrá expresar en la forma $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ o también como $\vec{w} = (a, b)$. Los escalares a y b se llaman *componentes* del vector $\vec{w}$ con respecto a la base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ de $\mathcal{R}^2$.

De forma parecida, en $\mathcal{R}^3$ sólo pueden existir como máximo tres vectores linealmente independientes entre sí, por lo que cuatro o más vectores de $\mathcal{R}^3$ son siempre linealmente dependientes. Asímismo, si los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{R}^3$ son linealmente independientes, cualquier otro vector $\vec{t} \in \mathcal{R}^3$ se podrá expresar como combinación lineal de ellos: $\vec{t} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$ aunque también se usa la notación anterior $\vec{t} = (a, b, c)$

Y, en general, el vector $\vec{v}$ depende linealmente de los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots \vec{u}_n$ si existen n escalares $a_1, a_2, \ldots a_n$ tales que $\vec{v} = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \cdots + a_n\vec{u}_n$. Como consecuencia, el vector $\vec{0}$ siempre es linealmente dependiente de cualquier conjunto de vectores, puesto que $0\vec{u}_1 + 0\vec{u}_2 + \cdots + 0\vec{u}_n = \vec{0}$.

Si el vector $\vec{v}$ depende linealmente de los vectores $u_1, u_2, \ldots u_n$, entonces se dice que el conjunto de vectores $\vec{v}, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots u_n$ es *linealmente dependiente.*

Si un conjunto de vectores no es linealmente dependiente, entonces es *linealmente independiente*: los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots \vec{u}_n$ son linealmente independientes si de toda combinación lineal de la forma $a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \cdots + a_n\vec{u}_n = \vec{0}$ se deduce que todos los coeficientes a_i son nulos.

Ejemplo 3.8 *Hallar* $3\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}$ *si* $\vec{u} = (1, -2, 2)$, $\vec{v} = (2, 1, 1)$ *y* $\vec{w} = (1, 8, -4)$. *¿Qué se deduce?*

$3\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w} = 3(1, -2, 2) - 2(2, 1, 1) + (1, 8, -4) = (3, -6, 6) + (-4, -2, -2) + (1, 8, -4) = (0, 0, 0) = \vec{0}$: los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes

Ejemplo 3.9 *Comprobar que los vectores* $(1,2,-1),\ (2,1,3),\ (1,-4,9)$ *son linealmente dependientes*

Sea $\vec{u} = (1,2,-1)$, $\vec{v} = (2,1,3)$, $\vec{w} = (1,-4,9)$. Si los tres vectores fuesen linealmente dependientes, entonces uno de ellos dependería de los otros dos. Supongamos que $\vec{w}$ depende de $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Entonces
$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} \to (1,-4,9) = a(1,2,-1) + b(2,1,3) = (a+2b, 2a+b, -a+3b)$. Igualando las componentes que ocupan el mismo lugar, resulta el sistema de ecuaciones lineales $a+2b = 1,\ 2a+b = -4,\ -a+3b = 9$. Sumando la primera ecuación con la tercera, resulta $b = 2$ por lo que $a = -3$. Sustituyendo ambos valores en la segunda ecuación, se obtiene -6 + 2 = -4, lo que es cierto. Por lo tanto, es cierto que los tres vectores son linealmente dependientes y la relación existente entre ellos es que $\vec{w} = -3\vec{u} + 2\vec{v}$

Ejemplo 3.10 *Estudiar la dependencia lineal de los vectores* $(2,1,3), (3,0,-1), (1,2,7)$

Se repite el proceso del ejercicio anterior:
Sean $\vec{u} = (2,1,3)$, $\vec{v} = (3,0,-1)$, $\vec{w} = (1,2,7)$. Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes, entonces
$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} \to (1,2,7) = a(2,1,3) + b(3,0,-1) = (2a+3b, a, 3a-b)$
$\to 2a+3b = 1,\ a = 2,\ 3a-b = 7$. De las dos primeras ecuaciones se obtiene $a = 2$, $b = -1$ que sustituidas en la tercera dan $6-(-1) = 7$: los vectores son linealmente dependientes y la relación entre ellos es que $\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v}$

Ejemplo 3.11 *Estudiar la dependencia lineal de los vectores* $(2,-1,3), (3,1,-2), (8,1,5)$

Igual que los anteriores.
Sea $\vec{u} = (2,-1,3), \vec{v} = (3,1,-2), \vec{w} = (8,1,5)$.
Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes, entonces $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$

$\rightarrow (8, 1, 5) = a(2, -1, 3) + b(3, 1, -2) = (2a + 3b, -a + b, 3a - 2b)$
$\rightarrow 2a + 3b = 8,\ -a + b = 1,\ 3a - 2b = 5$. De las dos primeras ecuaciones se obtiene $b = 2, a = 1$ que sustituidas en la tercera dan $3 - 22 = 7$ lo que es falso. Por lo tanto, los vectores dados son linealmente independientes.

3.1.7. Base de un espacio vectorial.

Se dice que un conjunto de vectores es *libre* si todos los vectores son linealmente independientes entre sí. En caso contrario se dice que el conjunto de vectores es *ligado*.

Sea el conjunto de vectores $G = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots \vec{u}_n\} \subset V_n(R)$. Se dice que G es un *sistema generador* de V si todo vector de V es linealmente dependiente de los vectores de G.

Base de un espacio vectorial es todo sistema generador formado por vectores linealmente independientes. O lo que es lo mismo: base de un espacio vectorial es todo sistema generador libre.

De esta forma, si el conjunto $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ es una base de $\mathcal{R}^n$, entonces cualquiera que sea el vector $\vec{v} \in \mathcal{R}^n$, siempre se podrá expresar como combinación lineal de los vectores de B:

$\vec{v} = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \cdots + a_n\vec{u}_n \rightarrow \vec{v} = (a_1, a_2, \dots a_n)$. Los números a_i son las *componentes* del vector $\vec{v}$ con respecto a la base B.

Si el número de vectores del sistema generador G no es máximo, entonces G no es una base del espacio vectorial V pero sí lo es de un subespacio vectorial del mismo. Si $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_n\}$ es una base del subespacio vectorial L, entonces se dice que L está engendrado por los vectores de B lo que se indica en la forma $L < \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots \vec{u}_n >$. Si $\vec{x} \in L$, entonces $\vec{x}$ depende linealmente de estos vectores por lo que $\vec{x} = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \ldots + a_r\vec{u}_r$ y esta expresión también puede escribirse en la forma $\vec{x} = (a_1, a_2, \dots a_r)$, que es la forma en la que hemos tratado los vectores hasta el momento.

Ejemplo 3.12 *Comprobar que el conjunto de vectores*
$\{(1, 2, -3, 0), (2, 3, 1, 1), (0, 1, 2, 1)\}$ *de* $\mathcal{R}^4$ *es libre.*
Transformar el conjunto anterior en un conjunto ligado.

Para comprobar que los tres vectores forman un sistema libre, basta comprobar que son linealmente independientes. Sean $\vec{u} = (1, 2, -3, 0)$, $\vec{v} = (2, 3, 1, 1)$, $\vec{w} = (0, 1, 2, 1)$. Si los vectores son linealmente dependientes, entonces
$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} \to (0, 1, 2, 1) = a(1, 2, -3, 0) + b(2, 3, 1, 1) \to$
$a + 2b = 0,\ 2a + 3b = 1,\ -3a + b = 2,\ b = 1$; de la cuarta y la primera ecuaciones se obtiene $b = 1,\ a = -2$ que sustituidas en la segunda origina $-4 + 3 = 1$ lo que no es cierto, por lo que los tres vectores son linealmente independientes y, en consecuencia, forman un sistema libre (no es una base porque son tres vectores en un espacio vectorial de dimensión 4).

Para transformar este conjunto libre en uno ligado, habría que sustituir uno de los vectores por otro que fuera dependiente de los otros dos. Por ejemplo, en el sistema anterior, sustituir el segundo término independiente por -1 y el tercero por $-3(-2) + 1 = 7$ y se obtiene así el vector $\vec{t} = (0, -1, 7, 1)$ por lo que el sistema $\{(1, 2, -3, 0), (2, 3, 1, 1), (0, -1, 7, 1)\}$ es ligado.

Teorema de la base:

Todo espacio vectorial tiene infinitas bases, pero todas ellas tienen el mismo número de vectores.
Este número se llama *dimensión del espacio vectorial.*
Se llama *base canónica* (base más simple) de un espacio vectorial de dimensión n, a todo conjunto de n vectores independientes que tienen una sola componente igual a la unidad y el resto de las componentes son nulas.
Por ejemplo, en $\mathcal{R}^3$ la base canónica es el conjunto de vectores
$\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

Ejemplo 3.13 *Estudiar si forman base de* $\mathcal{R}^3$ *los conjuntos de vectores*

1. $\{(2,1,2),(3,1,-2),(2,2,0)\}$
2. $\{(1,2,-1),(2,-2,1),(4,-10,5)\}$
3. $\{2,1,-1),(3,1,2),(5,-2,-3)\}$

Un conjunto de tres vectores de $\mathcal{R}^3$ es una *base* si es libre (los tres vectores son linealmente independientes).

1. Sea $\vec{u} = (2,1,2), \vec{v} = (3,1,-2), \vec{w} = (2,2,0)$. Si fueran linealmente dependientes entonces
   $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} \to (2,2,0) = a(2,1,2) + b(3,1,-2)$
   $= (2a+3b, a+b, 2a-2b) \to 2a+3b = 2,\ a+b = 2,\ 2a-2b = 0.$
   De la segunda y tercera ecuaciones se obtiene $a = b = 1$ que sustituidas en la primera dan $2{+}3 = 2$ lo que no es cierto por lo que los tres vectores son linealmente independientes y, en consecuencia, forman una base de $\mathcal{R}^3$.

2. Sean $\vec{u} = (1,2,-1), \vec{v} = (2,-2,1), \vec{w} = (4,-10,5)$. Si son dependientes entonces $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} \to (4,-10,5) = a(1,2,-1) + b(2,-2,1) \to$ $a{+}2b = 4,\ 2a{-}2b = -10,\ -a{+}b = 5$. De las dos primeras ecuaciones se obtiene $a = -2,\ b = 3$ que sustituidas en la tercera dan $-4{-}6 = -10$, lo que es cierto por lo que los tres vectores son linealmente dependientes y, en consecuencia, no forman una base de $\mathcal{R}^3$ (pero sí forman un sistema generador de un subespacio $L_2 \subset \mathcal{R}^3$).

3. Sean $\vec{u} = (2,1,-1), \vec{v} = (3,1,2), \vec{w} = (5,-2,-3)$. Si son dependientes, entonces $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} \to (5,-2,-3) = a(2,1,-1) + b(3,1,2) \to$
   $2a+3b = 5,\ a+b = -2,\ -a+2b = -3$
   De las dos primeras ecuaciones $b = 9,\ a = -11$ que sustituidas en la tercera dan $11 + 18 \neq 3$: los vectores son independientes por lo que forman una base de $\mathcal{R}^3$.

Ejemplo 3.14 *Dado el conjunto de* 4 *vectores* $\{(1,2,1),\ (2,1,-3),\ (5,1,-10),\ (0,1,3)\}$*, averiguar si se puede extraer una base de* $\mathcal{R}^3$*. ¿Qué forma el conjunto dado?.*

El conjunto dado es un sistema ligado (sus vectores son linealmente independientes) porque en un espacio de dimensión n, el número máximo de vectores linealmente independientes es n. Luego 4 vectores de 3 componentes siempre son dependientes.
Veamos si los tres primeros vectores son linealmente dependientes o no.
Sea $\vec{u} = (1,2,1), \vec{v} = (2,1,-3), \vec{w} = (5,1,-10)$. Si son dependientes, entonces $\vec{w} = a\vec{u}+b\vec{v} \rightarrow (5,1,-10) = a(1,2,1)+b(2,1,-3) = (a+2b, 2a+b, a-3b)$ $\rightarrow a+2b = 5,\ 2a+b = 1,\ a-3b = -10$. De las dos primeras ecuaciones se obtiene $b = 3,\ a = -1$ que sustituidas en la tercera dan $-1-9 = -10$, por lo que los tres primeros vectores son linealmente dependientes.
Veamos si los dos primeros vectores y el cuarto son independientes.
Sea $\vec{u} = (1,2,1), \vec{v} = (2,1,-3), \vec{z} = (0,1,3)$. Si son dependientes, entonces es $\vec{z} = a\vec{u}+b\vec{v} \rightarrow (0,1,3) = a(1,2,1)+b(2,1,-3) = (a+2b, 2a+b, a-3b)$ $\rightarrow a+2b = 0,\ 2a+b = 1,\ a-3b = 3$. De las dos primeras ecuaciones se obtiene $b = -\frac{1}{3},\ a = \frac{2}{3}$ que sustituidas en la tercera dan $\frac{2}{3}+1 = \frac{4}{3} \neq 3$ por lo que los tres vectores son linealmente independientes y por tanto forman una base de $\mathcal{R}^3$: $B = \{(1,2,1),\ (2,1,-3),\ (0,1,3)\}$

3.1.8. Independencia lineal de vectores y rango de una matriz.

Otra forma de averiguar el número de vectores independientes en un conjunto dado de vectores, consiste en hallar el rango de la matriz formada por las componentes de los vectores puesto que ambos valores coinciden.

Ejemplo 3.15 *Comprobar que el conjunto de vectores* $\{(1,2,-1),\ (2,3,2),$

$(3,-1,-2)\}$ *es una base de* $\mathcal{R}^3$. *Expresar el vector* $(3,4,-1)$ *como combinación lineal de los vectores anteriores.*

Hallemos el rango de la matriz formada por estos vectores:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \equiv \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & -7 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 7F_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -27 \end{pmatrix}$$

Como las tres filas son no nulas, el rango de la matriz es 3 por lo que los tres vectores son linealmente independientes y, en consecuencia, forman una base de $\mathcal{R}^3$. Como estos tres vectores forman base de $\mathcal{R}^3$, cualquier otro vector de este espacio se puede expresar como combinación lineal de ellos. Por lo tanto

$\vec{z} = (3,4,-1) = a(1,2,-1) + b(2,3,2) + c(3,-1,-2)$

$\rightarrow \vec{z} = (a+2b+3c, 2a+3b-c, -a+2b-2c)$

$\rightarrow\ a+2b+3c = 3,\ 2a+3b-c = 4,\ -a+2b-2c = -1$: este sistema siempre será compatible determinado (tendrá solución única). Resolviéndolo por alguno de los métodos conocidos se obtiene $a = \frac{13}{9},\ b = \frac{4}{9},\ c = \frac{2}{9}$. Por lo tanto, la relación entre los cuatro vectores es $\vec{z} = \frac{13}{9}\vec{u} + \frac{4}{9}\vec{v} + \frac{2}{9}\vec{w}$ o lo que es lo mismo $13\vec{u} + 4\vec{v} + 2\vec{w} - 9\vec{z} = \vec{0}$

3.1.9. Ecuaciones de un subespacio vectorial

Sea $B = \{\vec{u}_1,\ \vec{u}_2, \dots \vec{u}_r\}$ una base de un subespacio vectorial $L_r \subset \mathcal{R}^n$.

1. **Ecuación vectorial de** L: Todo vector $\vec{x} \in L_r$ podrá expresarse como combinación lineal de los vectores de esta base, obteniéndose así la ecuación vectorial del espacio L_r: $\vec{x} = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \cdots + a_r\vec{u}_r$

2. **Ecuaciones paramétricas**: Si $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots x_n)$, y $\vec{u}_i = (u_{i1}, u_{i2}, \dots u_{in})$, desarrollando la ecuación vectorial de L_r e igualando las componentes que ocupan el mismo lugar se obtienen sus n ecuaciones paramétricas:

$$x_1 = a_1u_{11} + a_2u_{21} + \cdots + a_ru_{r1}$$

$$\begin{array}{rcl} x_2 & = & a_1 u_{12} + a_2 u_{22} + \cdots + a_r u_{rn} \\ \dots & & \dots\dots\dots\dots \\ x_n & = & a_1 u_{1n} + a_2 u_{2n} + \cdots + a_r u_{rn} \end{array}$$

3. **Ecuaciones cartesianas**: Eliminando los parámetros $a_1, a_2, \dots a_r$ del sistema anterior se obtienen r ecuaciones cartesianas con $n-r$ variables dependientes.

En resumen: El espacio vectorial $L_r \subset \mathcal{R}^n$ posee

- una única ecuación vectorial
- n ecuaciones paramétricas dependientes de r parámetros
- $n-r$ ecuaciones cartesianas con r variables independientes

Ejemplo 3.16 *Hallar las ecuaciones vectorial, paramétricas y cartesianas del espacio vectorial L_2 generado por los vectores $\vec{u}_1 = (1, 1, -1)$ y $\vec{u}_2 = (2, -3, 1)$*

1. **Ecuación vectorial de** L_2: $\vec{x} = a(1, 1, -1) + b(2, -3, 1)$

2. **Ecuaciones paramétricas de** L: Si $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, entonces $(x_1, x_2, x_3) = a(1, 1, -1) + b(2, -3, 1) = (a + 2b, a - 3b, -a + b)$ por lo que

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & a + 2b \\ x_2 & = & a - 3b \\ x_3 & = & -a + b \end{array}$$

3. **Ecuaciones cartesianas**: Restando las dos primeras ecuaciones resulta $b = \dfrac{x_1 - x_2}{5} \rightarrow a = \dfrac{3x_1 + 2x_2}{5}$. Sustituyendo estos valores en la

tercera ecuación queda la ecuación cartesiana de L_2:
$x_3 = -\dfrac{3x_1 + 2x_2}{5} + \dfrac{x_1 - x_2}{5} \rightarrow 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0$
(Número de ecuaciones cartesianas $1 = dim(R^3) - dim(L_2) = 3 - 2$)

También se puede hallar la ecuación cartesiana desarrollando la ecuación $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Ejemplo 3.17 *Hallar las ecuaciones vectorial, paramétricas y cartesianas del espacio vectorial L_2 generado por los vectores $\vec{u}_1 = (1, 2, 0, -1)$ y $\vec{u}_2 = (2, 0, -3, 1)$*

1. **Ecuación vectorial de** L_2: $\vec{x} = a(1, 2, 0, -1) + b(2, 0, -3, 1)$

2. **Ecuaciones paramétricas de** L: Si $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, entonces $(x_1, x_2, x_3, x_4) = a(1, 2, 0, -1) + b(2, 0, -3, 1)$
$= (a + 2b, 2a, -3b, -a + b) \rightarrow$

$$\begin{aligned} x_1 &= a + 2b \\ x_2 &= 2a \\ x_3 &= -3b \\ x_4 &= -a + b \end{aligned}$$

3. **Ecuaciones cartesianas**: De la segunda ecuación se obtiene $a = \frac{x_2}{2}$ y de la tercera $b = -\frac{x_3}{3}$. Sustituyendo estos valores en la primera ecuación y en la cuarta, resultan las ecuaciones cartesianas de L_2:
$x_1 = \dfrac{x_2}{2} - 2\dfrac{x_3}{3} \rightarrow 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0$
$x_4 = -\dfrac{x_2}{2} + \dfrac{x_3}{3} \rightarrow 6x_4 + 3x_2 - 2x_3 = 0$
($dim(\mathcal{R}^4) - dim(L_2) = 4 - 2 = 2$ ecuaciones cartesianas.)

3.2. Producto de vectores

3.2.1. Producto escalar de vectores

Sean los vectores de $\mathcal{R}^n$, $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots x_n)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots y_n)$. Se define el *producto escalar* de estos vectores como el número real

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \cdots + x_n \cdot y_n \tag{3.1}$$

Es evidente que el producto escalar de dos vectores es conmutativo,
$\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$ y distributivo $\vec{x}(\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z}$

Ejemplo 3.18 *Hallar el producto escalar de los vectores* $\vec{x} = (1, 2, -3, 5)$, $\vec{y} = (2, 6, -2, 0)$

Según la definición es $\vec{x} \cdot \vec{y} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 6 + (-3)(-2) + 5 \cdot 0 = 20$

Módulo de un vector

Se llama *módulo* de un vector $\vec{x}$ al número real positivo
$|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$

Ejemplo 3.19 *Hallar el módulo del vector* $\vec{x} = (2, 3, -4, 1)$

Es $|\vec{x}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{30}$

Un vector es *unitario* si su módulo es la unidad. Dado un vector cualquiera, un vector unitario en su misma dirección y sentido se halla sin más que dividir cada componente del mismo por su módulo. El vector unitario en la dirección y sentido del vector $\vec{x}$ se indica en la forma $\hat{x}$. Por lo tanto, $\hat{x} = \dfrac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$

Ejemplo 3.20 *Hallar el vector unitario en la dirección del vector* $\vec{x} = (3, 5, -2, -5, 1)$. *Lo mismo para el vector* $\vec{y} = (2, -2, 3, 4)$

El módulo del vector $\vec{x}$ es $|\vec{x}| = \sqrt{3^2 + 5^2 + (-1)^2 + (-5)^2 + 1^2} = \sqrt{64} = 8$ por lo que el vector unitario en la dirección de $\vec{x}$ es $\hat{x} = \dfrac{\vec{x}}{|\vec{x}|} = \dfrac{1}{8}(3, 5, -2, -5, 1)$.
Igualmente, $|\vec{y}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{33} \to \hat{y} = \dfrac{1}{\sqrt{33}}(2, -2, 3, 4)$

Vectores ortogonales

Se dice que dos vectores son *ortogonales* si su producto escalar es cero.

Ejemplo 3.21 *Comprobar que los vectores* $\vec{u} = (2, -1, 3)$ *y* $\vec{v} = (5, -2, -4)$ *son ortogonales*

Basta comprobar que su producto escalar es cero:
$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 5 + (-1)(-2) + 3(-4) = 0$

Ejemplo 3.22 *Hallar el valor de a para que los vectores* $(2, 3, a)$ *y* $(5, -4, 2)$ *sean ortogonales.*

Para que sean ortogonales, su producto escalar ha de ser cero por lo que $(2, 3, a) \cdot (5, -4, 2) = 10 - 12 + 2a = 0 \to a = 1$

Es evidente que dos vectores ortogonales tienen direcciones perpendiculares por lo que *dos vectores ortogonales siempre son independientes.*

Ejemplo 3.23 *Comprobar que los vectores* $\vec{u} = (1, -2, 3)$ *y* $\vec{v} = (4, -1, -2)$ *son ortogonales e independientes.*

Ortogonales: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 + 2 - 6 = 0$
Independientes: Si $\vec{v} = a\vec{u} \to (4, -1, -2) = a(1, -2, 3) \to$
$a = 4 \wedge -2a = -1 \to a = \frac{1}{2}$ lo que no es posible. Luego $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son independientes.

Vectores ortonormales

Dos vectores unitarios ortogonales entre sí se dice que son *ortonormales.*

Una base de un espacio vectorial es *ortonormal* si está formada por vectores ortonormales dos a dos.

El ejemplo más simple de base ortonormal es la base canónica de $\mathcal{R}^3$: $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. De esta forma, el vector $\vec{x} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$ también se puede expresar en la forma más simple $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$

3.2.2. Ángulo de dos vectores de $\mathcal{R}^3$

También se puede definir el producto escalar de dos vectores de la siguiente forma: Si $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$, se define el producto escalar como $\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos(\vec{x}, \vec{y})$.
Se puede comprobar que la primera definición de producto escalar de dos vectores coincide con ésta. Como consecuencia, se puede hallar el ángulo que forman dos vectores de $\mathcal{R}^3$ sin más que combinar ambas definiciones, y así, $\cos(\vec{x}, \vec{y}) = \dfrac{x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|}$

Ejemplo 3.24 *Hallar el ángulo que forman los vectores* $\vec{x} = (1, 2, -1)$
$\vec{y} = (2, 1, 0)$

Puesto que $|\vec{x}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$, $|\vec{y}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5}$, entonces $\cos\alpha = \dfrac{2 + 2 + 0}{\sqrt{6}\sqrt{5}} = \dfrac{4}{\sqrt{30}}$. Finalmente, $\alpha = \arccos(0,73) = 43^\circ\, 5'$

Este producto también se puede definir de forma parecida en $\mathcal{R}^2$

3.2.3. Producto vectorial en $\mathcal{R}^3$

Si $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$, se define el producto vectorial de estos vectores como el vector de módulo $|\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \text{sen}(\vec{x}, \vec{y})$, de dirección la perpendicular al plano formado por dichos vectores y sentido el que lleva del primer vector al segundo según la regla del sacacorchos.

Como consecuencia, se puede encontrar que el producto vectorial de estos vectores se puede encontrar (de forma simbólica pero práctica) como

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = (x_2y_3 - x_3y_2,\ x_3y_1 - x_1y_3,\ x_1y_2 - x_2y_1)$$

Ejemplo 3.25 *Si* $\vec{x} = (2, 1, -3)$, $\vec{y} = (3, -3, 2)$, *hallar* $\vec{x} \times \vec{y}$

Aplicando la última fórmula, resulta

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = (-7, -13, -9)$$

3.2.4. Espacios vectoriales. Ejercicios resueltos

1. *Estudiar la dependencia lineal de los vectores* $(2, 0, 1)$, $(1, -1, 2)$, $(1, 1, -1)$

   Supongamos que los vectores $\vec{u} = (2, 0, 1)$, $\vec{v} = (1, -1, 2)$, $\vec{w} = (1, 1, -1)$ son linealmente dependientes. En tal caso es $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ por lo que $(1, 1, -1) = a(2, 0, 1) + b(1, -1, 2) \rightarrow (1, 1, -1) = (2a + b, -b, a + 2b)$ $\rightarrow 2a + b = 1,\ -b = 1,\ a + 2b = -1$. De las dos primeras ecuaciones se obtiene $b = -1,\ a = 1$. Sustituyendo estos valores en la tercera ecuación resulta $1 + 2(-1) = -1$, lo que es correcto por lo que los vectores dados son linealmente dependientes mediante la relación $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$

2. *Expresar el vector* $(2, 3, -1)$ *como combinación lineal de los vectores* $(1, 2, 2)$ *y* $(3, 2, 4)$

   De la ecuación vectorial $(2, 3, -1) = a(1, 2, 2) + b(3, 2, 4)$ se obtiene el sistema de ecuaciones $a + 3b = 2,\ 2a + 2b = 3,\ 2a + 4b = -1$. La solución de las dos últimas ecuaciones es $b = -2,\ a = \frac{7}{2}$ que sustituidas en la primera da $\frac{7}{2} - 6 = -\frac{5}{2} \neq 2$ por lo que el primer vector no es combinación lineal de los otros dos: el problema está mal planteado.

3. *Hallar una base en el conjunto de vectores* $(1,2,3),\ (2,2,-1),\ (2,-1,-1),\ (-3,2,4)$ *y expresar el otro vector en función de ella*

   Debemos hallar tres vectores que sean independientes. Supongamos que los tres primeros son dependientes. Entonces es $(2,-1,-1) = a(1,2,3) + b(2,2,-1)$ de donde se obtiene el sistema $a+2b = 2,\ 2a+2b = -1,\ 3a-b = -1$. Se resuelve el sistema formado por las dos primeras ecuaciones y resulta $a = -3,\ b = \frac{5}{2}$ que, sustituidas en la tercera da $-9-\frac{5}{2} = -\frac{23}{2} \neq -1$ por lo que los tres primeros vectores son linealmente independientes y por tanto forman una base B de $\mathcal{R}^3$. Entonces el cuarto vector depende de ellos por lo que $(-3,2,4) = a(1,2,3)+b(2,2,-1)+c(2,-1,-1)$ de donde se obtiene el sistema $a+2b+2c = -3,\ 2a+2b-c = 2,\ 3a-b-c = 4$ cuya solución es $a = \frac{5}{7},\ b = -\frac{3}{7},\ c = -\frac{10}{7}$ por lo que $(-3,2,4) = (\frac{5}{7}, -\frac{3}{7}, -\frac{10}{7})_B$

4. *Hallar las componentes del vector* $(3,-1,2)$ *relativas a la base* $B = \{(2,-1,1),(1,2,-2),(0,3,2)\}$

   Basta expresar el primer vector como combinación lineal de los vectores de B: $(3,-1,2) = a(2,-1,1) + b(1,2,-2) + c(0,3,2)$ $\rightarrow 2a+b = 3,\ -a+2b+3c = -1,\ a-2b+2c = 2$ de donde se obtienen las componentes del primer vector con respecto a la base B: $a = \frac{38}{25},\ b = -\frac{1}{25},\ c = \frac{1}{5} \rightarrow (3,-1,2) = (\frac{38}{25}, -\frac{1}{25}, \frac{1}{5})_B$

5. *Hallar las ecuaciones cartesianas del subespacio vectorial de* $\mathcal{R}^3$, $L < (1,2,-1),\ (3,2,2) >$

   La ecuación vectorial de L es $\vec{x} = a(1,2,-1) + b(3,2,2)$ de donde se obtienen las ecuaciones paramétricas $x_1 = a+3b,\ x_2 = 2a+2b,\ x_3 = -a+2b$. Eliminando los parámetros a y b se obtiene la ecuación cartesiana de L: $6x_1 - 5x_2 - 4x_3 = 0$

6. *Hallar las ecuaciones del espacio vectorial* $W < (1, 2, -1, 1),\ (3, -4, 2, 2) >$

   La ecuación vectorial de W es $\vec{x} = a(1, 2, -1, 1) + b(3, -4, 2, 2)$ por lo que las ecuaciones paramétricas son $x_1 = a + 3b,\ x_2 = 2a - 4b,\ x_3 = -a + 2b,\ x_4 = a + 2b$. Hallando los parámetros a y b en las dos primeras ecuaciones y sustituyendo en las otras dos se obtienen las ecuaciones cartesianas del espacio vectorial W:
   $a = x_1 - 3b \rightarrow x_2 = 2x_1 - 6b - 4b \rightarrow b = \frac{2x_1 - x_2}{10} \rightarrow a = \frac{4x_1 + 3x_2}{10}$ por lo que las ecuaciones cartesianas de W son $x_3 = -\frac{x_2}{2},\ x_4 = \frac{8x_1 + x_2}{10}$ o lo que es lo mismo, $x_2 + 2x_3 = 0,\ 8x_1 + x_2 - 10x_4 = 0$

7. *Hallar una base del subespacio vectorial* $W = \{(x, y, z) \in \mathcal{R}^3,\ 2x - 3y + z = 0\}$

   Dado que $z = -2x + 3y$, basta dar dos pares de valores a x e y para obtener una base de W. Por ejemplo: para $x = 0,\ y = 1$ es $z = 3$; para $x = 1,\ y = 0$ es $z = -2$. Luego una base de W es $\{(0, 1, 3),\ (1, 0, -2)\}$

8. *Hallar una base del subespacio vectorial* $M = \{(x, y, z, t) \in \mathcal{R}^4,\ x + y - 2z = 0,\ 2x - z - 2t = 0\}$

   De la primera ecuación se obtiene $y = -x + 2z$; de la segunda $t = \frac{2x - z}{2}$. Damos dos pares de valores a x y z para obtener la base solicitada: $x = 0,\ z = 2 \wedge x = 1,\ z = 0 \rightarrow \{(0, 4, 2, -1),\ (1, -1, 0, 1)\}$

9. *Hallar el producto escalar de los vectores* $(2, 1, 3)$ *y* $(3, -4, 5)$

   $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2, 1, 3) \cdot (3, -4, 5) = 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-4) + 3 \cdot 5 = 17$

10. *Hallar el producto escalar de los vectores* $(3, 2, -2, 1, 0)$ *y* $(5, 3, -4, -2, 2)$

    $\vec{u} \cdot \vec{v} = (3, 2, -2, 1, 0) \cdot (5, 3, -4, -2, 2) = 15 + 6 + 8 - 2 + 0 = 27$

11. *Normalizar los vectores* $(2,-5,1)$ *y* $(2,3,-4,-3)$

    Para normalizar un vector se divide por su módulo:
    $|\vec{u}| = (2,-5,1)| = \sqrt{2^2+(-5)^2+1^2} = \sqrt{30} \to \hat{u} = \frac{1}{\sqrt{30}}(2,-5,1)$
    $|\vec{v}| = (2,3,-4,-3)| = \sqrt{2^2+3^2+(-4)^2+(-3)^2} = \sqrt{38} \to$
    $\hat{v} = \frac{1}{\sqrt{38}}(2,3,-4,-3)$

12. *Hallar el valor del parámetro* k *para que sean ortogonales los vectores* $(1,2,3)$ *y* $(2,-3,k)$*. Lo mismo para* $(2,-3,2,-4)$ *y* $(3,k,2,1-k)$

    Dos vectores son ortogonales si su producto escalar es cero:
    $(1,2,3) \perp (2,-3,k) \to \vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \to 2-6+3k = 0 \to k = \frac{4}{3}$
    $(2,-3,2,-4) \perp (3,k,2,1-k) \to 6-3k+4-4+4k = 0 \to k = -6$

3.3. RECTA Y PLANO EN EL ESPACIO

En esta sección recordaremos los aspectos esenciales de la recta y el plano en el espacio $\mathcal{R}^{\ni}$

3.3.1. La recta en el espacio

Toda recta está determinada por un punto $A(x_0, y_0, z_0)$ y un vector de dirección $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k} = (u_1, u_2, u_3)$. Si $P(x, y, z)$ es un punto de la recta y O el origen de coordenadas, entonces las ecuaciones de la recta son:

1. Ecuación vectorial: $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} \to \vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$

2. Ecuaciones paramétricas: De la ecuación anterior se deducen las ecuaciones paramétricas de la recta:
   $x = x_0 + \lambda u_1$
   $y = y_0 + \lambda u_2$
   $z = z_0 + \lambda u_3$

3. Finalmente, eliminando el parámetro λ resulta la ecuación cartesiana de la recta $\dfrac{x - x_0}{u_1} = \dfrac{y - y_0}{u_2} = \dfrac{z - z_0}{u_3}$, que recibe el nombre de ecuación continua.

Ejemplo 3.26 *Hallar los distintos tipos de ecuaciones de la recta determinada por los puntos A(1, 2, -1) y B(2, -2, 0)*

El vector de dirección de la recta es el $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1, -4, 1)$ por lo que esta recta está determinada por este vector y por el punto A:

- Ecuación vectorial: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u} \to \vec{x} = (1, 2, -1) + \lambda(1, -4, 1)$

- Ecuaciones paramétricas: $\vec{x} = (x, y, z) = (1 + \lambda, 2 - 4\lambda, 1 - \lambda) \to$
  $$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - 4\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

- Ecuaciones cartesianas: Despejando λ en cada ecución resutla la ecuación continua de la recta: $x-1=\dfrac{y-2}{-4}=\dfrac{z-1}{-1}$

Evidentemente, dos rectas paralelas están determinadas por vectores equipotentes, por lo que lo más sencillo para hallar la ecuación de una recta paralela a otra es considerar el mismo vector de dirección.

Ejemplo 3.27 *Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (-2, 3, -1) y es paralela a la recta* $r:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z}{-1}$

Como un vector de dirección de esta recta es el $\vec{u}=(2,3,-1)$, la ecuación de la recta paralela es $s:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z+1}{-1}$

3.3.2. Posición relativa de dos rectas en el espacio

Dos rectas en el espacio pueden estar en planos distintos (y entonces decimos que se cruzan) o en el mismo plano. En este caso, las rectas pueden ser secantes, paralelas o coincidentes.

De dos rectas se pueden obtener tres vectores: el formado por un punto cualquiera de cada recta y los vectores de dirección de cada una de ellas. En consecuencia, la posición relativa de dos rectas en el espacio está determinada por el rango de estos tres vectores. Sea la recta r determinada por el punto A y el vector $\vec{u}$ y la recta s determinada por el punto B y el vector $\vec{v}$. Finalmente, sea M la matriz formada por los vectores $\{\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}\}$. Entonces

- Si rango(M) = 3, las rectas se cruzan en el espacio.
- Si rango(M) < 3, las rectas e encuentran en un mismo plano:
    1. Si rango(M) = 2, las rectas se cortan en un punto.
    2. Si rango(M) = 2, y un punto cualquiera de una recta no pertenece a la otra, las rectas son paralelas.

3. Si rango(M) = 1, y un punto cualquiera de una recta pertenece también a la otra, las rectas son coincidentes.

Ejemplo 3.28 *Estudiar la posición relativa de las rectas*
$r:\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=z,\ s:\ \vec{x}=(1,2,-1)+\lambda(3,2,-2)$

Un punto de la primera recta es el $A(1,-2,0)$ y uno de la segunda $B(1,2,-1)$ por lo que los vectores a utilizar para resolver el problema son
$\overrightarrow{AB}=(0,4,-1)$, $\vec{u}=(2,-3,1)$, $\vec{v}=(3,2,-2)$. Por lo tanto

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \equiv \begin{array}{c} F_1 \\ 2F_2-3F_1 \\ F_3 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 13 & -7 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \equiv \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 13F_3-4F_2 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 13 & -7 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

por lo que rango(M) = 3, los tres vectores son linealmente independientes y las rectas se cruzan.

3.3.3. El plano en el espacio

Todo plano de $\mathcal{R}^{\ni}$ está determinado por un punto $A(x_0,y_0,z_0)$ y dos vectores de posición $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ y $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$. Si $P(x,y,z)$ es un punto del plano y O el origen de coordenadas, entonces las ecuaciones del plano son:

1. Ecuación vectorial: $\vec{x}=\vec{a}+\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}$

2. Ecuaciones paramétricas:
   De la ecuación anterior se deducen las ecuaciones paramétricas del plano:$\vec{x}=(x,y,z)\rightarrow\begin{cases} x=x_0+\lambda u_1+\mu v_1 \\ y=y_0+\lambda u_2+\mu v_2 \\ z=z_0+\lambda u_3+\mu v_3 \end{cases}$

3. Finalmente, este sistema de ecuaciones en λ y μ es compatible indeterminado si el determinante de la matriz ampliada es nulo:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & u_1 & v_1 \\ y-y_0 & u_2 & v_2 \\ z-z_0 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Esta ecuación se recuerda mejor como $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$. Y de aquí resulta la ecuación general del plano: $Ax + By + Cz + D = 0$

Ejemplo 3.29 *Hallar los distintos tipos de ecuaciones del plano determinado por los puntos A(1, 2, -3), B(2, 1, 2) y C(0, -1, -1)*

Dos vectores de posición de este plano son $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1, -1, 5)$ y $\vec{v} = \overrightarrow{AC} = (-1, -3, 2)$ por lo que:

1. Ecuación vectorial: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \rightarrow$
   $\vec{x} = (1, 2, -3) + \lambda(1, -1, 5) + \mu(-1, -3, 2)$

2. Ecuaciones paramétricas: Como $\vec{x} = (x, y, z)$, resulta
   $x = 1 + \lambda - \mu$
   $y = 2 - \lambda - 3\mu$
   $z = -3 + 5\lambda + 2\mu$

3. Ecuación general: $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$
   $\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+3 \\ 1 & -1 & 5 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$
   $13(x-1) - 7(y-2) + (-4)(z+3) = 0 \rightarrow 13x - 7y - 4z - 11 = 0$

La intersección de dos planos no paralelos $Ax + By + Cz + D = 0$, $A'x + B'y + C'z + D' = 0$ es una recta. Un punto de esta recta se obtiene dando un valor cualquiera a una de las variables en ambas ecuaciones y, tras resolver el sistema resultante, se obtienen las otras dos coordenadas.

Un vector de dirección de la recta obtenida como intersección de los dos planos $Ax + By + Cz + D = 0,\ \ A'x + B'y + C'z + D' = 0$ es el producto vectorial de los vectores (A, B, C) y (A', B', C'), es decir: $\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix}$

Si el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ pertenece al plano $Ax+By+Cz+D = 0$, entonces ha de verificar su ecuación por lo que $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$. Restando ambas ecuaciones resulta $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0) = 0$ y esta ecuación establece que el vector (A, B, C) es ortogonal a todo vector del plano. Como consecuencia, un vector de dir4ección de una recta perpendicular al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ es el $\vec{u} = (A, B, C)$.

Ejemplo 3.30 *Hallar la ecuación continua de la recta que pasa por el punto A(3, -2, 1) y es perpendicular al plano* $2x + 5y - 6z + 3 = 0$

Un vector de dirección de la recta es $\vec{u} = (2, 5, -6)$ por lo que su ecuación continua es $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+2}{5} = \dfrac{z-1}{-6}$

Un haz de planos es el conjunto de los infinitos planos que contienen a una recta determinada. Por lo tanto, la ecuación del haz de planos que contienen a la recta $\left\{ \begin{array}{l} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{array} \right\}$ es

$$Ax + By + Cz + D + \lambda(A'x + B'y + C'z + D') = 0$$

Finalmente, digamos que en coordenadas paramétricas, una curva del espacio $\mathcal{R}^3$ está definida por una función vectorial de tres variables dependientes de un solo parámetro, $\vec{r}(t) = (x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t))$ mientras que una superficie está definida por tres variables que dependen de dos parámetros $x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v)$

3.3.4. Recta y plano en el espacio: Ejercicios resueltos

1. *Hallar la ecuación continua de la recta que pasa por los puntos A(1, -2, 3) y B(2, 5, -2)*

   Un vector de dirección de la recta es $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1, 7, -5)$ por lo que la ecuación continua de la recta es
   $\dfrac{x - x_0}{u_1} = \dfrac{y - y_0}{u_2} = \dfrac{z - z_0}{u_3} \to \dfrac{x - 1}{1} = \dfrac{y + 2}{7} = \dfrac{z - 3}{-5}$

2. *Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto P(1, 3, -2) y es paralela a* $x = 2 + 3\lambda,\ y = -4 + 5\lambda,\ z = \lambda$

   La ecuación solicitada es $x = 1 + 3\lambda,\ y = 3 + 5\lambda,\ z = -2 + \lambda$

3. *Hallar la ecuación continua de la recta que pasa por el punto A(2, -3, -1) y es perpendicular al plano* $x - 2y + 5z + 3 = 0$

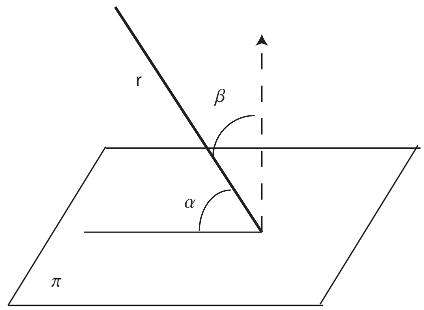
   Un vector de dirección de esta recta es el $\vec{u} = (1, -2, 5)$ por lo que la ecuación continua de la recta es $\dfrac{x - 2}{1} = \dfrac{y + 3}{-2} = \dfrac{z + 1}{5}$

4. *Ecuación de la recta que pasa por el punto* $P(1, 2, 0)$ *y es ortogonal al plano* $\pi :\ 3x + 4y - 5z + 1 = 0$

   El vector $\vec{u} = (3, 4, -5)$ es ortogonal al plano π por lo que se puede tomar como vector de dirección de la recta solicitada. Como esta recta pasa por el punto P, su ecuación es $\dfrac{x - 1}{3} = \dfrac{y - 2}{4} = \dfrac{z}{-5}$

5. *Hallar el ángulo que forma la recta* $\dfrac{x - 1}{2} = \dfrac{y + 3}{-1} = z$ *con el plano* $\pi :\ x - 3y + 4z - 5 = 0$

   El ángulo α que forma la recta r (de vector de dirección $\vec{u} = (2, -1, 0)$) con el plano π es complementario del ángulo β que forma la recta con el vector $\vec{v} = (1, -3, 4)$ ortogonal al plano π (ver figura).

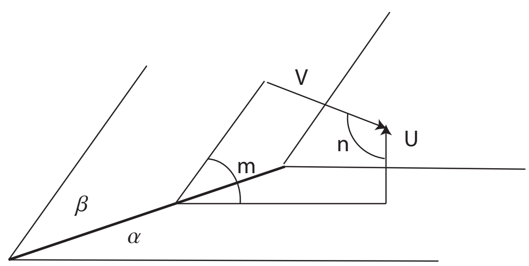


En consecuencia,
$\cos\beta = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \dfrac{2\cdot 1 + (-1)\cdot(-3) + 0\cdot 4}{\sqrt{2^2+(-1)^2}\sqrt{1^2+(-3)^2+4^2}} = 0{,}7206$

$\rightarrow \beta = \arccos(0{,}7206) = 43^o\ 54' \rightarrow \alpha = 90^o\ - 43^o\ 54' = 46^o\ 36'$

6. *Hallar el ángulo que forman los planos* $\alpha:\ 2x - 3y + z - 1 = 0$, $\beta:\ x - 2y - 3z + 2 = 0$

El ángulo m que forman los planos es el suplementario del ángulo n que forman los vectores característicos de los mismos, $\vec{U},\ \vec{V}$:



Por lo tanto:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{U} = (2,-3,1)\\ \vec{V} = (1,-2,-3)\end{array}\right\}$$
$$\rightarrow\ \cos(n) = \frac{\vec{U}\cdot\vec{V}}{|\vec{U}|\cdot|\vec{V}|} = \frac{2+6-3}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = 0{,}3571$$
$$\rightarrow\ n = \arccos(0{,}3571) = 69{,}0778 = 69^o\ 5'$$
$$\rightarrow\ m = 180^o - 69^o\ 5' = 110^o\ 55'$$

3.4. ESPACIOS VECTORIALES. EJERCICIOS PROPUESTOS

3.4.1. Enunciados

1. Hallar una base del espacio vectorial generado por el conjunto de vectores $\{(1,2,3),\ (2,5,7),\ (1,-1,0)\}$

2. Demostrar que el conjunto de vectores $\{(1,1,1),\ (1,1,2),\ (1,2,3)\}$ es una base de $\mathcal{R}^3$ y hallar las componentes del vector $(6,9,14)$ en dicha base

3. Indicar si son dependientes o no los siguientes vectores

    a) $(5,2,-3),\ (1,1,-1),\ (2,-1,0)$

    b) $(-2,0,-1),\ (1,1,-1),\ (2,-1,0)$

    c) $(-1,2,1),\ (1,1,-1),\ (2,-1,0)$

4. Hallar las componentes del vector $(3,1,0)$ con respecto a la base $\{(2,1,1),(1,2,-3),(3,1,2)\}$

5. Hallar la dimensión del espacio vectorial generado por los vectores $(1,2,-1),\ (2,3,4),\ (1,0,11)$

6. Hallar los productos escalar y vectorial de $\vec{u}=(2,3,-4)$ y $\vec{v}=(3,-2,2)$

7. Hallar la ecuación cartesiana del espacio generado por los vectores $(3,2,-2)$ y $(1,3,4)$

8. Ecuación continua de la recta que pasa por el punto P(-1, 2, 3) y es perpendicular al plano $\alpha:\ 2x+5y-4z-8=0$

3.4.2. Espacios vectoriales: Soluciones

1. $B = \{(1,2,3),(2,5,7)\}$

2. $(6,9,14)_B = (1,2,3)_{B'}$

3.
   a) linealmente dependientes

   b) linealmente independientes

   c) linealmente independientes

4. $\vec{v} = (-5,1,4)$

5. $dim = 2$

6. $\vec{u} \cdot \vec{v} = -8, \;\; \vec{u} \times \vec{v} = (-2,-16,-13)$

7. $2x - 2y + z = 0$

8. $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{5} = \dfrac{z-3}{-4}$

Capítulo 4

APLICACIONES LINEALES

Los apuntes correspondientes a este tema serán dictados en clase.

Capítulo 5

DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES

Dada una matriz cuadrada, a veces es posible transformarla en otra matriz cuadrada con propiedades semejantes cuyos elementos no pertenecientes a la diagonal principal son nulos. Es éste un proceso muy interesante porque permite transformar una matriz cualquiera en otra matriz mucho más fácil de estudiar.

Este mátodo es usado en particular, para reducir la ecuación general de una cónica o una cuádrica a una expresión más reducida.

5.1. MATRICES SEMEJANTES

5.1.1. Matrices semejantes.

Decimos que las matrices cuadradas A y B son semejantes, y lo indicamos en la forma $A \equiv B$, si existe una matriz regular P tal que $A = P \cdot B \cdot P^{-1}$ Como consecuencia de la definición, dos matrices semejantes tienen la misma dimensión y el mismo rango.

La matriz P se llama *matriz de paso* de la semejanza.

Ejemplo 5.1 *Hallar la matriz semejante a* $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 7 & 1 & 11 \\ 2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$ *si la matriz de paso es* $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Basta multiplicar $P \cdot B \cdot P^{-1}$ para hallar la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -8 & 8 & 9 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

Ejemplo 5.2 *Comprobar que las matrices* $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -6 \\ 1 & 9 & 7 \\ 5 & -13 & 13 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ *son semejantes mediante la matriz de paso* $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

Se puede hacer como en el ejercicio anterior o teneiendo en cuenta que $A = P \cdot B \cdot P^{-1} \to A \cdot P = P \cdot B$. Por lo tanto,

$$A \cdot P = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -6 \\ 1 & 9 & 7 \\ 5 & -13 & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 8 & 2 & 3 \\ 8 & 0 & -5 \end{pmatrix} = P \cdot B$$

5.1.2. Relación de equivalencia

La semejanza de matrices es una relación de equivalencia en el conjunto de las matrices cuadradas de orden n. Es decir, la semejanza de matrices verifica las propiedades:

- Reflexiva: $A \equiv$ A: toda matriz es semejante a sí misma.
  Dem. $A = I \cdot A \cdot I^{-1} \rightarrow A \equiv A$

- Simétrica: $A \equiv B \rightarrow B \equiv A$: si una matriz es semejante a otra, la segunda es semejante a la primera.
  Dem. $A \equiv B \rightarrow A = P{\cdot}B{\cdot}P^{-1} \rightarrow B = P^{-1}{\cdot}A{\cdot}P = Q{\cdot}A{\cdot}Q^{-1} \rightarrow B \equiv A$

- Transitiva: $A \equiv B$ y $B \equiv C \rightarrow A \equiv C$: si una matriz es semejante a otra y ésta lo es a una tercera, la primera matriz es semejante a la tercera.
  Dem. $A \equiv B \rightarrow A = P \cdot B \cdot P^{-1};\; B \equiv C \rightarrow B = Q \cdot C \cdot Q^{-1}$
  $\rightarrow A = P \cdot Q \cdot C \cdot Q^{-1} \cdot P^{-1} = (PQ) \cdot C \cdot (PQ)^{-1} \rightarrow A \equiv C$

Como consecuencia de esta relación de equivalencia, el conjunto de las matrices cuadradas del mismo orden queda dividido en clases de equivalencia que son los conjuntos de todas las matrices que son semejantes entre sí. De donde resulta que una matriz cuadrada puede ser sustituida por cualquier otra matriz que sea semejante a ella.

5.1.3. Propiedades de las matrices semejantes.

1. Dos matrices semejantes son del mismo orden.
   Dem. Si $A \equiv B$ y $orden(B) = n$, entonces P ha de ser una matriz regular de orden n para poder multiplicarla por B, por lo que $orden(P \cdot B \cdot P^{-1}) = n = orden(A)$.

2. Dos matrices semejantes tienen el mismo determinante.
   Dem. $A \equiv B \rightarrow A = P{\cdot}B{\cdot}P^{-1} \rightarrow det(A) = det(P){\cdot}det(B){\cdot}det(P^{-1}) = det(B)$ puesto que $det(P) \cdot det(P^{-1}) = det(P \cdot P^{-1}) = det(I) = 1$

3. Dos matrices semejantes tienen el mismo rango.
   Es consecuencia de la propiedad anterior.

4. Dos matrices semejantes tienen la misma traza (lo demostraremos más adelante).

5. Si $A \equiv B$ entonces $A^n \equiv B^n$.
   Dem. Si $A \equiv B \to A = P \cdot B \cdot P^{-1}$
   $A^2 = (P \cdot B \cdot P^{-1})(P \cdot B \cdot P^{-1}) = P \cdot B \cdot (P^{-1} \cdot P) \cdot B \cdot P^{-1} = P \cdot B^2 \cdot P^{-1}$
   $A^3 = A^2 \cdot A = (P \cdot B^2 \cdot P^{-1})(P \cdot B \cdot P^{-1}) = P \cdot B^2 \cdot (P^{-1} \cdot P) \cdot B \cdot P^{-1} = P \cdot B^3 \cdot P^{-1}$
   Y así sucesivamente, hasta llegar a $A^n = P \cdot B^n \cdot P^{-1}$ de donde resulta que $A^n \equiv B^n$.

En el caso de las matrices semejantes, para encontrar la matriz regular P tal que $A = P \cdot B \cdot P^{-1}$, basta resolver la ecuación $A \cdot P = P \cdot B$. El problema reside en el hecho de que si A y B son matrices cuadradas de orden n, la matriz P será también de orden n por lo que habrá que resolver un sistema de n^2 ecuaciones con n^2 incógnitas.
No obstante, la matriz de paso P no es única y, de hecho, existen infinitas matrices de paso que transforman una matriz cuadrada en otra matriz semejante a ella.

5.2. AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

En esta sección estudiaremos la forma de hallar una matriz de paso por medio de los autovalores y los autovectores asociados a una matriz cuadrada.

5.2.1. Matriz asociada a un endomorfismo.

Una aplicación lineal de un espacio vectorial en sí mismo se llama *endomorfismo.*

Sea f un endomorfismo de $\mathcal{R}^n$ definido mediante la ecuación $f(u) = v$ donde las componentes del vector $\vec{v}$ vienen expresadas como combinaciones lineales de las componentes del vector $\vec{u}$. En consecuencia, esta ecuación puede escribirse también en la forma $f(u) = A \cdot \vec{u}$ siendo A la matriz asociada al endomorfismo f.

En la práctica, la matriz más simple de calcular asociada a un endomorfismo es la relacionada con la base canónica. Y para ello, basta hallar los coeficientes de las incógnitas que intervienen en la ecuación del endomorfismo.

Ejemplo 5.3 *Hallar una matriz asociada al endomorfismo de $\mathcal{R}^3$ definido por la ecuación $f(x, y, z) = (2x - 3y + z, x - 2y - z, x - y + 2z)$*

La forma matricial de esta ecuación es $f(\vec{u}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ por lo que la matriz del endomorfismo es $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Ejemplo 5.4 *Hallar la matriz asociada al endomorfismo de $\mathcal{R}^4$ definido por $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1+x_2-2x_3+2x_4, x_1+3x_2-x_4, 3x_1+2x_2-x_3, x_1+x_3-x_4)$*

Según la indicación anterior, una matriz del endomorfismo es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

5.2.2. Autovalores y autovectores.

Se dice que λ es un *autovalor* asociado al endomorfismo f si existe un vector $\vec{u} \neq \vec{0}$ tal que $f(\vec{u}) = \lambda \cdot \vec{u}$. El vector $\vec{u}$ se llama *autovector* asociado al autovalor λ.

Los autovalores y autovectores también reciben los nombres respectivos de *valores propios* y *vectores propios*.

Como consecuencia de lo indicado en el párrafo anterior, un endomorfismo f de $\mathcal{R}^n$ también se puede indicar en la forma $f(\vec{u}) = A \cdot \vec{u}$. Pero como por otra parte, es $f(\vec{u}) = \lambda \cdot \vec{u}$ siendo $\vec{u} \neq \vec{0}$ el autovector asociado al autovalor λ, de ambas ecuaciones se deduce que $A \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u}$ de donde resulta la ecuación matricial $(A - \lambda I)\vec{u} = \vec{0}$. Pero esta ecuación matricial no es más que un Sistema Homogéneo Compatible Indeterminado por lo que admitirá alguna solución distinta de la trivial si el determinante de la matriz general es nulo, es decir, que necesariamente ha de ser $|A - \lambda I| = 0$.

El desarrollo del determinante del primer miembro origina un polinomio llamado *polinomio característico* de la matriz cuadrada A: $P(\lambda) = |A - \lambda I|$. El grado de este polinomio coincide con el orden de la matriz A. Se llama *ecuación característica* de la matriz A a la ecuación polinómica $|A - \lambda I| = 0$ y sus soluciones son los autovalores de la matriz cuadrada A.

Evidentemente estas soluciones pueden ser reales o complejas, aunque en este curso nos ceñimos solamente a las soluciones reales. A su vez, estas soluciones reales pueden ser simples o múltiples, por lo que los autovalores asociados a una matriz cuadrada son también simples o múltiples. El orden de mul-

tiplicidad de una raíz característica se llama *multiplicidad algebraica* de ese autovalor, y se suele representar por α. En caso de ser un autovalor simple, no es necesario indicar que $\alpha = 1$.
Los vectores propios correspondientes a cada valor propio se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones $(A - \lambda I)\vec{u} = \vec{0}$. El número de autovectores linealmente independientes asociados a un autovalor determinado se llama *multiplicidad geométrica* y se suele indicar por m. En todo endomorfismo (en toda matriz cuadrada) siempre se verifica que m es un número comprendido entre 1 y α. Si λ es un autovalor simple, entonces $\alpha = 1 = m$.

Quizás fuera interesante hacer notar que en el sistema de ecuaciones $(A - \lambda_i I)\vec{u} = \vec{0}$, siempre hay α ecuaciones sobreabundantes (que sobran) por lo que no es necesario tenerlas en cuenta.

Para simplificar los cálculos, se puede tener en cuenta que la matriz $(A - \lambda I)$ se consigue sin más que restar λ a cada elemento de la diagonal principal.

Ejemplo 5.5 *Hallar los autovalores y los autovectores asociados a la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$$

- *Autovalores:* Se obtienen de la ecuación $|A - \lambda I| = 0$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 5 \\ 8 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 48 = 0$$
$$\rightarrow \quad \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4+192}}{2} = \frac{2 \pm 14}{2} \rightarrow \lambda = 8 \wedge \lambda = -6$$

- *Autovectores:* Se obtienen resolviendo el sistema
$$(A - \lambda I)\vec{u} = \vec{0} \rightarrow \begin{pmatrix} 4-\lambda & 5 \\ 8 & -2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Para $\lambda = 8$:

$$\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 8 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \left\{ \begin{array}{c} -4x + 5y = 0 \\ 8x - 10y = 0 \end{array} \right\}$$

$\to \quad y = \dfrac{4}{5}x \to \overrightarrow{e_1} = (5, 4)$

2. Para $\lambda = -6$:

$$\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \left\{ \begin{array}{c} 10x + 5y = 0 \\ 8x + 4y = 0 \end{array} \right\}$$

$\to \quad y = -2x \to \overrightarrow{e_2} = (1, -2)$

Ejemplo 5.6 *Hallar los valores y vectores propios asociados a la matriz*

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *e indicar sus respectivas multiplicidades.*

- *Autovalores*: Se resuelve la ecuación característica $|A - \lambda I| = 0$:

  $$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ -3 & 1-\lambda & 3 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \to (2-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda) = 0 \to$$

  $\lambda = 2,\ \lambda = 1,\ \lambda = -1$, todos ellos simples por lo que sus respectivas multiplicidades algebraicas y geométricas son la unidad: $\alpha = m = 1$.

- *Autovectores*: Se hallan resolviendo el sistema $(A - \lambda I)\vec{u} = \vec{0}$

  1. Para $\lambda = 2$,

  $$(A - 2I)\vec{u} = \vec{0} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to$$

$-3x_1 - x_2 + 3x_3 = 0,\ x_1 - 3x_3 = 0$. Sustituyendo $x_1 = 3x_3$ en la primera ecuación resulta $x_2 = -6x_3$ por lo que un autovector asociado a este autovalor es (para $x_3 = 1$) el (3, –6, 1)

2. Para $\lambda = 1$:

$$(A - I)\vec{u} = \vec{0} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to$$

$x_1 = 0,\ -3x_1 + 3x_3 = 0$. En consecuencia, un autovector asociado a $\lambda = 1$ es el (0, 1, 0)

3. Para $\lambda = -1$:

$$(A + I)\vec{u} = \vec{0} \to \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to$$

$3x_1 = 0,\ -3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \to x_2 = -\frac{3}{2}x_3$. Para $x_3 = 2$ se obtiene el autovector $(0, -3, 2)$ asociado al autovalor $\lambda = -1$

Ejemplo 5.7 *Hallar los autovalores y los autovectores de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$ *e indicar sus multiplicidades respectivas.*

- *Autovalores*: Son las soluciones de la ecuación $|A - \lambda I| = 0$:

  $$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -1 \\ -2 & 1-\lambda & -1 \\ -2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \to -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4 = 0$$ cuyas soluciones son

  $\lambda = -1 (\alpha = 1)$ y $\lambda = 2 (\alpha = 2)$

- *Autovectores*: Son las soluciones del sistema homogéneo $(A - \lambda I)\vec{u} = \vec{0}$ para cada valor de λ.

1. Para $\lambda = -1$ resulta la ecuación $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$,

   de donde se obtiene el sistema homogéneo $\left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{array} \right\}$
   cuya solución es $x_3 = 0,\ x_2 = x_1$ por lo que un autovector asociado es el $\vec{u}_1 = (1, 1, 0)$ y su multiplicidad geométrica es $m_1 = 1$

2. Para $\lambda = 2$ resulta la ecuación $\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$, de

   donde se obtiene el sistema homogéneo $\left\{ \begin{array}{l} -2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 = 0 \end{array} \right\}$
   por lo que $x_2 = x_1,\ x_3 = -3x_1$ siendo un autovector el
   $\vec{u}_2 = (1, 1, -3)$ cuya multiplicidad geométrica es $m_2 = 1$

5.2.3. Propiedades de los autovalores de una matriz cuadrada.

Entre las propiedades de los valores propios de una matriz cuadrada destacamos las siguientes:

1. La traza de una matriz coincide con la suma de sus autovalores.

2. El determinante de una matriz coincide con el producto de sus autovalores.

3. Si $det(A) = 0$, entonces el término independiente del polinomio característico es nulo y $\lambda = 0$ es un autovalor de la matriz A.

4. Si λ es un autovalor de A, también lo es de A^T
   La demostración es trivial puesto que $|A - \lambda I| = |A^T - \lambda I|$

5. Si λ es un autovalor de A y existe A^{-1}, entonces λ^{-1} es un autovalor de A^{-1}.

   Dem.

   Si λ es autovalor de A, entonces $\lambda \neq 0$ puesto que A es invertible, por lo que $\exists \lambda^{-1}$. Como A es invertible, se puede multiplicar la ecuación $A \cdot \vec{u} = \lambda u$ por A^{-1} por la izquierda, obteniéndose $\vec{u} = \lambda A^{-1} \cdot \vec{u}$ y por tanto $\lambda^{-1}\vec{u} = A^{-1}\vec{u}$ por lo que λ^{-1} es una autovalor de A^{-1}

5.2.4. Propiedades de los autovectores de una matriz cuadrada.

Entre las propiedades de los vectores propios, mencionamos las siguientes:

1. Un autovector asociado a un autovalor determinado no es único.

   Dem. Si $\vec{u}$ es un autovector asociado al autovalor λ , se verifica que $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$ por lo que $A(k\vec{u}) = kA\vec{u} = k\lambda\vec{u} = \lambda(k\vec{u})$ lo que indica que $(k\vec{u})$ es también un autovector asociado al autovalor λ. De hecho, hay infinitos autovectores asociados a un autovalor propio que forman un subespacio vectorial del espacio original. Los autovectores que se toman en la práctica son los que forman una base de este subespacio.

2. Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son dos vectores propios asociados al mismo autovalor λ, entonces toda combinación lineal de estos vectores es también un vector propio asociado a dicho valor propio λ.

   Dem. Si $A\vec{u} = \lambda\vec{u} \to A(k\vec{u}) = \lambda(k\vec{u})$. Igualmente, si
   $A\vec{v} = \lambda\vec{v} \to A(k'\vec{v}) = \lambda(k'\vec{v}) \to A(k\vec{u}) + A(k'\vec{v}) = \lambda(k\vec{u}) + \lambda(k\vec{v})$ de donde $A(k\vec{u}+k'\vec{v}) = \lambda(k\vec{u}+k\vec{v})$ y, en consecuencia, $k\vec{u}+k'\vec{v}$ es también un vector asociado al autovalor λ.

3. Si $\vec{u}$ es un vector propio asociado al valor propio λ de la matriz A, si existe A^{-1} entonces $\vec{u}$ es un vector propio asociado al valor propio λ^{-1}

de A^{-1}

4. Ningún vector está asociado a dos autovalores distintos.

   Dem. Si λ y μ son dos valores propios distintos asociados a la matriz A, entonces es $A\vec{u} = \lambda\vec{u}, \;\; A\vec{u} = \mu\vec{u}$ por lo que $\lambda\vec{u} - \mu\vec{u} = (\lambda - \mu)\vec{u} = \vec{0}$ y, en consecuencia, $\lambda = \mu$.

   Como consecuencias de esta propiedad tenemos las tres siguientes:

   a) Los autovectores asociados a autovalores distintos son independientes entre sí

   b) A todo valor propio simple le corresponde un único vector propio independiente.

   c) A todo valor propio de multiplicidad algebraica k le corresponde un número de vectores propios menor o igual que k.

   Esta última propiedad también se enuncia indicando que la dimensión del espacio vectorial generado por el autovalor λ es menor o igual que su multiplicidad algebraica, es decir, siempre se verifica que $m \leq \alpha$.

5.3. DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES CUADRADAS.

Diagonalizar una matriz cuadrada A es encontrar una matriz diagonal D semejante a ella. Mediante este artificio se consigue simplificar la expresión de un endomorfismo de manera que el resultado presente una forma más sencilla de manejar que la forma inicial.

El problema de la diagonalización reside por tanto, no sólo en encontrar la matriz de paso P que liga a dos matrices semejantes, sino en encontrar también una matriz diagonal D de forma que se verifique que $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$

Se dice que una matriz cuadrada A es *diagonalizable* si es semejante a una matriz diagonal. Encontrar una matriz diagonal semejante a una matriz cuadrada (lo que no siempre es posible), es un proceso ciertamente laborioso que precisa de algunos conocimientos preliminares.

5.3.1. Diagonalización de matrices: teorema de la multiplicidad.

Hemos definido la diagonalización de una matriz A como el proceso de encontrar una matriz diagonal D que sea semejante a ella. Se dice entonces que una matriz A es diagonalizable si existe una matriz regular P tal que $A \cdot P = P \cdot D$, siendo D una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal principal son los autovalores.

La matriz P se llama *matriz de paso* y está formada por los autovectores asociados a la matriz A. Pero teniendo en cuenta que estos autovectores son base de un espacio vectorial asociado al autovalor correspondiente y todo espacio vectorial tiene infinitas bases, la matriz de paso no es única.
Ahora bien: para que sea posible el producto $P \cdot D \cdot P^{-1}$ es necesario que P y D sean del mismo orden que A y que P sea una matriz regular, por lo que P debe

estar formada por vectores linealmente independientes. En consecuencia: *La matriz A es diagonalizable si el número de autovectores asociados a cada autovalor determinado (la multiplicidad geométrica del autovalor) coincide con su multiplicidad algebraica:* $m_i = \alpha_i$ *para todo autovalor* λ_i

Una consecuencia inmediata es que si todos los autovalores de una matriz son simples, la matriz es diagonalizable.

Finalmente, y teniendo en cuenta que si una matriz es diagonalizable entonces es semejante a la matriz diagonal, ambas matrices poseen los mismos invariantes:

1. *Invariante lineal*: $A_1 = traza(A) = traza(D)$
2. *Invariante cuadrático*: $A_2 = \sum \lambda_i \lambda_j$
3. *Invariante cúbico*: $A_3 = \sum \lambda_i \lambda_j \lambda_k$

Como consecuencia de las propiedades anteriores es

- $det(A) = det(D)$
- $rango(A) = rango(D)$

Ejemplo 5.8 *Diagonalizar, si es posible, la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ *hallando también una matriz de paso.*

Ecuación característica: $|A - \lambda I| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ 0 & -3-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$
$(1-\lambda)(-3-\lambda)(-3-\lambda) = 0$
Autovalores: $\lambda = 1$ y $\lambda = -3$ $(\alpha = 2)$
Autovectores: se resuelve la ecuación $(A - \lambda I)\vec{u} = \vec{0}$

- Para $\lambda = 1:\ (A - I)\vec{u} = \vec{0} \rightarrow$
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2x_2 - 2x_3 = 0 \\ -4x_2 = 0 \\ x_2 - 4x_3 = 0 \end{array} \right\}$$
de donde resulta $x_2 = x_3 = 0$ por lo que un autovector es el (1, 0, 0)

- Para $\lambda = -3:\ (A + 3I)\vec{u} = \vec{0} \rightarrow$
$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{array} \right\}$$
cuya solución es $x_2 = 0,\ x_3 = 2x_1$ de donde resulta el autovector único (1, 0, 2). Por lo tanto, como la multiplicidad geométrica de $\lambda = -3$ es $m = 1$ mientras que su multiplicidad algebraica es $\alpha = 2 \neq m$, la matriz A no es diagonalizable.

En consecuencia, para saber si una matriz cuadrada es diagonalizable se estudia el número de autovectores asociados a los autovalores de orden de multiplicidad $\alpha > 1$, puesto que si $\alpha = 1$, entonces $m = 1$.

Ejemplo 5.9 *Indicar si es posible diagonalizar la matriz* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ *y en caso afirmativo hallar una matriz de paso. Indicar la relación entre la matriz dada y la matriz diagonal semejante a ella.*

Autovalores: Ecuación característica: $P(\lambda) = |A - \lambda I| = 0 \rightarrow$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -4 \\ 0 & -1-\lambda & 4 \\ 0 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (1-\lambda)(\lambda^2 + 4\lambda - 5) = 0 \rightarrow$$
$$\lambda = 1(\alpha = 2),\ \lambda = -5$$

Autovectores: hay que resolver la ecuación $(A-\lambda I)\vec{u}=\vec{0}$ para los distintos autovalores.

- Para $\lambda=1,\ (A-I)\vec{u}=\vec{0}\rightarrow$
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\rightarrow 2y-4z=0\rightarrow y=2z$$
por lo que hay dos autovectores puesto que la primera componente (x) es libre. Luego como la multiplicidad geométrica coincide con la algebraica, la matriz es diagonalizable.
Para $x=1,\ z=0$ se obtiene el autovector (1, 0, 0)
Para $x=0,\ z=1$ se obtiene el autovector (0, 2, 1)

- Para $\lambda=-5,\ (A+5I)\vec{u}=\vec{0}\rightarrow$
$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & -4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\rightarrow\left\{\begin{array}{l} 6x+2y-4z=0 \\ 4y+4z=0 \end{array}\right\}$$
De la segunda ecuación, $z=-y$ que, sustituida en la primera da $x=-y$. Luego un autovector, para $y=1$, es el (–1, 1, –1)

Por lo tanto, la matriz diagonal semejante a la matriz A es la $D=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -5 \end{pmatrix}$

siendo la matriz de paso $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ de forma que $A=P\cdot D\cdot P^{-1}$

Ejemplo 5.10 *Indicar si es posible diagonalizar la matriz* $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

En caso afirmativo, hallar la matriz diagonal semejante a ella.

Ecuación característica: $det(A - \lambda I) = 0 \rightarrow$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda^4 - 2\lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda - 2 = 0$$

Valores propios: $\lambda = 1 (\alpha = 2)$, $\lambda = \sqrt{2}$, $\lambda = -\sqrt{2}$

Discusión: los dos últimos autovalores son simples por lo que no impiden la diagonalización.

Número de autovectores para $\lambda = 1$, $(A - I)\vec{u} = \vec{0} \rightarrow$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

La tercera ecuación coincide con la segunda. De la primera se obtiene $x_3 = x_1$ y de la segunda, $x_4 = x_2$ por lo que el número de variables independientes (variables del segundo miembro) son 2. Por consiguiente, $m = 2 = \alpha$. Luego, la matriz dada es diagonalizable siendo la matriz diagonal semejante a ella

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \sqrt{2} & \\ & & & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

5.3.2. Diagonalización de matrices: teorema del rango

La matriz cuadrada A_n es diagonalizable si y sólo si para todo autovalor λ de multiplicidad algebraica α se verifica que rango$(A - \lambda I) = n - \alpha$

Para demostrar este teorema, recordemos que el número de ecuaciones cartesianas que definen al subespacio vectorial L coincide con la dimensión del espacio total V menos la dimensión de L: $n^{\underline{o}}$ ec. cart. $= dim(V) - dim(L)$.

Ahora bien: el número de ecuaciones cartesianas independientes coincide con el rango de la matriz en estudio; la dimensión del espacio total $\mathcal{R}^n$ es el orden de la matriz y la dimensión del subespacio asociado al autovalor λ ha de coincidir con la multiplicidad aritmética α para que la matriz sea diagonalizable. Por lo tanto, la matriz A es diagonalizable si se verifica la fórmula $rango(A - \lambda I) = orden(A) - \alpha$ para todo autovalor λ.

Ejemplo 5.11 *Sin hallar los autovectores, comprobar si es diagonalizable la matriz* $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Ecuación característica: $|B - \lambda I| = 0 \to -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0$
Valores propios: $\lambda = 1, \ \lambda = 2 \ (\alpha = 2)$
El autovalor 1 es simple por lo que no interviene en la posible diagonalización de B.

Para $\lambda = 2$ es $rango(B - 2I) = rango \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$, por lo que $rango(B) = orden(B) - \alpha = 3 - 2 = 1$ y en consecuencia, B es diagonalizable.

Ejemplo 5.12 *Estudiar la diagonalización de la matriz* $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ *para los distintos valores del número real a.*

Ecuación característica:
$|C - \lambda I| = (1 - \lambda)(2 - \lambda)(1 - \lambda) = 0 \to \lambda = 2, \ \lambda = 1 (\alpha = 2)$
Para $\lambda = 1$ es $orden(C) - \alpha = 3 - 2 = 1$ mientras que

$$rango(C - I) = rango \begin{pmatrix} 0 & 3 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \iff a = 0$$: C es diagonalizable si y sólo si $a = 0$

Otra forma de resolver el problema es por el número de autovectores asociados a todo autovalor múltiple:
Para $\lambda = 1$, los autovectores son

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3y + a\ z = 0 \\ y = 0 \end{array} \right\} \rightarrow a\ z = 0$$

- Si $z = 0$, el único autovector es el $(1, 0, 0)$ por lo que lo matriz no es diagonalizable.
- Si $a = 0$, entonces $y = 0$ pero x y z son dos variables libres por lo que dos autovectores pueden ser el $(1, 0, 0)$ y el $(0, 0, 1)$ y en tal caso la matriz sí es diagonalizable.

Diagonalización de matrices simétricas

Se puede demostrar que, *en toda matriz simétrica, coinciden las multiplicidades geométrica y algebraica de cualquier valor propio.*
En consecuencia, *toda matriz simétrica es diagonalizable.*

5.4. DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES. EJERCICIOS PROPUESTOS

5.4.1. Enunciados

1. Hallar los autovalores y los autovectores a la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

2. Hallar los autovalores y los autovectores de la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3. ¿Es diagonalizable la matriz $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$?

4. Estudiar para qué valores del parámetro k es diagonalizable la matriz $E = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & k \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

5. ¿Es diagonalizable la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$?

   En caso de serlo, indicar una matriz diagonal semejante a ella.

6. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$,

   a) Hallar sus valores propios

b) Hallar sus vectores propios

c) ¿Es diagonalizable?

d) Hallar la matriz de paso P

e) Expresar la matriz de los autovalores en función de las matrices A y P

7. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

   a) ¿ Es diagonalizable la matriz A?.

   b) Hallar el polinomio característico de la matriz A.

   c) Hallar sus autovalores.

   d) Indicar la multiplicidad aritmética de cada autovalor.

   e) Aplicar el teorema de los rangos para comprobar que la matriz es diagonalizable.

   f) Hallar una base de autovectores.

   g) Indicar la multiplicidad geométrica de cada autovalor.

   h) Aplicar el teorema de las multiplicidades para comprobar que la matriz es diagonalizable.

   i) Hallar una matriz de paso P.

   j) Indicar una matriz diagonal D semejante a la matriz del endomorfismo.

   k) Expresar una relación entre las matrices A, P y D.

8. Indicar si las siguientes matrices son diagonalizables y, en caso de serlo, indicar una matriz diagonal semejante:

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
- $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

5.4.2. Diagonalización de matrices. Soluciones

1. $\lambda = -1 \to \vec{u} = (1, 0, 0)$, $\lambda = 3 \to \vec{v} = (1, 0, 2)$

2. $\lambda = -1 \to \vec{u}_1 = (1, -1, 1)$, $\lambda = 2 \to \vec{u}_2 = (1, 0, -1) \wedge \vec{u}_3 = (0, 1, 1)$

3. C no es diagonalizable

4. E es diagonalizable si $k = 0$

5. M es simétrica por lo que es diagonalizable.

   Una matriz diagonal semejante a M es $\begin{pmatrix} 6 & & & \\ & 6 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

6. *a*) $\lambda = 2$ doble y $\lambda = 8$

   b) $\vec{e}_1 = (-1, 0, 1)$, $\vec{e}_2 = (-1, 1, 0)$, $\vec{e}_3 = (1, 1, 4)$

   c) Es diagonalizable porque la multiplicidad geométrica coincide con la aritmética

   d) $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

   e) $A = P \cdot D \cdot P^{-1} \to D = P^{-1} \cdot A \cdot P$ siendo

   $D = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 8 \end{pmatrix}$

7. *a*) A es simétrica por lo que es diagonalizable.

   b) $P(\lambda) = -\lambda^3 + 12\lambda - 16$

   c) $\lambda = -4, \quad \lambda = 2, \quad \lambda = 2$

   d) Para $\lambda = -4$ es $\alpha = 1$ y para $\lambda = 2$ es $\alpha = 2$

e) Para $\lambda = 2$ es $\alpha = orden(A) - rango(A - 2I) = 2$

f) $B = \{\{1, 2, -1\}, \{1, 0, 1\}, \{0, 1, 2\}\}$

g) $m(-4) = 1$ y $m(2) = 2$

h) $\alpha = 2 = m$

i) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

j) $D = \begin{pmatrix} -4 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$

k) $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$

8. La única matriz diagonalizable es la B siendo $D = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 3 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ la matriz diagonal.

Capítulo 6

DERIVACIÓN DE FUNCIONES

Toda actividad humana implica un movimiento. Y la derivada está asociada al movimiento. Por lo tanto, el concepto de derivada es uno de los más importantes de la Matemática.

En particular, la derivada de una función tiene especial importancia en el estudio del crecimiento de una función y de su concavidad. Pero se puede decir sin que ello implique exageración, que el manejo de la derivada de una función es condición absolutamente necesaria para poder comprender prácticamente cualquier tema de Cálculo Matemático, como veremos en los capítulos posteriores.

Dado que el estudio de la derivada se ha iniciado en cursos anteriores, en éste se hará un repaso a los conocimientos adquiridos y se hará mayor hincapié en un capítulo posterior al caso de la derivación de las funciones de varias variables.

6.1. LAS FUNCIONES MATEMÁTICAS

En esta sección estudiaremos los distintos tipos de funciones que se usan en Matemáticas así como la derivación de todo tipo de función matemática. Hay que hacer notar en este momento que no es posible avanzar en Matemáticas si no se tiene un conocimiento profundo de la derivación de funciones.

6.1.1. Las funciones matemáticas.

En este curso sólo hablaremos de las funciones reales de variable real o simplemente funciones.

Una función matemática es una aplicación de un subconjunto $D \subset \mathcal{R}$ en un subconjunto $E \subset \mathcal{R}$: $y = f(x), \ x \in D, \ y \in E$. El conjunto D se llama Dominio o Campo de existencia de la función y E es el Rango o Recorrido.

Existen distintas formas de clasificar las funciones matemáticas y una de ellas es la que se presenta a continuación.

- *Función potencial.* Es de la forma $f(x) = x^n$ siendo n un número natural.

- *Función irracional.* La función irracional es la función inversa o recíproca de la función potencial y se indica en la forma $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$. Las funciones irracionales más corrientes son aquéllas en las que el índice es 2, es decir $f(x) = \sqrt{g(x)}$.

- *Función entera o polinómica* es toda combinación de funciones potenciales de distinto grado. Tiene la forma $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$. El grado de una función entera es el mayor de los exponentes de sus potencias.

  Las funciones polinómicas suelen representarse como $P(x)$, $Q(x)$, etc.

- *Función racional* es el cociente de dos funciones enteras: $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$

- *Función exponencial* es de la forma $f(x) = a^{g(x)}$ siendo a un número real estrictamente positivo distinto de 1: $a \in \mathcal{R}^+ - \{0, 1\}$. Las más conocidas son aquéllas en las que la base es el número 10 ó el número irracional e.

- *Función logarítmica* es la función inversa de la función exponencial: $f(x) = \log_a g(x)$, donde a es un número positivo que no puede ser 0 ni 1. Si la base es el número e, el logaritmo se llama *neperiano o natural* y se representa como
  $f(x) = \ln g(x)$. Y si $a = 10$, el logaritmo se dice *decimal* y se representa como $f(x) = \log g(x)$. El logaritmo en base a de un número b se puede calcular en la forma $log_a b = \dfrac{logb}{loga}$.
  A partir de la definición del logaritmo, es fácil deducir que los números negativos no tienen logaritmo real y que $\ln 0 = -\infty$, $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$, $\ln(e^n) = n$, $\ln \infty = \infty$.

  Una propiedad muy interesante de las funciones logarítmicas es que el logaritmo de un producto es la suma de los logaritmos de los factores, es decir: $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$. Como consecuencia, $\ln(a^n) = n \cdot \ln a$ y $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$.

- *Funciones trigonométricas*: son el seno, coseno, tangente, etc. y se representan como $f(x) = \operatorname{sen} x,\ \cos x,\ \tan x,\ \text{cotan } x,\ \sec x,\ \text{cosec } x$, siendo la secante, la cosecante y la cotangente de un ángulo los valores inversos del coseno, seno y de la tangente, respectivamente: $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, $\text{cosec } x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$ y $\text{cotan } x = \frac{1}{\tan x}$.

  Además de la relación $\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, existen tres fórmulas fundamentales en Trigonometría que nos permiten hallar prácticamente cualquier fórmula trigonométrica:

1. Fórmula fundamental: $\cos^2 a + \operatorname{sen}^2 a = 1$
2. Seno del ángulo suma: $\operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen} a \cos b \pm \cos a \operatorname{sen} b$
3. Coseno del ángulo suma: $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

De esta forma, si en la segunda y en la tercera ecuaciones se hace $b = a$, resultan respectivamente, el seno y el coseno del ángulo doble: $\operatorname{sen}(2a) = 2 \operatorname{sen} a \cos a \qquad \cos(2a) = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$.
Y entre esta última y la primera se puede deducir el seno y el coseno del ángulo mitad: $\operatorname{sen}^2 a = \dfrac{1 - \cos(2a)}{2} \qquad \cos^2 a = \dfrac{1 + \cos(2a)}{2}$
Las funciones inversas o recíprocas de las anteriores son las respectivas funciones arco: $\operatorname{sen} x = a \to x = \operatorname{arc\,sen} a$, $\cos x = a \to x = \operatorname{arc\,cos} a$, etc.
La expresión $\operatorname{arc\,sen} a$ se lee arco seno de a e indica el ángulo cuyo seno es a.

- *Funciones hiperbólicas* son el seno hiperbólico, coseno hiperbólico, etc. y sus funciones inversas son el argumento seno hiperbólico, etc. y las desarrollaremos más detenidamente en el siguiente párrafo.

Las funciones hiperbólicas.

Si $i = \sqrt{-1}$, la fórmula de Euler establece que $e^{it} = \cos t + i\ \operatorname{sen} t$ y a partir de esta ecuación es fácil deducir que $\cos t = \dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2}$,
$\operatorname{sen} t = \dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$. Las funciones trigonométricas seno y coseno están relacionadas con la circunferencia unidad de ecuación $y^2 + x^2 = 1$ pues, si $y = \cos t$ y $x = \operatorname{sen} t$, entonces se verifica la fórmula fundamental de la trigonometría $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$.

Se definen las *funciones hiperbólicas coseno y seno* como

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \qquad \operatorname{senh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

También pueden indicarse en la forma $Ch\ t$, $Sh\ t$.
Las funciones hiperbólicas están relacionadas con la hipérbola equilátera unidad cuya ecuación es $y^2 - x^2 = 1$ ya que la fórmula fundamental para las funciones hiperbólicas toma la forma $\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1$.

Se define la *tangente hiperbólica* como el cociente $\tanh t = \dfrac{\operatorname{senh} t}{\cosh t}$ por lo que $\tanh t = \dfrac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1}$. De forma semejante a las funciones trigonométricas se definen las restantes funciones hiperbólicas, cotangente, secante y cosecante.

Otras relaciones hiperbólicas son las siguientes:

- $\operatorname{senh}(a+b) = \operatorname{senh} a \cosh b + \operatorname{senh} b \cosh a \to \operatorname{senh}(2t) = 2 \operatorname{senh} t \cdot \cosh t$
- $\cosh(a+b) = \cosh a \cosh b + \operatorname{senh} a \operatorname{senh} b \to \cosh(2t) = \cosh^2 t + \operatorname{senh}^2 t$

Definición 6.1 *Las funciones inversas de las anteriores son el argumento seno hiperbólico, el argumento coseno hiperbólico, etc. y se representan de la forma:* $\arg \operatorname{senh} t$*,* $\arg\cosh t$*, etc.*

Es claro que tanto las funciones hiperbólicas seno, coseno, etc. como sus funciones inversas argumento seno, etc. no son tan conocidas como el resto de las funciones indicadas en el párrafo anterior. La razón para que esto sea así es que las funciones hiperbólicas pueden expresarse como una combinación de funciones exponenciales en la forma indicada en la definición. Y en cuanto a las funciones hiperbólicas inversas, se puede demostrar que están relacionadas con las funciones logarítmicas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \arg \operatorname{senh} t &= \ln(t + \sqrt{t^2+1}) \\ \arg \cosh t &= \ln(t + \sqrt{t^2-1}) \\ \arg \tanh t &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+t}{1-t} \end{aligned}$$

6.2. DERIVACIÓN

6.2.1. Continuidad

Se dice que la función $y = f(x)$ es continua en un punto $x_0 \in D$ si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Una función no continua en un punto se dice que es discontinua. Por tanto, si x_0 es un punto de discontinuidad de la función $f(x)$, entonces o bien no existe $\lim_{x \to x_0} f(x)$ o bien $\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$.

Un teorema interesante sobre las funciones continuas es el el *Teorema de Bolzano: Si* $f(x)$ *es continua en un intervalo cerrado* $[a, b]$ *y verifica que* $f(a) \cdot f(b) < 0$*, entonces existe algún punto del interior del intervalo en el que la función se anula*

6.2.2. Derivadas.

Se define la derivada de una función $f(x)$ continua en un punto $P(x_0, f(x_0))$ como $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x + x_0) - f(x)}{x - x_0}$.

La derivada de una función $y = f(x)$ en un punto (x_0, y_0) de la misma, representa el coeficiente angular de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en dicho punto:

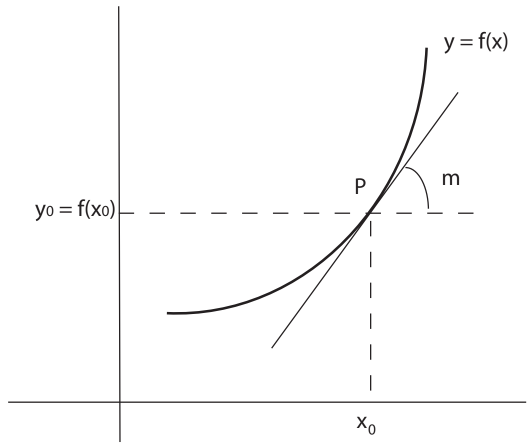


Figura 6.1: Interpretación geométrica de la derivada

La derivada de una función en un punto genérico se llama función derivada o simplemente, derivada y se representa como $f'(x)$, $\frac{df(x)}{dx}$, $D(f(x))$, $\dot{f}$

A continuación se indica una tabla de las derivadas de las funciones elementales.

$$
\begin{aligned}
D(k) &= 0 \\
D(x^n) &= n\,x^{n-1} \rightarrow D(1) = 0,\ D(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
D(a^x) &= a^x \ln a \rightarrow D(e^x) = e^x \\
D(\log_a x) &= \frac{1}{x \ln a} \rightarrow D(\ln x) = \frac{1}{x} \\
D(\operatorname{sen} x) &= \cos x \\
D(\cos x) &= -\operatorname{sen} x \\
D(\tan x) &= \frac{1}{\cos^2 x} \\
D(\cot x) &= -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \\
D(\operatorname{arc\,sen} x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
D(\arccos x) &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
D(\arctan x) &= \frac{1}{1+x^2}\\
D(arc\cot x) &= -\frac{1}{1+x^2}\\
D(\operatorname{senh} x) &= \cosh x\\
D(\cosh x) &= \operatorname{senh} x\\
D(\tanh x) &= \frac{1}{\cosh^2 x}\\
D(\coth\ x) &= \frac{1}{\operatorname{senh}^2 x}\\
D(\arg\operatorname{senh} x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\\
D(\arg\cosh x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\\
D(\arg\tanh x) &= \frac{1}{1-x^2}
\end{aligned}$$

Por último, recordemos algunas de las propiedades de la derivación de funciones. Suponiendo que u y v son funciones de x y que a y b son constantes, y si representamos por f' la derivada de la función $f(x)$ con respecto a x, se verifica:

1. Derivada de una suma de funciones: $D(u+v) = u' + v'$
2. Derivada de un producto de funciones: $D(u \cdot v) = u' \cdot v + u \cdot v'$
3. Derivada del producto de una constante por una función: $D(k \cdot f(x)) = k \cdot D(f(x))$
4. Derivada de un cociente de funciones: $D\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
5. Derivada de una función de función (regla de la cadena): $D(u(v(x))) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Ejemplo 6.1 *Derivar las siguientes funciones:*

1. $f(x) = e^{-x^2}(4x^2 + 3x - 1)$

   Es la derivada de un producto de funciones por lo que
   $f'(x) = e^{-x^2}(-2x)(4x^2 + 3x - 1) + e^{-x^2}(8x + 3)$

2. $f(x) = \dfrac{\ln(x^2 - 2x - 5)}{\cos(3x - 2)}$

   Es la derivada de un cociente:

   $$f'(x) = \frac{\frac{2x-2}{x^2-2x-5} \cdot \cos(3x - 2) - \ln(x^2 - 2x - 5)(-3\operatorname{sen}(3x - 2))}{\cos^2(3x - 2)}$$

3. $y(x) = 3^{\sqrt{x^2-1}}(4x + 1)$

   En este caso: $y'(x) = 3^{\sqrt{x^2-1}} \ln 3(2x)(4x + 1) + 3^{\sqrt{x^2-1}}4$

4. $y = \sqrt{\dfrac{2x - 1}{x^2 + 2}}$

   Es la derivada de la raíz de un cociente:

   $$y' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{2x-1}{x^2+2}}} \cdot \frac{2(x^2 + 2) - (2x - 1)2x}{(x^2 + 2)^2}$$

5. $y = \operatorname{arc\,sen}\left(\dfrac{x - 1}{x + 1}\right)$

   Entonces $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}} \cdot \dfrac{1(x + 1) - (x - 1)1}{(x + 1)^2} = \dfrac{1}{(x + 1)\sqrt{x}}$

6. $g(t) = \sqrt[3]{\operatorname{sen}(t^2)}$

   En este caso es $g'(t) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2(t^2)}} \cos(t^2)(2t)$

Entre las aplicaciones del concepto de derivada citaremos su aplicación al cálculo de las ecuaciones de las rectas tangente y normal a una curva en un punto y la Regla de l'Hôpital.

6.2.3. Rectas tangente y normal a una curva

Sea $y = f(x)$ una curva y $P(x_0, f(x_0))$ un punto de la misma. Puesto que la derivada de una función en un punto representa el coeficiente angular de la recta tangente a la curva en dicho punto, la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto P es $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. La recta perpendicular a la recta tangente en el punto P se llama recta *normal* a la curva y su ecuación es $y - f(x_0) = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$

Ejemplo 6.2 *Hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva* $f(x) = \ln(x^2 + 3x - 4)$ *en el punto de abscisa 2.*

El punto de la curva es $(2, f(2)) = (2, \ln 6)$. Además:
$f'(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+3x-4} \to f'(2) = \dfrac{7}{6}$ por lo que las ecuaciones solicitadas son:

- Recta tangente: $y - \ln 6 = \frac{7}{6}(x - 2)$
- Recta normal: $y - \ln 6 = -\frac{6}{7}(x - 2)$

6.2.4. Regla de l'Hôpital.

Hay expresiones matemáticas que se verifican para un número infinito de valores como puede ser $\frac{0}{0}$. Estas expresiones constituyen lo que se llaman indeterminaciones. Una indeterminación es una expresión matemática cuyo valor exacto sólo puede ser encontrado tras algún artificio que elimine dicha indeterminación. Exsiten 7 indeterminaciones: $\frac{0}{0}, \frac{\infty/\infty}{,}\infty - \infty, 0 \cdot \infty, 0^0, 0^\infty, 1^\infty$. La regla de l'Hôpital es un procedimiento sencillo que suele utilizarse para resolver estas indeterminaciones y su enunciado es como sigue:
Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones derivables en $x = a$. Si $f(a) = g(a) = 0$ y $g'(a) \neq 0$, entonces $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Teniendo en cuenta que $\infty = \frac{1}{0}$ y que una diferencia, un producto o una potencia pueden ser transformadas en cociente, la regla de L'Hôpital también es aplicable al resto de las indeterminaciones.

Ejemplo 6.3 *Aplicar la regla de l'Hôpital para calcular los siguientes límites:*

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

   $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{1} = 1$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x + \operatorname{sen}(2x)}{x - \operatorname{sen}(2x)}$

   $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 + 2\cos(2x)}{1 - 4\cos(2x)} = \dfrac{3}{-3} = -1$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln \operatorname{sen} x}{\ln \operatorname{tg} x}$

   $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{\frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\cos^2 x \cdot \cos x} = 1$

4. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sec x}{1 + \operatorname{tg} x}$

   Calculemos previamente la derivada de la función secante:
   $D(\sec x) = D\left(\dfrac{1}{\cos x}\right) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$. Por tanto:
   $L = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}} = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x = 1$

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$

   $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{6x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{6} = \dfrac{1}{6}$

   Hemos aplicado tres veces la regla de l'Hôpital.

6.3. DERIVACIÓN DE FUNCIONES

6.3.1. Enunciados

1. Derivar las siguientes funciones potenciales:

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= 5x^2 - 7x + 4 \\
f_2(x) &= 8x^{-5} - 7x^{-3} + 4x^{-2} - 6x - 9 \\
f_3(x) &= 2x^{\frac{3}{5}} - 7x^{\frac{5}{3}} + 4x^{-\frac{2}{7}} - 6x^{-\frac{5}{2}} \\
f_4(x) &= 5x^{-\frac{3}{4}} + 6x^{-\frac{3}{8}} - 2x^{-\frac{5}{6}} - 4x^{\frac{5}{9}} \\
f_5(X) &= (2x-3)^4 \\
f_6(x) &= (3x^2 - 2x + 8)^3
\end{aligned}
$$

2. Derivar las siguientes funciones racionales:

$$
\begin{aligned}
g_1(x) &= \frac{x^2 - x}{2x^2 + x + 3} \\
g_2(x) &= \frac{2x - 1}{(1-3x)^2} \\
g_3(t) &= \frac{t^2 - t - 1}{(t^2 + t)^2} \\
g_4(x) &= \frac{3x^2 - x}{3x^2 + x + 1}
\end{aligned}
$$

3. Derivar las siguientes funciones logarítmicas:

$$
\begin{aligned}
h_1(x) &= \ln\left(\frac{2x^2 - 3x}{3x - 2}\right) \\
h_2(x) &= \ln\left(\frac{\operatorname{sen}(2x)}{\cos(3x)}\right) \\
h_3(x) &= \ln(e^{3x-4} + x^2)^4 \\
h_4(t) &= \ln\sqrt[3]{4 - 5t - 3t^2}
\end{aligned}
$$

4. Hallar las siguientes derivadas en los valores que se indican:

$$\begin{aligned}
i_1(x) &= \frac{x^2+x-1}{3x^2-x-2} \qquad \text{en } x=2\\
i_2(x) &= \frac{3x^3+2x^2-1}{x^2+x-2} \qquad \text{en } x=0\\
i_3(t) &= \frac{t-2t^2}{t-t^2+3} \qquad \text{en } t=-1\\
i_4(y) &= \frac{1-y}{(y^2-3y+1)^2} \qquad \text{en } y=1\\
i_5(x) &= e^{x^2-x} \qquad \text{en } x=1\\
i_6(x) &= \cos((2x^2-2x-3)\frac{\pi}{3}) \qquad \text{en } x=2
\end{aligned}$$

5. Hallar los valores que anulan la derivada de la función

$$\begin{aligned}
j_1(x) &= \frac{2x^2-5x+3}{x^2+x-1}\\
j_2(t) &= \frac{t^2+2t-2}{2t^2-4t+5}\\
j_3(x) &= \frac{3x^2-12x+5}{x^2-4x+2}\\
j_4(x) &= e^{-x^2}x\\
j_5(x) &= e^{-2x+1}(3-4x)
\end{aligned}$$

6. Hallar la segunda derivada de

$$\begin{aligned}
k_1(x) &= \frac{12x-5}{4x+2}\\
k_2(x) &= \frac{2x^2-5x-3}{x-1}\\
k_3(t) &= \frac{t-3}{2t^2-4t+5}\\
k_4(x) &= e^{-x^2}x\\
k_5(x) &= e^{-2x+1}(3-4x)
\end{aligned}$$

7. Hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a las siguientes curvas:

$$
\begin{aligned}
l_1(x) &= e^{-2x+1}(2-3x),\ x=1\\
l_2(x) &= e^{-x^2}x,\ x=-2\\
l_3(x) &= \operatorname{sen}^4\left(3x+\frac{\pi}{4}\right),\ x=0\\
l_4(x) &= \tan^2\left(\frac{\pi-x}{2x+3}\right),\ x=0\\
l_5(x) &= \operatorname{arc\,sen}^2\ln(e^{1-x}+x^2-x),\ x=1
\end{aligned}
$$

6.3.2. RESPUESTAS:

1.

$$\begin{aligned}
f_1'(x) &= 10x - 7\\
f_2'(x) &= -40x^{-6} + 21x^{-4} - 8x^{-3} - 6\\
f_3'(x) &= \frac{6}{5}x^{-\frac{2}{5}} - \frac{35}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{8}{7}x^{-\frac{9}{7}} + 15x^{-\frac{7}{2}}\\
f_4'(x) &= -\frac{15}{4}x^{-\frac{7}{4}} - \frac{9}{4}x^{-\frac{11}{8}} + \frac{5}{3}x^{-\frac{11}{6}} - \frac{20}{9}x^{-\frac{4}{9}}\\
f_5'(x) &= 4(2x-3)^3 2\\
f_6'(x) &= 3(3x^2 - 2x + 8)^2(6x - 2)
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
g_1'(x) &= \frac{3x^2 - +2x - 3}{(2x^2 + x - 3)^2}\\
g_2'(x) &= \frac{4 - 6x}{(1 - 3x)^3} \qquad\qquad \text{(simplificar)}\\
g_3'(t) &= \frac{-2t^3 + 3t^2 + 5t + 2}{(t^2 + t)^3}\\
g_4'(x) &= \frac{6x^2 + 6x - 1}{(3x^2 + x + 1)^2}
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
h_1'(x) &= \frac{6x^2 - 8x + 6}{6x^3 - 13x^2 + 6x}\\
h_2'(x) &= 2\cot(2x) - 3\tan(3x)\\
h_3'(x) &= 4\ \frac{3e^{3x-4} + 2x}{e^{3x-4} + x^2}\\
h_4'(t) &= \frac{1}{3}\ \frac{-5 - 6t}{4 - 5t - 3t^2}
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
i_1'(2) &= \frac{13}{64} \\
i_2'(0) &= \frac{1}{4} \\
i_3'(-1) &= -14 \\
i_4'(1) &= -1 \\
i_5'(1) &= 1 \\
i_6'(2) &= -\frac{\pi\sqrt{3}}{3}
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
j_1'(x) &= 0 \to x = \frac{5 \pm \sqrt{11}}{7} \\
j_2'(t) &= 0 \to t = \frac{11 \pm \sqrt{79}}{6} \\
j_3'(x) &= 0 \to x = 2 \\
j_4'(x) &= 0 \to x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\
j_5'(x) &= 0 \to x = \frac{5}{4}
\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
k_1''(x) &= \frac{28}{(2x+1)^3} \\
k_2''(x) &= \frac{-12}{(x-1)^3} \\
k_3''(x) &= \frac{8t^3 - 72t^2 + 84t + 4}{(2t^2 - 4t + 5)^3} \\
k_4''(x) &= e^{-x^2}(4x^3 - 6x) \\
k_5''(x) &= e^{-2x+1}(28 - 16x)
\end{aligned}$$

7.

Tangente	Normal
$y + e^{-1} = -e^{-1}(x-1)$	$y + e^{-1} = e(x-1)$
$y + 2e^{-4} = -7e^{-4}(x+2)$	$y + 2e^{-4} = \frac{1}{7}e^{4}(x+2)$
$y - \frac{1}{4} = \frac{3\pi}{2}x$	$y - \frac{1}{4} = -\frac{2}{3\pi}x$
$y - 3 = -\frac{(2\pi+3)\sqrt{3}}{18}x$	$y - 3 = \frac{18}{(2\pi+3)\sqrt{3}}x$
$y = x$	$y = -x$

Capítulo 7

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

En este capítulo estudiaremos la representación gráfica de funciones planas según que éstas vengan definidas en forma cartesiana explícita, forma paramétrica o forma polar.

Puesto que la representación de curvas planas expresadas por medio de una ecuación cartesiana en forma explícita ya se ha estudiado en cursos anteriores, en éste sólo se hará un breve repaso a la representación gráfica de este tipo de funciones.

La representación de funciones en forma paramétrica se hace de una forma más pormenorizada aunque sin ser exhaustiva.

Finalmente, se hará una introducción a la representación gráfica de funciones expresadas en forma polar.

7.1. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES CARTESIANAS EXPLÍCITAS

Se dice que una función es explícita si tiene la forma $y = f(x)$. Toda función de esta forma representa una curva del plano formada por la infinidad de puntos de coordenadas $(x, f(x))$.

Para representar una función explícita seguiremos los pasos que se indican a continuación, dejando bien claro que no es *absolutamente* necesario seguir todos y cada uno de los apartados, aunque sí es convenient6e seguir el mayor número posible de ellos.

A veces, la complejidad de alguna función hace verdaderamente difícil resolver alguno de los apartados que se indicarán por lo que se debe dejar paso a la experiencia en la resolución de este tipo de ejercicios y así tener una idea aproximada de la forma de la función.

1. **Dominio:** El dominio de una función $f(x)$ es el conjunto de números reales para los que existe $f(x)$. A continuación se indica el dominio de algunas funciones:

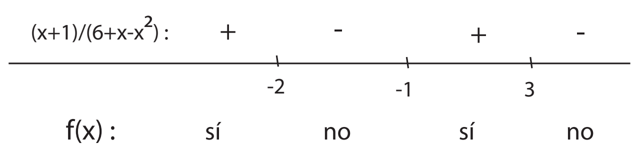
Función	**Dominio**
Entera: $f(x) = P(x)$	$D = \mathcal{R}$
Racional: $\frac{P(x)}{Q(x)}$	$D = \mathcal{R} - \{\text{raíces de } Q(x)\}$
Irracional: $\sqrt{f(x)}$	$D = \{x \in \mathcal{R} : f(x) \geq 0\}$
Logarítmica: $\ln(f(x))$	$D = \{x \in \mathcal{R} : f(x) > 0\}$
Exponencial: $e^{f(x)}$	Coincide con el dominio de $f(x)$, más los valores en los que $f(x) \to -\infty$
Trigonométrica: $\text{sen}(f(x))$ o $\cos(f(x))$	Coincide con el dominio de $f(x)$

Ejemplo 7.1 *Hallar el dominio de la función* $f(x) = \frac{x^2-1}{2x^2+5x-3}$

Es una función racional por lo que debemos hallar las raíces del denominador: $2x^2 + 5x - 3 = 0 \rightarrow x = -3 \wedge x = \frac{1}{2}$ por lo que el dominio de esta función es $D = \mathcal{R} - \{-3, \frac{1}{2}\}$

Ejemplo 7.2 *Hallar el dominio de la función* $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{6+x-x^2}\right)$

El argumento de la función logarítmica ha de ser estrictamente positivo. Para encontrarlo, hay que tener en cuenta que las raíces del numerador y del denominador dividen a la recta real en intervalos de existencia de la función: $x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$; $6 + x - x^2 = 0 \rightarrow x = -2 \wedge x = 3$



Por lo tanto, el dominio de esta función es $D = (-\infty, -2) \cup (-1, 3)$.

2. **Asíntotas:**
   Se dice que una recta es asíntota de una curva si la distancia entre ambas tiende a 0 al alejarse del origen.

   Pueden ser de tres tipos:

   a) *Verticales:* Se hallan los valores de x para los que $f(x) \rightarrow \pm\infty$.

   b) *Horizontales:* Su ecuación es de la forma $y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$, siempre que éste sea un valor finito.

   c) *Oblicuas:* Su ecuación es $y = m \cdot x + n$ siendo $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ un número finito no nulo y $n = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - m \cdot x)$ un número finito. Si m es finito no nulo pero $n \rightarrow \pm\infty$, se dice que la curva posee una rama parabólica en la dirección de la recta $y = mx$.

Las asíntotas horizontales y las oblicuas son incompatibles: si una curva posee asíntota horizontal entonces no posee asíntota oblicua y viceversa. La razón es que una asíntota horizontal se puede considerar como una asíntota oblicua en la que $m = 0$.

Ejemplo 7.3 *Hallar las asíntotas de la curva* $f(x) = \frac{2x^2+5x-3}{x+2}$

A.V.: $x + 2 = 0 \rightarrow x = -2$
A.H.: $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x + 2} = \infty$ por lo que la curva no posee asíntota horizontal.
A.O.: $y = mx + n$ siendo
$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 + 2x} = 2$$
$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2 + 5x - 3}{x + 2} - 2x \right) = 1$$
Por lo tanto, la recta $y = 2x + 1$ es asíntota oblicua de la curva.

3. **Puntos de corte con las asíntotas:**

   Una curva nunca corta a la asíntota vertical pero una de sus ramas sí puede cortar a la asíntota horizontal o a la oblicua. Para hallar este punto de corte, se resuelve el sistema formado por las ecuaciones de la función $y = f(x)$ y de la asíntota $y = m\,x + n$, es decir, se resuelve la ecuación $f(x) = m\,x + n$.

   Ejemplo 7.4 *Hallar la intersección de la curva anterior con sus asíntotas.*

   Una curva explícita nunca corta a sus asíntotas verticales.
   Igualando las ecuaciones de la curva y de su asíntota oblicua, resulta $\frac{2x^2+5x-3}{x+2} = 2x + 1 \rightarrow -3 = 2$: la curva y sus asíntotas no se cortan.

4. **Simetría:**

   Una curva es simétrica con respecto a

a) el eje vertical: si $f(-x) = f(x)$

b) el origen de coordenadas: $f(-x) = -f(x)$

Ejemplo 7.5 *Estudiar la simetría de la curva* $f(x) = \frac{x^2+3}{x^3+x}$

Cambiando x por $-x$, resulta:
$f(-x) = \frac{x^2+3}{-x^3-x} = -\frac{x^2+3}{x^3+x} = -f(x)$ por lo que esta curva es simétrica con respecto al origen de coordenadas.

5. **Puntos de corte con los ejes:**

    a) Con el eje Y: se halla el valor $f(0)$ y, si existe, se obtiene un único punto $(0, f(0))$.

    b) Con el eje X: se resuelve la ecuación $f(x) = 0$ y, si existen soluciones, se obtienen los puntos $(x_i, 0)$.

Ejemplo 7.6 *Hallar los puntos de corte con los ejes de la curva*
$f(x) = \dfrac{x+1}{6+x-x^2}$

Con el eje Y: $f(0) = \frac{1}{6} \to (0, 1/6)$
Con el eje X: $f(x) = 0 \to x+1 = 0 \to x = -1 \to (-1, 0)$

6. **Crecimiento y Extremos relativos:**
Una curva es creciente en un punto si la tangente a la curva en dicho punto tiene pendiente positiva: $f'(x_0) > 0$. Si tiene pendiente negativa, $f'(x) < 0$, la curva es decreciente.

    Si $f'(x_0) = 0$, el punto $(x_0, f(x_0))$ es singular, lo que indica que, generalmente, es un extremo relativo (Máximo o mínimo), aunque a veces puede ser un punto de inflexión.

a) *Crecimiento:* Los valores que anulan la primera derivada $y'(x)$ dividen el dominio de existencia en intervalos de crecimiento de forma que si en un punto $x = a$ interior de uno de estos intervalos es $y'(a) > 0$, la función es creciente y si es $y'(a) < 0$, la función es decreciente.

b) *Extremos relativos:* Sea $y'(x_0) = 0$. Si la función es continua en x_0 y es creciente a su izquierda, $f'(x_O^-) > 0$, y decreciente a su derecha, $f'(x_O^+) < 0$, entonces la función posee un Máximo en el punto $(x_0, f(x_0)$. Y posee un mínimo en este punto si la función es decreciente a la izquierda de x_0 y creciente a su derecha.

También pueden obtenerse los extremos relativos de una función $y = f(x)$ sustituyendo los valores que anulan la derivada primera $f'(x)$ en la derivada segunda: si $f''(x_0) > 0$, en el punto $(x_0, f(x_0))$ hay un mínimo de la función, mientras que hay un máximo si $f''(x_0) < 0$.

Ejemplo 7.7 *Estudiar el crecimiento de la función* $f(x) = \frac{x-1}{x^2-x+4}$

Siempre es necesario hallar en primer lugar el dominio de la función: $x^2 - x + 4 = 0 \to x \notin \mathcal{R}$ por lo que el dominio de esta función es $D = \mathcal{R}$.

$f'(x) = \frac{-x^2+2x+3}{(x^2-x+4)^2} = 0 \to -x^2 + 2x + 3 = 0 \to x = -1 \wedge x = 3$; el denominador de la función derivada siempre es positivo por estar elevado al cuadrado por lo que el signo de la función derivada es el signo del numerador:

Por lo tanto, el punto $(-1, -1/3)$ es un mínimo relativo de la función mientras que el $(3, 1/5)$ es un máximo.

7. **Concavidad y Puntos de Inflexión:**

Una curva es *cóncava* en un punto (abierta hacia abajo) si la recta

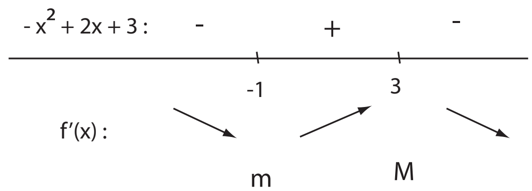


Figura 7.1: Crecimiento de $f(x) = \frac{x-1}{x^2-x+4}$

tangente a la curva en dicho punto queda por encima de la curva, y es *convexa* si la recta tangente queda por debajo de la curva. El punto en que una curva continua cambia de concavidad es un *punto de inflexión.*

La concavidad de una curva se estudia de forma similar a como se hizo en el estudio del crecimiento, pero estudiando los valores de la derivada segunda en los intervalos generados de la forma que se indica:

a) *Concavidad:* Los valores que anulan la segunda derivada $f''(x)$ dividen el dominio de existencia en intervalos de concavidad de forma que si en un punto $x = a$ interior de uno de estos intervalos es $f''(a) > 0$, la función es convexa (abierta hacia arriba) mientras que es cóncava (abierta hacia abajo) si $f''(a) < 0$.

b) *Puntos de inflexión:* Sea $f''(x_1) = 0$. Si la función es continua en x_1 y cambia de concavidad a ambos lados de este valor, entonces $(x_1, f(x_1)$ es un punto de inflexión de la curva.

Ejemplo 7.8 *Estudiar la concavidad de la curva* $f(x) = e^{-x^2}(x+1)$

El dominio de la función es $\mathcal{R}$.

En cuanto a la segunda derivada:
$f'(x) = e^{-x^2}(-2x^2 - 2x + 1) \to f''(x) = e^{-x^2}(4x^3 + 4x^2 - 6x - 2)$. Haciendo $f''(x) = 0$ y dado que e^{-x^2} no puede ser 0, se resuelve la ecuación $4x^3 + 4x^2 - 6x - 2 = 0$ y se obtienen los valores $x = 1,\ x = \frac{-2\pm\sqrt{2}}{2}$ los

cuales dividen al dominio de existencia en intervalos de concavidad, tal y como se muestra en el esquema siguiente:

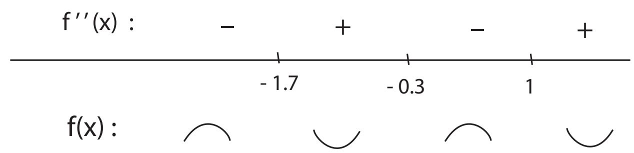


Figura 7.2: Concavidad de $f(x) = e^{-x^2}(x+1)$

Por lo tanto, los puntos de la curva $(-1'7, -0'04)$, $(-0'3, 0'64)$ y $(1, 0'74)$ son de inflexión.

Nota: Si la función es de la forma $y = \sqrt[2n]{f(x)}$, se toman sólo los valores positivos de la raíz. En caso de representar también los puntos de valores negativos de y se obtendría una curva simétrica con respecto al eje horizontal.

Ejemplo 7.9 *Representar la función* $f(x) = e^{-x^2}x$

1. **Dominio:** $D = \mathcal{R}$

2. **Asíntotas:** No hay asíntota vertical.
   Horizontal: $y = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{e^{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{2xe^{x^2}} = 0 \to y = 0$
   Oblicua: no hay.

3. **Punto de corte con la asíntota horizontal:** $\frac{x}{e^{x^2}} = 0 \to x = 0$: la curva y la asíntota horizontal se cortan en el origen.

4. **Simetría:** $f(-x) = e^{-x^2}(-x) = -f(x)$ por lo que la curva es simétrica con respecto al origen.

5. **Puntos de corte con los ejes:** $x = 0 \to f(0) = 0$: la curva corta a los ejes en el origen de coordenadas $(0,0)$.

6. **Crecimiento:** $f'(x) = e^{-x^2}(-2x^2+1) = 0 \to x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ con lo que se obtienen los siguientes intervalos de la recta real:

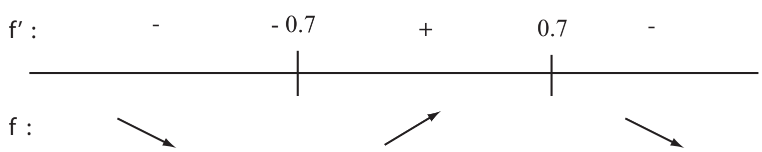


Figura 7.3: Intervalos de crecimiento de $f(x) = e^{-x^2}x$

7. **Extremos:** Según los resultados del apartado anterior, el punto $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}\right)$ es un mínimo mientras que $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}\right)$ es un Máximo.

8. **Concavidad:** $f''(x) = e^{-x^2}(4x^3 - 6x) = 0 \to x = 0, x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ por lo que se obtienen los siguientes intervalos de concavidad:

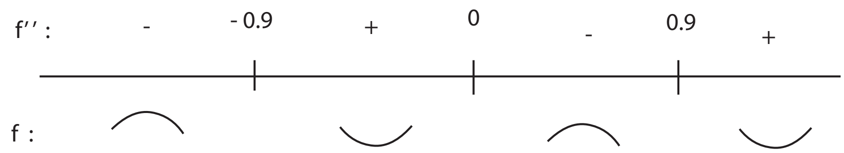
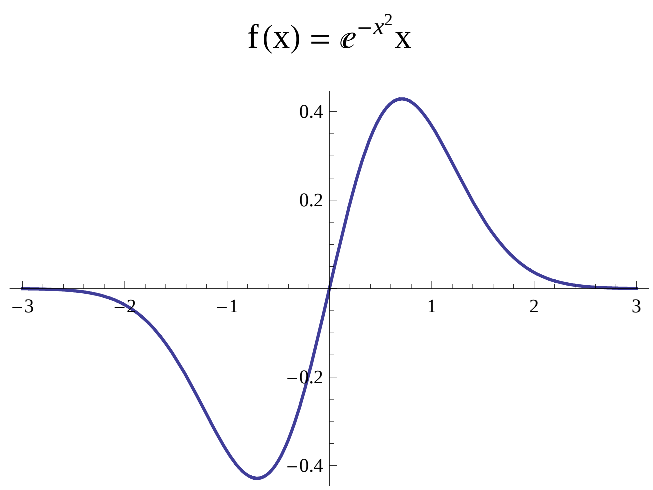


Figura 7.4: Intervalos de concavidad de $f(x) = e^{-x^2}x$

9. **Puntos de Inflexión:** Son tres: $(0,0)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}e^{-\frac{3}{2}}\right)$ y $\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}}, \sqrt{\frac{3}{2}}e^{-\frac{3}{2}}\right)$

La representación gráfica es la siguiente figura:



Ejemplo 7.10 *Representar la función* $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{x}\right)$

1. **Dominio:** El argumento de la función ha de ser un número positivo finito no nulo. Por lo tanto, $\frac{1-x}{x} = 0 \to x = 1 \;\wedge x = 0$:

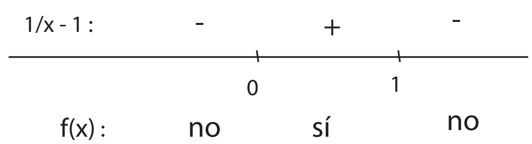
   

   Figura 7.5: Dominio de $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{x}\right)$

   Por tanto, el dominio es el intervalo abierto $D = (0, 1)$

2. **Asíntotas:** Posee asíntotas verticales en $x = 0$ (por la derecha) y en $x = 1$ (por la izquierda)
   No puede haber asíntota horizontal ni oblicua porque x no puede tender a $\pm\infty$.

3. **Puntos de corte con los ejes:**
   No puede cortar al eje vertical porque $x \neq 0$.
   Con el eje horizontal: $\ln\left(\frac{1-x}{x}\right) = 0 \to \frac{1-x}{x} = 1 \to x = \frac{1}{2}$ por lo que la curva corta al eje horizontal en el puto $(\frac{1}{2}, 1)$

4. **Crecimiento:** $f'(x) = \frac{1}{\frac{1-x}{x}} \frac{-1}{x^2} = \frac{1}{x^2-x}$ que no se anula para ningún valor real por lo que la curva no tiene extremos relativos. Para todo valor de $x \in D$ es $f'(x) < 0$ por lo que la función es decreciente en su dominio.

5. **Concavidad:** $f''(x) = \frac{-2x+1}{(x^2-x)^2} = 0 \to -2x + 1 = 0 \to x = \frac{1}{2}$ por lo que se obtienen los siguientes intervalos de concavidad:

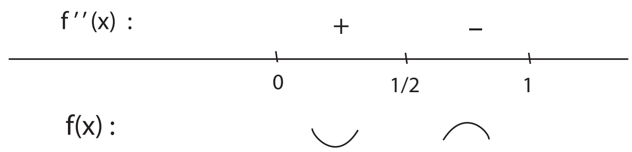
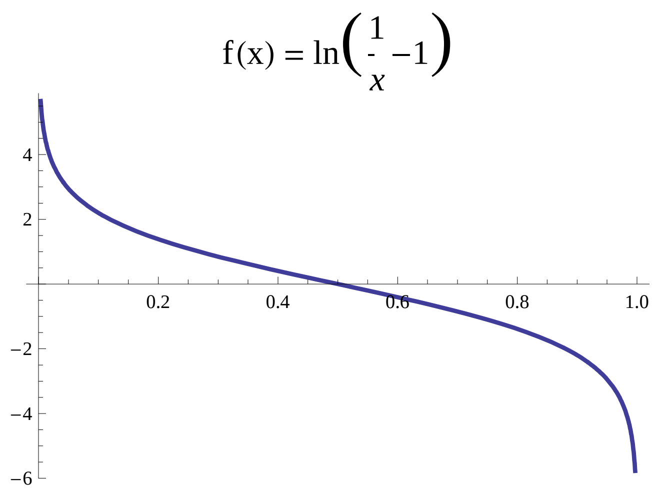


Figura 7.6: Concavidad de $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x} - 1\right)$

El punto $(\frac{1}{2}, 0)$ es de inflexión y la gráfica de esta función es



7.2. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES PARAMÉTRICAS

En la sección anterior se estudió la representación gráfica de funciones explícitas $y = f(x)$ en las que ambas variables son cartesianas, siendo x la variable independiente e y la variable que depende de x.

Pero supongamos que ambas variables dependen de una nueva variable t. En este caso se dice que la curva está expresada en forma paramétrica, siendo t el parámetro o variable independiente y $x = x(t)$, $y = y(t)$ las ecuaciones paramétricas de la curva.
También se dice que $\overrightarrow{r(t)} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} = (x(t), y(t))$ es la función vectorial de la curva.

Como ejemplo, a continuación se indican las ecuaciones cartesianas y paramétricas de las cónicas:

Cónica	**Ec. cartesiana**	**Ec. paramétricas**
Elipse	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	$x(t) = a\cos t,\ y(t) = b\,\mathrm{sen}\,t$
Circunferencia	$x^2 + y^2 = r^2$	$x(t) = r\cos t,\ y(t) = r\,\mathrm{sen}\,t$
Hipérbola	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	$x(t) = a\cosh t,\ y(t) = b\,\mathrm{senh}\,t$
Parábola	$y = a\,x^2$	$x(t) = t,\ y(t) = a\,t^2$

La representación gráfica de una curva expresada en forma paramétrica se hace de forma muy parecida al de las curvas explícitas aunque tienen algunas particularidades propias como veremos a continuación. Dado que este estudio es sólo una introducción a la representación gráfica de funciones, supondremos que las funciones $x(t)$ e $y(t)$ son enteras y/o racionales.

Diferencias entre las gráficas de las funciones paramétricas y de las funciones cartesianas explícitas

A continuación se indican algunas diferencias entre las gráficas de las funciones indicadas:

- Las curvas expícitas son siempre unicursales, lo que quiere decir que toda recta vertical corta a la curva en un punto como máximo. Las curvas paramétricas no son necesariamente unicursales, por lo que una recta vertical puede cortar a la curva en más de un punto.

- Por la razón anterior, una curva paramétrica puede ser creciente y decreciente para una mismo valor de «x».

- Si una curva explícita tiene asíntota horizontal, ésta es única. Pero una curva paramétrica puede tener varias asíntotas horizontales.

- Si una curva explícita tiene asíntota horizontal, entonces no tiene ninguna asíntota oblicua. Una curva paramétrica puede tener asíntotas horizontales y oblicuas a la vez.

- Si una curva explícita posee asíntota vertical, nunca la corta. Una curva paramétrica sí puede hacerlo.

7.2.1. Protocolo para la representación de curvas planas definidas en forma paramétrica

Para representar una curva plana paramétrica seguiremos los siguientes pasos:

1. **Dominios:** en principio, el dominio de la variable t (para las funciones racionales) es el conjunto de los número reales ampliado con el punto del infinito, es decir, $D_t = \mathcal{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty]$. El conjunto

de los números reales ampliado, también se representa en la forma $\overline{\mathcal{R}}$. Si la función no es racional, hay que estudiar el dominio de t en la forma indicada en la sección anterior.

Para los valores anteriores de t, existen los dominios de existencia D_X (dominio) y D_Y (rango) para las variables x e y, respectivamente. Para hallar D_X se resuelve la ecuación en t, $x(t) = x$. El dominio D_X es el conjunto de valores de x que hacen que $t \in [-\infty, +\infty]$. Recordar finalmente que $\pm\infty \notin D_X$

De forma parecida se halla D_Y.

Ejemplo 7.11 *Hallar los dominios de la función* $\left(\dfrac{t}{t^2+1}, \dfrac{t^2}{t^2+1}\right)$

Dominio de x:
$x(t) = x \to \dfrac{t}{t^2+1} = x \to xt^2 - t + x = 0 \to t = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4x^2}}{2x}$.
Por tanto, $t \in \overline{\mathcal{R}} \to 1 - 4x^2 \geq 0 \to -\dfrac{1}{2} \leq x \leq \dfrac{1}{2} \to D_X = [-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}]$.
Dominio de y:
$y(t) = y \to t = \sqrt{\dfrac{y}{1-y}} \to D_Y = [0, 1]$.
(De hecho, la curva indicada es la circunferencia $x^2 + (y - 1/2)^2 = 1/4$)

Ejemplo 7.12 *Hallar los dominios de la función* $\left(\dfrac{t+1}{t-1}, \dfrac{t^2-5}{t^2+2t}\right)$

Dominio de x:
$x(t) = x \to \dfrac{t+1}{t-1} = x \to (x-1)t = x + 1 \to t = \dfrac{x+1}{x-1} \to D_X = \mathcal{R}$
Dominio de y:
$y(t) = y \to \dfrac{t^2-5}{t^2+2t} = y \to (y-1)t^2 + 2yt + 5 = 0 \to$
$t = \dfrac{-y \pm \sqrt{y^2 - 5(y-1)}}{y-1}$; $y^2 - 5y + 5 = 0 \to y = \dfrac{5 \pm \sqrt{5}}{2} \to$
$D_Y =]-\infty, \dfrac{5-\sqrt{5}}{2}] \cup [\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}, +\infty[$

2. **Asíntotas:** Pueden ser de tres tipos:

    a) *Verticales:* se hallan los valores de t que hacen que $y(t)$ tienda a infinito. Estos valores t_i, si existen, originan las asíntotas verticales $x = x(t_i)$ con la condición de que $x(t_i)$ sea un número finito.

    b) *Horizontales:* se hallan los valores de t que hacen que $x(t)$ tienda a infinito, obteniéndose las asíntotas horizontales $y = y(t_i)$ siempre que este valor sea finito.

    c) *Oblicuas:* en primer lugar se halla el valor $t = t_0$ en el que $x(t_0)$ tiende a infinito. A continuación, hay que tener en cuenta que la ecuación de una asíntota oblicua es $y = m \cdot x + n$ siendo
    $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)}$
    $n = \lim\limits_{x\to\infty} (y(t) - m \cdot x) = \lim\limits_{t\to t_0} (y(t) - m \cdot x(t))$
    Para que exista asíntota oblicua es necesario (pero no suficiente) que exista algún valor $t = t_0$ tal que $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = \lim\limits_{t\to t_0} y(t) = \infty$

A diferencia de las funciones explícitas, una curva definida en forma paramétrica puede tener más de una asíntota horizontal (u oblicua), e incluso puede tener asíntotas horizontales y oblicuas a la vez.

Ejemplo 7.13 *Hallar las asíntotas de la curva* $\left(\dfrac{t^3}{t^2-1}, \dfrac{t}{t^2+1}\right)$

Verticales: y no tiende a infinito para ningún valor de t por lo que no hay A.V.

Horizontales: si $x \to \infty \to \left\{ \begin{array}{l} t = \pm 1 \to y = \pm\frac{1}{2} \\ t \to \infty \to y = 0 \end{array} \right\}$ por lo que la curva tiene tres asíntotas horizontales: $y = \frac{1}{2},\ y = -\frac{1}{2},\ y = 0$

Oblicuas: $m = \lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = \lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{t}{t^2+1} : \dfrac{t^3}{t^2-1} = \lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{t^2-1}{(t^2+1)t^2} = 0$ tanto para $t_0 = \pm 1$ como para $t_0 = \infty$. Por tanto, no hay A.O.

Veamos a continuación un ejemplo de curva que posee los tres tipos de asíntotas.

Ejemplo 7.14 *Hallar las asíntotas de la curva* $x(t) = \dfrac{t^2+1}{t+1}$, $y(t) = \dfrac{t^2-t-1}{t+2}$

a) *Asíntota vertical:*

$$y \to \infty \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} t = \infty \to x = \infty \\ t = -2 \to x = \frac{5}{-1} = -5 \end{array} \right\}$$

por lo que $x = -5$ es una asíntota vertical.

b) *Asíntota horizontal:*

$$x \to \infty \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} t = \infty \to y = \infty \\ t = -1 \to y = \frac{1}{1} = 1 \end{array} \right\}$$

por lo que $y = 1$ es una asíntota horizontal.

c) *Asíntota oblicua:* $y = mx + n$, siendo $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{y(x)}{x}$. Pero, si $x \to \infty$, entonces $t \to \infty$ o bien $t = -1$ por lo que se ha de estudiar el valor de m para estos dos valores de t:

1) Para $t = \infty$:
$$m = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{t^2-t-1}{t+2} : \frac{t^2+1}{t+1} \right) = \lim_{t\to\infty} \frac{t^3-2t-1}{t^3+2t^2+t+2} = 1$$
$$\begin{aligned} n &= \lim_{t\to\infty} (y - m\cdot x) = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{t^2-t-1}{t+2} - \frac{t^2+1}{t+1} \right) \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{-2t^2-3t-3}{t^2+3t+2} = -2 \end{aligned}$$
Luego, $y = x - 2$ es una asíntota oblicua.

2) Para $t = -1$:
$m = \lim\limits_{t\to -1} \dfrac{t^3-2t-1}{t^3+2t^2+t+2} = 0$ por lo que no existe asíntota oblicua para $t = -1$

3. **Puntos de corte con las asíntotas:** Para hallar los puntos de corte de la curva con sus asíntotas, se resuelve el sistema formado por la ecuacin de la asíntota y la ecuación de de la curva. A diferencia de las curvas explícitas, la curva puede cortar a todas sus asíntotas, incluso a sus asíntotas verticales.

   Ejemplo 7.15 *Hallar las asíntotas de la curva* $\left(\dfrac{t^2}{t-2}, \dfrac{t^3+2}{t^2-1}\right)$. *Hallar los puntos de corte de la curva con sus asíntotas.*

   a) Asíntotas horizontales:

   $$(x \to \infty) \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} (t^2 \to \infty) \Rightarrow (t \to \infty) \Rightarrow (y \to \infty): & no \\ t - 2 = 0 \to t = 2 \to y = \frac{10}{3} & \end{array} \right\}$$

   $y = \frac{10}{3}$ es una asíntota horizontal.

   b) Asíntotas verticales:

   $$(y \to \infty) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (t^3+2 \to \infty) \Rightarrow (t \to \infty) \Rightarrow \\ \qquad x = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{t^2}{t-2} = \infty: \quad no \\ t^2 - 1 = 0 \to \left\{ \begin{array}{l} t = 1 \to x = \frac{1}{-1} = -1 \\ t = -1 \to x = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3} \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

   Por lo tanto, $x = -1$, $x = -\frac{1}{3}$ son asíntotas verticales.

   c) Asíntotas oblicuas: $y = m\,x + n$ siendo $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{y}{x}$,
   $n = \lim\limits_{x\to\infty} (y - m \cdot x)$
   $\dfrac{y}{x} = \dfrac{t^3+2}{t^2-1} : \dfrac{t^2}{t-2} = \dfrac{(t^3+2)(t-2)}{(t^2-1)t^2}$

$(x \to \infty) \Rightarrow (t \to \infty) \vee (t \to 2)$

$$\left\{ \begin{array}{l} m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{(t^3+2)(t-2)}{(t^2-1)t^2} = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{t^4}{t^4} = 1; \\ n = \lim\limits_{t\to\infty} (y - m\ x) = \lim\limits_{t\to\infty} \left(\dfrac{t^3+2}{t^2-1} - \dfrac{t^2}{t-2} \right) \\ \quad = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{(t^3+2)(t-2) - t^2(t^2-1)}{(t^2-1)(t-2)} \\ \quad = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{-2t^3+t^2+2t-4}{t^3-2t^2-t+2} = -2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ m = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t\to 2} \frac{(t^3+2)(t-2)}{(t^2-1)t^2} = 0 : \quad no \right.$$

Por lo tanto, $y = x - 2$ es una asíntota oblicua.

Para hallar los puntos de corte de la curva con sus asíntotas, basta resolver las ecuaciones correspondientes.

a) Con la asíntota vertical $x = -1$:

$$\frac{t^2}{t-2} = -1 \to t^2 + t - 2 = 0 \to$$

$$\to \left\{ \begin{array}{l} t = -2 \to y = \frac{-6}{3} = -2 \to (-1, -2) \\ t = 1 \to y = \infty : \quad no \end{array} \right\}$$

b) Con la asíntota vertical $x = -\frac{1}{3}$:

$$\frac{t^2}{t-2} = -\frac{1}{3} \to 3t^2 + t - 2 = 0 \to$$

$$\to \left\{ \begin{array}{l} t = \dfrac{-1+5}{6} = \dfrac{2}{3} \to y = -\dfrac{62}{15} \to \left(-\dfrac{1}{3}, -\dfrac{62}{15}\right) \\ t = \dfrac{-1-5}{6} = -1 \to y = \dfrac{1}{0} = \infty \to no \end{array} \right\}$$

c) Con la asíntota horizontal $y = \frac{10}{3}$:

$$\frac{t^3+2}{t^2-1} = -\frac{10}{3} \to 3t^3 - 10t^2 + 16 = 0 \to$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} t = 2 \rightarrow x = \infty : \quad no \\ t = \frac{2+2\sqrt{7}}{3} \rightarrow x = 13{,}72 \rightarrow (13'72, 3'33) \\ t = \frac{2-2\sqrt{7}}{3} \rightarrow x = -1{,}097 \rightarrow (-1'10, 0'39) \end{array} \right\}$$

d) Con la asíntota oblicua $y = x - 2$

$$\frac{t^3+2}{t^2-1} = \frac{t^2}{t-2} - 2 \rightarrow 3t^2 = 0 \rightarrow x = 0 \wedge y = -2 \rightarrow (0, -2)$$

En resumen: la curva corta a su

a) A.V. $x = -1$ en el punto $(-1, -2)$

b) A.V. $x = -\frac{1}{3}$ en el punto $\left(-\dfrac{1}{3}, -\dfrac{62}{15}\right)$

c) A.H. $y = \frac{10}{3}$ en los puntos $(13'72, 3'33)$ y $(-1'10, 0'39)$

d) A.O. $y = x - 2$ en el punto $(0, -2)$

4. **Simetría:** Una curva es simétrica con respecto a

   a) el eje vertical si $x(-t) = -x(t)$ e $y(-t) = y(t)$

   b) el eje horizontal si $x(-t) = x(t)$ e $y(-t) = -y(t)$

   c) la bisectriz del primer cuadrante si $x(1/t) = y(t)$

   d) la bisectriz del segundo cuadrante si $x(1/t) = -y(t)$

   e) el origen si $x(-t) = -x(t)$ e $y(-t) = -y(t)$

Ejemplo 7.16 *Estudiar la simetría de la curva paramétrica* $\left(\dfrac{t}{t^2+1}, \dfrac{t^2}{t^2+1}\right)$.

Es fácil comprobar que $x(-t) = -x(t)$, $y(-t) = y(t)$ por lo que esta curva es simétrica con respecto al eje Y.

5. **Puntos de corte con los ejes**.

a) *Con el eje Y*: los valores de t que anulan la función $y(t)$, se sustituyen en $x(t)$

b) *Con el eje X*: los valores de t que anulan $x(t)$, se sustituyen en $y(t)$

Ejemplo 7.17 *Hallar los puntos en los que la curva* $\left(\dfrac{t-1}{t^2+1}, \dfrac{t}{t+1}\right)$ *corta a los ejes.*

- Con el eje X: $\dfrac{t}{t+1} = 0 \to t = 0 \to x = -1 \to (-1, 0)$
- Con el eje Y: $\dfrac{t-1}{t^2+1} = 0 \to \left\{ \begin{array}{l} t-1 = 0 \to t = 1 \to y = \frac{1}{2} \to (0, \frac{1}{2}) \\ t = \infty \to y = 1 \to (0,1) \end{array} \right\}$

Por lo tanto, la curva corta a los ejes en los puntos $(-1, 0)$, $(0, \frac{1}{2})$ y $(0, 1)$.

6. **Puntos críticos:** Son los puntos de la curva en los que existe tangente horizontal o vertical. O lo que es lo mismo: puntos en los que la derivada $\frac{dy}{dx}$ es nula o tiende a infinito, respectivamente, sin más que tener en cuenta que $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt}$.

   En cuanto al estudio del crecimiento, éste puede ser en dirección vertical u horizontal. Estudiemos primeramente el estudio en vertical, en donde los puntos críticos son los puntos en los que hay tangente horizontal. Al resolver la ecuación $\frac{dy}{dx} = 0$, se pueden presentar los dos casos que se indican a continuación. Sea x_0 una raíz de $\frac{dy}{dx} = 0$.

   - Si la ecuación $x(t) = x_0$ tiene una única solución t_0, el crecimiento de la función se hace igual que el de las funciones explícitas estudiadas en la sección anterior.
   - Si $x(t) = x_0$ tiene alguna solución múltiple, se busca algún valor t_1 tal que $x(t_1)$ esté muy próximo a $x(t_0)$: si $y(t_1) < y(t_0)$, el punto

$(x_0, y(t_0))$ es un Máximo de la función. En caso contrario es un mínimo.

De forma parecida se estudiaría el crecimiento en horizontal, aunque éste no suele ser estrictamente necesario.

Ejemplo 7.18 *Estudiar los puntos críticos de la curva* $\left(\dfrac{t}{t^2-1}, \dfrac{t^2}{t^2-1}\right)$

Hallamos la derivada $\dfrac{dy}{dx}$.
Puesto que $\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{2t}{(t^2-1)^2}$, $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{t^2+1}{(t^2-1)^2}$ es $y' = \dfrac{dy/dt}{dx/dt} = \dfrac{2t}{t^2+1}$.

a) Tangente horizontal: $y' = 0 \rightarrow t = 0 \vee t = \infty$. Para $t = 0$ se obtiene el punto $(0,0)$ mientras que para $t = \infty$ resulta el $(0,1)$.

b) Tangente vertical: $y' \neq \infty$ por lo que la curva no tiene puntos de tangente vertical.

(De hecho, esta curva es la hipérbola $(y-1/2)^2 - x^2 = 1/4$)

7. **Concavidad:** En general, la concavidad no es necesario estudiarla por lo que prescindiremos de su estudio. No obstante, si se desea estudiarla se hará a partir de la derivada segunda, teniendo en cuenta que la derivada de y con respecto a x equivale a $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt}$ por lo que $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt} \cdot \dfrac{1}{\frac{dx}{dt}}$. Los valores que anulan la derivada segunda dividen el campo de existencia de la función en intervalos de concavidad, teniendo en cuenta que si
$y''(t_0) > 0$ la función es convexa (abierta hacia arriba) mientras que es cóncava (abierta hacia abajo) si $y''(t_0) < 0$.

Ejemplo 7.19 *Representar la curva* $x(t) = (t+1)^2$, $y(t) = t^3 - 3t^2 + 2t$

1. **Dominios:**
   Para $x:\ x = x(t) \to x = (t+1)^2 \to t = -1 \pm \sqrt{x} \to x \geq 0 \to D_X = \mathcal{R}^+$. O también: el polinomio $(t+1)^2$ es positivo para cualquier valor de t por lo que $D_X = \mathcal{R}^+$
   Para $y:\ y = y(t) \to y = t^3 - 3t^2 + 2t \to t^3 - 3t^2 + 2t - y = 0:$ es una ecuación polinómica de tercer grado que siempre tiene solución en $\mathcal{R}$ por lo que $D_Y = \mathcal{R}$. O también: el polinomio de tercer grado $t^3 - 3t^2 + 2t$ existe para todo valor de t y tanto puede ser positivo como negativo por lo que $D_Y = \mathcal{R}$

2. **Asíntotas:**
   Verticales: Puesto que si $(y \to \infty) \Rightarrow (x \to \infty)$ no hay A.V.
   Horizontales: Por la misma razón, no haya A.H.
   Oblicuas: $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{y(t)}{x(t)} = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{t^3 - 3t^2 + 2t}{t^2 + 2t + 1} = \infty \to$ no hay A.O.

3. **Simetría:** Sustituyendo t por $-t$ resulta $x(-t) \neq \pm x(t)$ por lo que la curva no es simétrica.

4. **Puntos de corte con los ejes:** Para $x = 0$ es $t = -1$ por lo que $y(-1) = -6$ y se obtiene el punto $(0, -6)$.
   Para $y = 0$ es $t(t^2 - 3t + 2) = 0 \to t = 0,\ t = 1,\ t = 2$ de donde se obtiene $x(0) = 1$, $x(1) = 4$ y $x(2) = 9$, por lo que resultan los tres puntos de corte con el eje horizontal, $(1, 0)$, $(4, 0)$ y $(9, 0)$.

5. **Puntos críticos:** Hallemos y'.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dy}{dt} = 3t^2 - 6t + 2 \\ \frac{dx}{dt} = 2t + 2 \end{array}\right\} \to y' = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{3t^2 - 6t + 2}{2t + 2}$$

Puntos de tangente horizontal: $y' = 0 \to 3t^2 - 6t + 2 = 0 \to t = \frac{3\pm\sqrt{3}}{3}$ con lo que se obtienen los puntos $(6'64, -0'38)$ y $(2'02, 0'38)$. Debemos hallar el signo de y' para valores de x a ambos lados de los dos valores anteriores. Para $t = 2$ es $x = 9 > 6'64 \to y'(2) > 0$ por lo que la curva es creciente a la derecha de $x = 6'64$. Igualmente, para $t = 1$ es $x = 4 < 6'64 \to y'(1) < 0$ por lo que la curva es decreciente a la izquierda de $x = 6'64$. En consecuencia, el punto $(6'64, -0'38)$ es un mínimo.

Para $t = 0'4$ es $x = 1'96 < 2'02 \to y'(0'4) > 0$ por lo que la curva es creciente a la izquierda de $x = 2$ y el punto $(2'02, 0'38)$ es un Máximo de la curva:

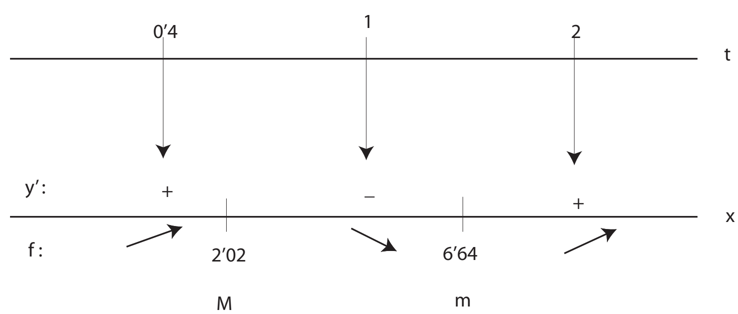


Figura 7.7: Crecimiento de la curva $((t+1)^2,\ t^3 - 3t^2 + 2t)$

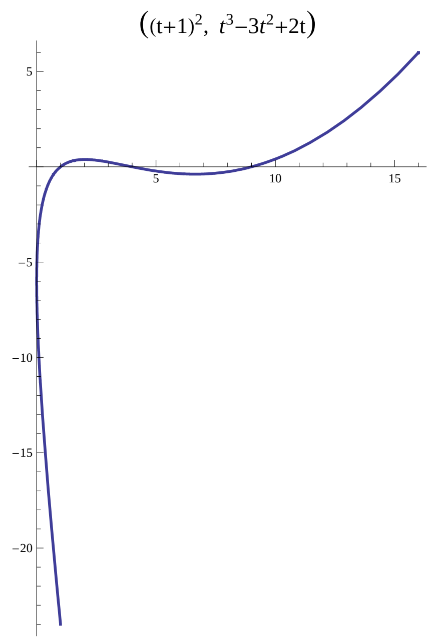
Puntos de tangente vertical:

$$y' = \frac{3t^2 - 6t + 2}{2t + 2} = 0 \to \left\{ \begin{array}{l} t = -1 \to (0, -6) \\ t = \infty \to x \notin \mathcal{R} \end{array} \right\}$$

Pero, para cada valor de x hay dos valores $t_0 = -1 + \sqrt{x}$ y $t_1 = -1 - \sqrt{x}$ por lo que también hay dos valores de y. En consecuencia, para $x = x_0$ hay dos puntos $(x_0, y(t_0)),\ \ (x_0, y(t_1))$, estando siempre situado este segundo punto en el cuarto cuadrante.

6. *Puntos de inflexión*: Hallemos $y'' = \dfrac{dy'}{dx} = \dfrac{dy'/dt}{dx/dt} = \dfrac{6t^2+12t-12}{(2t+2)^3}$. Entonces, $y'' = 0 \rightarrow t = -1 \pm \sqrt{2}$ por lo que la curva posee dos puntos de inflexión: $(2, 0'38)$ y $(2, -36'38)$.

La gráfica de esta función tiene la forma



Ejemplo 7.20 *Representar la curva* $x(t) = \dfrac{t^3}{t^2+1}$, $y(t) = \dfrac{t}{t^2+1}$

1. **Dominios:** D_x: se resuelve la ecuación $\dfrac{t^3}{t^2+1} = x \to t^3 - xt^2 - x = 0$ que es una ecuación de tercer grado la cual siempre tiene al menos una solución real. en consecuencia, $D_X = \mathcal{R}$.
   D_y: se resuelve $\dfrac{t}{t^2+1} = y \to yt^2 - t + y = 0 \to t = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4y^2}}{2y}$ de donde se deduce que $D_Y = [-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}]$

2. **Asíntotas:**
   Verticales: Puesto que y no tiende a infinito, no hay A.V.
   Horizontales: Si $x \to \infty \Rightarrow t \to \infty \Rightarrow y = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{t}{t^2+1} = 0$ por lo que $y = 0$ es una A.H.
   Oblicuas: $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{t\to\infty} \left(\dfrac{t}{t^2+1} : \dfrac{t^3}{t^2+1} \right) = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{t^2+1}{t^4+t^2} = 0$ por lo que no posee asíntota oblicua.

3. **Punto de corte con la asíntota horizontal:** Igualando las ecuaciones de la curva y de la asíntota horizontal $\frac{t}{t^2+1} = 0$, de donde resulta
   a) $t = 0 \to (0,0)$
   b) $t = \infty \to x = \infty \to$ la curva y la asíntota sólo se cortan en el origen.

4. **Simetría:** Sustituyendo t por $-t$ resulta $x(-t) = -x(t)$, $y(-t) = -y(t)$ por lo que la curva es simétrica con respecto al origen de coordenadas.

5. **Puntos de corte con los ejes:** Para $x = 0$ es $t = 0$ de donde se obtiene el punto $(0,0)$. El mismo punto se obtiene para $y = 0$.

6. **Puntos críticos:**
   $$\left.\begin{aligned} \tfrac{dy}{dt} &= \tfrac{-t^2+1}{(t^2+1)^2} \\ \tfrac{dx}{dt} &= \tfrac{t^4+3t^2}{(t^2+1)^2} \end{aligned}\right\} \to y' = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{-t^2+1}{t^4+3t^2}$$
   Puntos de tangente horizontal:

a) $y' = 0 \to 1 - t^2 = 0 \to t = \pm 1$ con lo que se obtienen los puntos $(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})$. Para $t = 2$ es $x = 1{,}6 > 0{,}5 \to y'(1{,}6) < 0$ por lo que la curva es decreciente a la derecha de $x = 0{,}5$. Igualmente, para $t = 0{,}5$ es $x = 0{,}1 < 0{,}5 \to y'(0{,}1) > 0$ por lo que la curva es creciente a la izquierda de $x = 0{,}5$. En consecuencia, el punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ es un Máximo.

Y para $t = -2$ es $x = -1{,}6 < -0{,}5 \to y'(-1{,}6) < 0$ por lo que la curva es decreciente a la izquierda de $x = -0{,}5$ lo que indica que el punto $(-1/2, -1/2)$ es un mínimo. Ver Figura 7.8

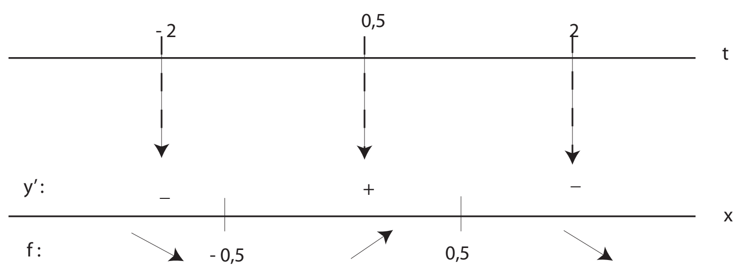


Figura 7.8: Crecimiento de la curva $\left(\dfrac{t^3}{t^2+1}, \dfrac{t}{t^2+1}\right)$

b) También, $y' = 0 \to t = \infty \to x = \infty$ por lo que no se obtiene ningún punto de tangente horizontal.

Puntos de tangente vertical: $y' = \pm\infty \to t^2(t^2+3) = 0 \to t = 0$ para el que se obtiene el origen de coordenadas $(0, 0)$.

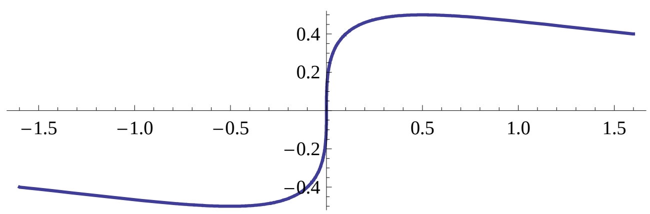
7. **Puntos de inflexión:** No es necesario hallarlos. Pero si se considerara conveniente hacerlo, es
$y'' = \dfrac{dy'/dt}{dx/dt} = \dfrac{2(t^4 - 2t^2 - 3)(t^2+1)^2}{t^5(t^2+3)^3} = 0$, por lo que

$$t^4 - 2t^2 - 3 = 0 \to t^2 = 1 \pm 2 \to \begin{cases} t = \pm i \notin \mathcal{R} \\ t = \pm\sqrt{3} \to P.I.\left(\pm\frac{3\sqrt{3}}{4}, \pm\frac{\sqrt{3}}{4}\right) \end{cases}$$

o bien $t = \infty \rightarrow P.I.(0,0)$

La gráfica de esta función tiene la forma

$$x(t) = \frac{t^3}{t^2+1}, \qquad y(t) = \frac{t}{t^2+1}$$



Ejemplo 7.21 *Representar la curva* $\left(\dfrac{1}{t-1}, \dfrac{t^2+1}{t-1}\right)$

1. **Dominios:** Para x: $x(t) = x \to \frac{1}{t-1} = x \to t = \frac{x+1}{x}$ por lo que $t \in \mathcal{R} \leftrightarrow x \neq 0 \to D_X = \mathcal{R} - \{0\}$.
   Para la variable y es $\dfrac{t^2+1}{t-1} = y \to t^2 - yt + (1+y) = 0 \to t = \dfrac{y \pm \sqrt{y^2-4y-4}}{2}$
   $y^2 - 4y - 4 = 0 \to y = 2 \pm \sqrt{8} \to D_Y = (-\infty, 2-\sqrt{8}] \cup [2+\sqrt{8}, \infty)$

2. **Asíntotas:** *Verticales:* Si $y \to \infty$ entonces $(t = 1 \to x = \infty)$ o bien $(t = \infty \to x = 0)$ por lo que la curva tiene una asíntota vertical en $x = 0$ (eje de ordenadas)
   Horizontales: Si $x \to \infty$ entonces $t = 1 \to y = \infty$ por lo que la curva no tiene asíntotas horizontales.
   Oblicuas: Su ecuación es $y = m \cdot x + n$ siendo
   $$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t\to 1}(t^2+1) = 2 \\ n &= \lim_{x\to\infty}(y - m\cdot x) = \lim_{t\to 1}(\frac{t^2+1}{t-1} - 2\frac{1}{t-1}) \\ &= \lim_{t\to 1}\frac{t^2-1}{t-1} = \lim_{t\to 1}(t+1) = 2 \end{aligned}$$
   Por lo tanto, la recta $y = 2x + 2$ es una asíntota oblicua de la curva.

3. *Puntos de corte con la asíntota oblicua:* Se sustituyen los valores de $x(t)$ e $y(t)$ en la ecuación de la asíntota oblicua: $y = 2x + 2$: $\dfrac{t^2+1}{t-1} = \dfrac{2}{t-1} + 2 \to t^2 + 1 = 2 + 2t - 2 \to t = 1 \to (\infty, \infty)$: no se cortan.

4. **Simetría:** Sustituyendo t por $-t$ resulta $x(-t) = \frac{1}{-t-1} \neq \pm x(t)$ por lo que la curva no es simétrica con respecto a los ejes de coordenadas.
   Por otra parte, $x\left(\dfrac{1}{t}\right) = \dfrac{1}{\frac{1}{t}-1} = \dfrac{t}{1-t} \neq \pm y(t)$ por lo que la curva no es simétrica con respecto a las bisectrices de los ejes de coordenadas.

5. **Puntos de corte con los ejes:** Con el eje Y se hace $x = 0$ por lo que es $t = \infty \rightarrow y = \infty$ por lo que la curva no corta la eje Y.
   Con el eje X se hace $y = 0 \rightarrow t^2 + 1 = 0 \rightarrow t \notin \mathcal{R}$ por lo que la curva tampoco corta al eje X.

6. **Puntos críticos:**

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{2t(t-1) - (t^2+1)1}{(t-1)^2} = \frac{t^2 - 2t - 1}{(t-1)^2} \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{-1}{(t-1)^2} \end{aligned}\right\}$$

$$\rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{t^2 - 2t - 1}{-1} = -t^2 + 2t + 1$$

   Puntos de tangente horizontal: $y' = 0 \rightarrow -t^2 + 2t + 1 = 0 \rightarrow t = 1 \pm \sqrt{2}$.
   Etudiaremos estos puntos de dos formas:

   a) Por el crecimiento:
   $t = 2 \rightarrow x = 1 > 0{,}7 \rightarrow y'(2) > 0$ la curva es creciente a la derecha de $x = 0{,}7$
   $t = 4 \rightarrow x = 0{,}33 < 0{,}7 \rightarrow y'(4) < 0$ la curva es decreciente a la izquierda de $x = 0{,}7$ por lo que el punto $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{4+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}})$ es un mínimo.
   $t = 0 \rightarrow x = -1 < -0{,}7 \rightarrow y'(0) > 1$ la curva es creciente a la izquierda de $x = -0{,}7$ por lo que el punto $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{4-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}})$ es un Máximo. Ver Figura 7.9

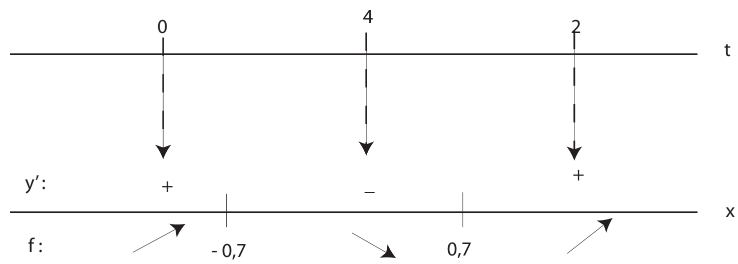


Figura 7.9: Crecimiento de la curva $\left(\frac{1}{t-1}, \frac{t^2+1}{t-1}\right)$

b) Por la derivada segunda:
$y'' = \dfrac{dy'}{dx} = \dfrac{dy'/dt}{dx/dt} = \dfrac{-2t+2}{\frac{-1}{(t-1)^2}} = 2(t-1)^3$. Por tanto,
$y''(1+\sqrt{2}) = 2(\sqrt{2})^3 > 0$: el punto $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{4+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}})$ es un mínimo
$y''(1-\sqrt{2}) = 2(-\sqrt{2})^3 < 0$: el punto $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{4-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}})$ es un Máximo

Puntos de tangente vertical: $y' = \infty \to t = \infty \to (0, \infty)$: no hay puntos de tangente vertical.

7. **Puntos de inflexión:** $y'' = 0 \to t = 1 \to x = \infty$ por lo que la curva no tiene puntos de inflexión.

La gráfica de esta función es

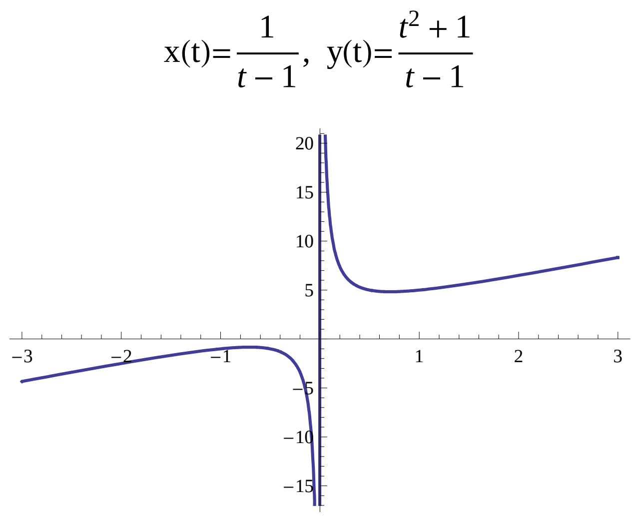


Figura 7.10: Gráfica de $x(t) = \dfrac{1}{t-1},\ y(t) = \dfrac{t^2+1}{t-1}$

7.3. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES POLARES

Sea $P(x, y)$ un punto del plano $\mathcal{R}$. Se llama radio vector del punto P al segmento que une el punto P con el origen de coordenadas O y su longitud se representa por ρ. El ángulo que forma el radio vector con el semieje horizontal positivo se llama ángulo polar del punto P. Por tanto, si θ es el ángulo polar de este punto, entonces se verifica que $x = \rho \cos\theta$ e $y = \rho \operatorname{sen}\theta$. Los valores ρ y θ determinan unívocamente el punto P y son llamados coordenadas polares de este punto que se representará en la forma $P(\theta, \rho)$.

De las relaciones anteriores se deduce que $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{y}{x}$.

Las ecuaciones de los semiejes, contados en sentido positivo son $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \pi$ y $\theta = \frac{3\pi}{2}$, respectivamente.

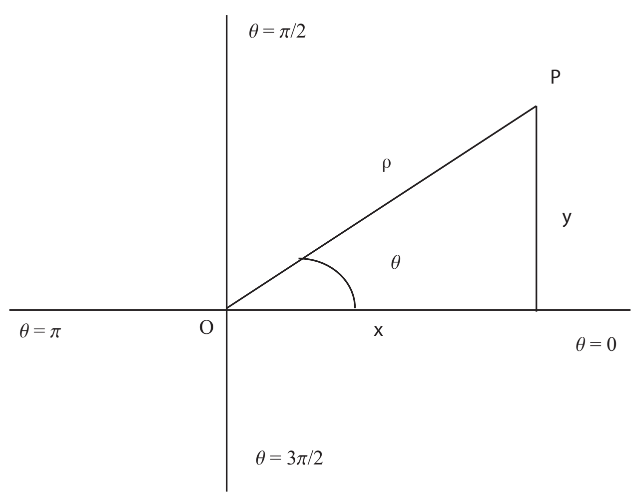


Figura 7.11: Coordenadas polares

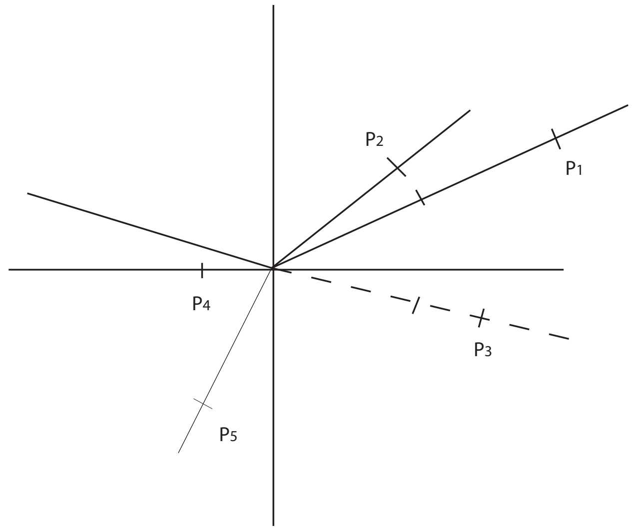
Como consecuencia de estas definiciones, la función $\rho = \rho(\theta)$ representa una curva del plano $\mathcal{R}$ determinada por el conjunto de puntos $\{(\theta, \rho(\theta))\}$.

Para representar el punto (θ, ρ) se dibuja un segmento desde el origen formando un ángulo θ con la parte positiva del eje horizontal y sobre él se lleva una distancia ρ desde el origen, advirtiendo de que si ρ es negativo, el punto correspondiente se dibuja al otro lado de la prolongación del radio vector por el origen. Pero a diferencia de lo que sucede con las curvas cartesianas explícitas en las que por un punto del plano la curva sólo puede pasar una vez a lo sumo, en las curvas polares, la curva puede pasar varias veces por un punto del plano. Por ejemplo: dada la curva $\rho(\theta) = \operatorname{sen}(2\theta)$, las infinitas coordenadas polares $\Big((4k+1)\frac{\pi}{4}, 1\Big)$ para $k \in \mathcal{N}$ determinan un único punto de la curva.

Advertir por último que si bien el ángulo θ puede estar expresado tanto en grados como en radianes, el radio ρ siempre estará expresado en unidades de longitud. Por tanto, puede ser $\theta = \frac{3\pi}{4}$ radianes $= 135^o$, pero ha de ser $\rho = \frac{3\pi}{4} = 2,36$

Ejemplo 7.22 *Representar los puntos* $P_1(30^0, 2)$; $P_2(45^0, 1)$; $P_3(160^0, -1'5)$; $P_4(\pi, 0'4)$; $P_5(\frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$.

La primera coordenada representa el ángulo medido en sentido positivo mientras que la segunda es la distancia desde el origen:



Ejemplo 7.23 *Hallar la ecuación polar de la recta radial $y = ax$*

Basta sustituir $x = \rho\cos\theta$ e $y = \rho\operatorname{sen}\theta$, obteniéndose $\rho\operatorname{sen}\theta = a\rho\cos\theta \to \tan\theta = a$: la amplitud (el ángulo) θ es constante y el radio $\rho \in \mathcal{R}^+$.

En coordenadas polares, las rectas que pasan por el origen se les llama rectas polares y su ecuacin se puede expresar como $\theta = k \cdot \alpha$.

Ejemplo 7.24 *Hallar la ecuación polar de la circunferencia de centro el origen y radio r.*

La ecuación cartesiana de esta circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ por lo que, sustituyendo las expresiones $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\operatorname{sen}\theta$, se obtiene la ecuación polar $\rho = r$ para $0 \leq \theta \leq 2\pi$: el radio ρ es constante mientras el ángulo $\theta \in \mathcal{R}^+$.

Ejemplo 7.25 *Hallar la ecuación polar de la curva de Kappa* $y^2(x^2 + y^2) = a^2x^2$

Sustituyendo los valores $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\operatorname{sen}\theta$, y teniendo en cuenta que $cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$, resulta $\rho^4\operatorname{sen}^2\theta = a^2\rho^2\cos^2\theta \to \rho = a\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$

7.3.1. Protocolo para la representación de curvas planas definidas en forma polar

Representar la función polar $\rho = \rho(\theta)$ es un proceso generalmente complejo, por lo que sólo se dará una orientación para la representación de funciones polares de expresiones sencillas. Pero no debemos olvidar que el radio vector ρ va girando en sentido positivo (contrario al movimiento de las agujas del reloj) conforme aumenta el argumento θ.

Para representar la función polar $\rho = \rho(\theta)$ seguiremos el siguiente proceso:

1. **Dominio:** Para hallar el dominio de existencia de una función polar se hallan los valores de θ para los que existe ρ en la forma estudiada para las funciones explícitas.

   Pero para representar una función polar, tomaremos sólo los valores $\theta \geq 0$.

   Ejemplo 7.26 *Hallar el dominio de la función* $\rho = \dfrac{\theta + 1}{\operatorname{sen}\theta}$

   Es evidente que el dominio de esta función es $D = \mathcal{R}^+ - \{k\pi,\ k \in \mathcal{N}\}$.

   Ejemplo 7.27 *Hallar el dominio de la función* $\rho = \dfrac{\theta}{\theta + \pi}$

   Igualmente, el dominio de esta función es $\theta \in \mathcal{R}^+$

2. **Periodicidad:** Recordemos que una función expresada en coordenadas cartesianas es periódica de periodo T si $f(x + T) = f(x)$ y la forma de la gráfica correspondiente se repite en cada intervalo de x de longitud T. Esto quiere decir que la curva mantiene la misma forma conforme se aleja del origen.

   De igual forma, la función expresada en coordenadas polares $\rho = \rho(\theta)$ es periódica de periodo α si $\rho(\theta + \alpha) = \rho(\theta)$. Pero a diferencia de las curvas cartesianas, si una función polar es periódica de periodo α, la curva $\rho = \rho(\theta)$ coincide consigo misma en cada nuevo ángulo de amplitud α.

El menor valor del periodo para el que la función $\rho = \rho(\theta)$ es periódica se llama *periodo fundamental*.

Ejemplo 7.28 *Demostrar que el periodo fundamental de la función* $\rho = \cos\theta$ *es* π

Basta hallar $\rho(\theta + \pi) = \cos(\theta + \pi) = -\cos\theta$ obteniéndose los puntos de coordenadas polares $(\theta + \pi, -\cos\theta)$ que coinciden con los puntos $(\theta, \cos\theta)$.

Pero, en líneas generales, el periodo fundamental de las funciones $\rho = m + n\,\mathrm{sen}(a\theta)$ y $\rho = m + n\cos(a\theta)$ es el intervalo $[0, 2\pi]$

Por lo tanto, si se desea representar la función polar periódica $\rho = \rho(\theta)$, sólo es necesario representarla en el intervalo fundamental $[0, \alpha]$ y luego continuar repitiendo esta forma.

3. **Simetría:** La curva $\rho = \rho(\theta)$ es simétrica con respecto al eje $\theta = \alpha$ si $\rho(\alpha - \theta) = \rho(\alpha + \theta)$.

Ejemplo 7.29 *Comprobar que los ejes de simetría de la curva* $\rho = \mathrm{sen}(a\theta)$ *son las rectas polares* $\alpha = (2k+1)\frac{\pi}{2a}$.

Sustituyendo θ por $(2k+1)\frac{\pi}{2a}$ y recordando que $\mathrm{sen}(a+b) = \mathrm{sen}\,a\cos b + \cos a\,\mathrm{sen}\,b$, resulta

$$\rho((2k+1)\frac{\pi}{2a} + \theta) = \mathrm{sen}((2k+1)\frac{\pi}{2} + a\theta) = (-1)^k\cos(a\theta)$$

y el mismo valor se obtiene para $\rho((2k+1)\frac{\pi}{2a} - \theta)$.

De la misma forma se demuestra que los ejes de simetría de la función $\rho = \cos(a\theta)$ son las rectas polares $\alpha = \frac{k\pi}{a}$.

Los mismos ejes de simetra se obtienen para las funciones $m+n\,\mathrm{sen}(a\theta)$ y $m + n\cos(a\theta)$

Además, si $\theta = \alpha$ es una eje de simetría, también lo es $\theta = \pi + \alpha$, pues de hecho, es la misma recta.

Como casos particulares de simetría, indicaremos que la curva correspondiente a la función $\rho(\theta)$ es simétrica con respecto

a) al eje horizontal si $\rho(2\pi - \theta) = \rho(\theta)$ o también si $\rho(-\theta) = \rho(+\theta)$

b) al eje vertical si $\rho(\frac{\pi}{2} - \theta) = \rho(\frac{\pi}{2} + \theta)$ o también si $\rho(\pi - \theta) = \rho(\theta)$

c) al origen si $\rho(\pi + \theta) = \rho(\theta)$

4. **Extremos:** En general, el proceso es semejante al seguido en las funciones explícitas. Y así, si en las funciones explícitas se hallan los valores de x que hacen que $f(x)$ sea Máximo o mínimo y obteniendo los puntos $(x, f(x))$, en las funciones polares se hallan los valores de θ que hacen que ρ sea Máximo o mínimo y obteniendo los puntos $(\theta, \rho(\theta))$ resolviendo la ecuación $\rho' = \frac{d\rho}{d\theta} = 0$ y sustituyendo las raíces correspondientes en la ecuación $\rho'' = \frac{d^2\rho}{d\theta^2}$: si $\rho''(\theta_0) > 0$ se obtiene un mínimo y si $\rho''(\theta_0) < 0$ resulta un Máximo.

Ejemplo 7.30 *Hallar los extremos de la función* $\rho(\theta) = \frac{3}{2} + \cos(3\theta)$

Para esta función es
$\rho'(\theta) = -3\,\mathrm{sen}(3\theta) = 0 \to 3\theta = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi$ por lo que
$\theta = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$. Sustituyendo estos valores en $\rho''(\theta) = -9\cos(3theta)$ y teniendo en cuenta su signo, resulta que la función posee un Máximo en los puntos $(0, 2)$, $(\frac{2\pi}{3}, 2)$ y $(\frac{4\pi}{3}, 2)$, mientras que posee mínimo en los puntos $(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2})$, $(\pi, \frac{1}{2})$ y $(\frac{5\pi}{3}, \frac{1}{2})$

5. **Puntos críticos:** Son los puntos en los que existen tangente horizontal o vertical.

   Puntos de tangente horizontal: Se hallan los valores que anulan $\frac{dy}{d\theta}$ teniendo en cuenta que $y = \rho(\theta)\operatorname{sen}\theta$

   Puntos de tangente vertical: Se hallan los valores que anulan $\frac{dx}{d\theta}$ siendo $x = \rho(\theta)\cos\theta$

   Ejemplo 7.31 *Hallar los puntos críticos de la función* $\rho(\theta) = \cos(2\theta)$

   Tangentes horizontales: Es $y = \rho(\theta)\operatorname{sen}\theta = \cos(2\theta)\operatorname{sen}\theta$.
   Como $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$ resulta que
   $y = (1 - 2\operatorname{sen}^2\theta)\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\theta - 2\operatorname{sen}^3\theta$ por lo que

$$\begin{aligned}\frac{dy}{d\theta} &= \cos\theta - 6\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta = \cos\theta(1 - 6\operatorname{sen}^2\theta) = 0\\ &\to \begin{cases}\cos\theta = 0 \to \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\\ 1 - 6\operatorname{sen}^2\theta = 0 \to \operatorname{sen}\theta = \pm\sqrt{\frac{1}{6}} \to \theta = \begin{cases}\pm 24^0\\ 180^0 \pm 24^0\end{cases}\end{cases}\end{aligned}$$

   Tangentes verticales: Es $x = \rho(\theta)\cos\theta = \cos(2\theta)\cos\theta$.
   Puesto que $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$, entonces
   $x = (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta = 2\cos^3\theta - \cos\theta$ por lo que

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\theta} &= -6\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\theta(1 - 6\cos^2\theta) = 0\\ &\to \begin{cases}\operatorname{sen}\theta = 0 \to \theta = 0, \pi\\ 1 - 6\cos^2\theta = 0 \to \cos\theta = \pm\sqrt{\frac{1}{6}} \to \theta = \begin{cases}\pm 66^0\\ 180^0 \pm 66^0\end{cases}\end{cases}\end{aligned}$$

6. **Asíntotas:** Sea el ángulo α un valor tal que $\lim\limits_{\theta\to\alpha^\pm}\rho(\theta) = +\infty$ con la condición de que $\lim\limits_{\theta\to\alpha^\pm}\rho(\theta)\operatorname{sen}(\theta - \alpha)$ sea un número finito positivo m que representa la distancia al origen de la asíntota.

a) Si $m \neq 0$, la curva presenta una rama infinita en dirección a la asíntota $\rho \operatorname{sen}(\theta - \alpha) = m$ con

1) $\theta \in (\alpha, \alpha + \frac{\pi}{2}]$, si $\theta \to \alpha^+$
2) $\theta \in [\alpha - \frac{\pi}{2}, \alpha)$ si $\theta \to \alpha^-$

b) Si $m = 0$, entonces la asíntota es $\theta = \alpha$

7. **Puntos múltiples:** Son todos los puntos en los que $(\theta_0, \rho(\theta_0)) = (\theta_1, \rho(\theta_1)) = (\theta_2, \rho(\theta_2)) = \cdots$

8. **Otros puntos:** En caso necesario, se dan valores a θ para hallar algunos otros puntos $(\theta, \rho(\theta))$

Ejemplo 7.32 *Representar la función* $\rho(\theta) = 2 + \operatorname{sen}(3\theta)$

1. **Dominio:** Es evidente que el dominio es $\mathcal{R}^+$.

2. **Periodicidad:** Esta curva es periódica de periodo $\alpha = 2\pi$.

3. **Simetría:**

   Según un ejemplo anterior, las rectas polares $\theta = (2k+1)\frac{\pi}{6}$ son ejes de simetría de esta curva. Es decir, las rectas $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$

4. **Extremos:**

   $\rho' = 3\cos(3\theta) = 0 \to 3\theta = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2}, \dfrac{7\pi}{2}, \dfrac{9\pi}{2}, \dfrac{11\pi}{2}, \ldots$ y por lo tanto,

   $\theta = \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{3\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{9\pi}{6} = \dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{11\pi}{6}$. Estos valores debemos sutituirlos en la derivada segunda $\rho'' = -9\operatorname{sen}(3\theta)$, resultando valores de signos $-, +, -, +, -, +$. En consecuencia, la curva posee Máximos en los puntos $(\frac{\pi}{6}, 3)$, $(\frac{5\pi}{6}, 3)$, $(\frac{9\pi}{6}, 3)$ y mínimos en $(\frac{3\pi}{6}, 1)$, $(\frac{7\pi}{6}, 1)$, $(\frac{11\pi}{6}, 1)$

5. **Puntos críticos:**

   Puntos de tangente horizontal: Puesto que $\operatorname{sen}(3\theta) = 3\operatorname{sen}\theta - 4\operatorname{sen}^3\theta$, resulta que $y = \rho\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(3\theta)\operatorname{sen}\theta = 3\operatorname{sen}^2\theta - 4\operatorname{sen}^4\theta$ por lo que

$$\begin{aligned}\frac{dy}{d\theta} &= 6\operatorname{sen}\theta\cos\theta - 16\operatorname{sen}^3\theta\cos\theta = \operatorname{sen}(2\theta)(3 - 8\operatorname{sen}^2\theta) = 0 \\ &\to \left\{\begin{array}{l}\operatorname{sen}(2\theta) = 0 \to \theta = 0 \wedge \theta = \frac{\pi}{2} \\ 3 - 8\operatorname{sen}^2\theta = 0 \to \operatorname{sen}\theta = \sqrt{\frac{3}{8}} \to \theta = 38^0 \wedge \theta = 142^0\end{array}\right.\end{aligned}$$

   Por lo tanto, hay tangente horizontal en los puntos $(0,0)$, $(38^0, 0'91)$, $(90^0, -1)$ y $(142^0, 0'91)$.

6. **Puntos de tangente vertical:** Se repite el proceso anterior para la función $x(\rho, \theta) = \rho\cos\theta = \operatorname{sen}(3\theta)\cos\theta$ teniendo en cuenta que $\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ y resulta la ecuación

$16\cos^4\theta - 14\cos^2\theta + 1 = 0$ y de aquí resultan los puntos en los que hay tangente vertical: $(27, 0'99)$, $(74, -0'67)$, $(153, 0'99)$, $(106, -0'67)$.

7. **Punto múltiple:** Si $\text{sen}(3\theta) = 0$, entonces $\theta = 0,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3}$ obteniéndose los puntos $(0,0)$, $(\frac{\pi}{3}, 0)$, $(\frac{2\pi}{3}, 0)$ lo que indica que la curva pasa tres veces por el origen de coordenadas.

8. **Otros puntos:** Hallamos algunos puntos más para θ comprendido entre 0 y $\frac{\pi}{6}$: $(\frac{\pi}{15}, 0'59)$, $(\frac{\pi}{12}, 0'71)$, $(\frac{\pi}{10}, 0'81)$, $(\frac{\pi}{9}, 0'87)$, $(\frac{\pi}{8}, 0'92)$,

La gráfica de esta curva es

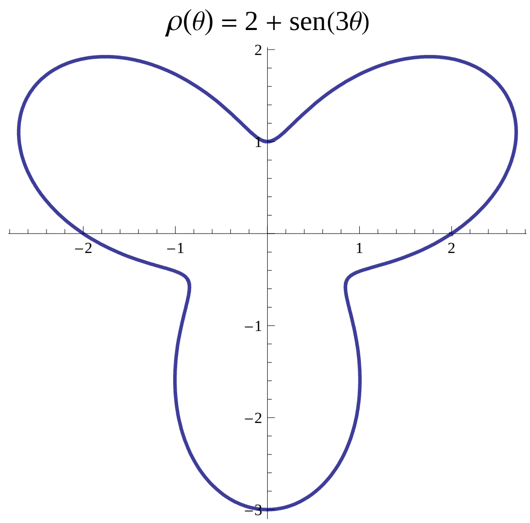
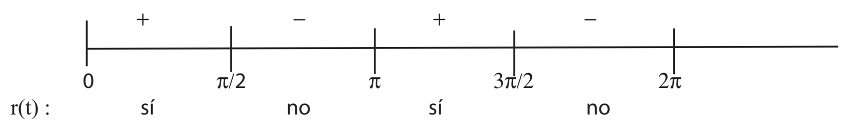


Figura 7.12: Gráfica de $\rho(\theta) = 2 + \text{sen}(3\theta)$

Ejemplo 7.33 *Representar la función* $r^2 = \text{sen}(2t)$

1. **Dominio:** La función es real siempre que $\text{sen}(2t)$ sea un número positivo. Seguiremos el mismo proceso utilizado anteriormente para hallar el dominio de una función explícita irracional: $\text{sen}(2t) = 0 \rightarrow 2t = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ 4\pi$ de donde se obtienen los puntos $t = 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2},\ 2\pi$ por lo que se obtienen los intervalos que se indican en la figura



   Por tanto $D = [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\pi, \frac{3\pi}{2}]$ lo que indica que sólo hay curva en el primero y tercer cuadrante.

2. **Periodicidad:** La curva es periódica de periodo 2π

3. **Simetría:** Teniendo en cuenta los valores positivo y negativo de r, la curva es simétrica con respecto al origen. Por otra parte, $r(\dfrac{\pi}{4} - t) = \sqrt{\text{sen}(\dfrac{\pi}{2} - 2t)} = \sqrt{cos(2t)} = r(\dfrac{\pi}{4} + t)$ por lo que la curva e simétrica con respecto a la bisectriz I-III. Teniendo en cuenta el dominio representaremos la curva sólo en el primer cuadrante y, por simetría, representaremos la curva en el tercer cuadrante.

4. **Extremos:**
   Máximos: $r(t) = 1 \rightarrow \text{sen}(2t) = 1 \rightarrow 2t = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = \frac{\pi}{4} \rightarrow (45^0, 1)$
   Mínimos: $r(t) = 0 \rightarrow \text{sen}(2t) = 0 \rightarrow t = 0 \rightarrow (0, 0)$

5. **Puntos críticos:**
   Tener en cuenta que $\text{sen}(2t) = 2\,\text{sen}\,t \cos t$, $\cos(2t) = \cos^2 t - \text{sen}^2\, t$.

Puntos de tangente horizontal:
Se deriva la función $y(t) = r \operatorname{sen} t = \sqrt{\operatorname{sen}(2t)} \operatorname{sen} t$:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} = 0 \quad &\rightarrow \quad \frac{\cos(2t)}{\sqrt{\operatorname{sen}(2t)}} \operatorname{sen} t + \sqrt{\operatorname{sen}(2t)} \cos t = 0 \\
&\rightarrow \quad \operatorname{sen} t(cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t) + 2 \operatorname{sen} t \cos^2 t = 0 \\
&\rightarrow \quad \operatorname{sen} t(3\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t) = 0 \\
&\rightarrow \quad \begin{cases} \operatorname{sen} t = 0 \rightarrow t = 0 \\ 3\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t = 0 \rightarrow \operatorname{tg} t = \sqrt{3} \rightarrow t = \frac{\pi}{3} \end{cases}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, hay una tangente horizontal en el punto $(0, 0)$ y otra en el punto $(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

Puntos de tangente vertical:
Se deriva $x(t) = r \cos t = \sqrt{\operatorname{sen}(2t)} \cos t$:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} = 0 \quad &\rightarrow \quad \frac{\cos(2t)}{\sqrt{\operatorname{sen}(2t)}} \cos t - \sqrt{\operatorname{sen}(2t)} \operatorname{sen} t = 0 \\
&\rightarrow \quad \cos t \cos(2t) - \operatorname{sen}(2t) \operatorname{sen} t = 0 \\
&\rightarrow \quad \cos t(cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t) - 2\operatorname{sen}^2 t \cos t = 0 \\
&\rightarrow \quad \cos t(\cos^2 t - 3\operatorname{sen}^2 t) = \cos t(1 - 4\operatorname{sen}^2 t) = 0 \\
&\rightarrow \quad \begin{cases} \cos t = 0 \rightarrow t = \frac{\pi}{2} \\ 1 - 4\operatorname{sen}^2 t = 0 \rightarrow \operatorname{sen} t = \frac{1}{2} \rightarrow t = \frac{\pi}{6} \end{cases}
\end{aligned}$$

Por lo que hay tangente vertical en $(\frac{\pi}{2}, 0)$ y en $(\frac{\pi}{6}, \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}})$

6. **Puntos múltiples:** $r(0) = r(\frac{\pi}{2})$ por lo que la curva pasa dos veces por el origen de coordenadas.

La gráfica conseguida es

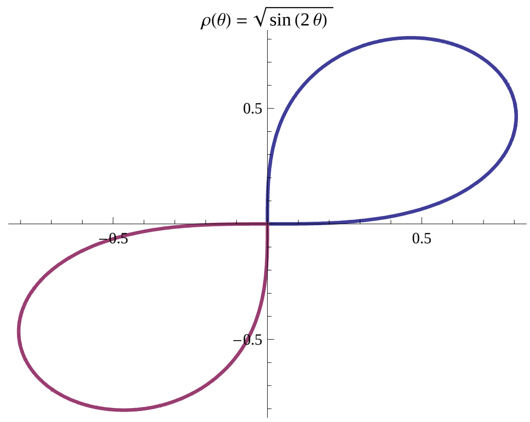


Figura 7.13: Gráfica de $r = \sqrt{\operatorname{sen}(2t)}$
Lemniscata

Ejemplo 7.34 *Representar la función* $\rho = \operatorname{sen}\theta\cos^2\theta$

1. **Dominio:** Evidentemente, el dominio de ρ es $\mathcal{R}^+$.

2. **Periodicidad:** $\alpha = 2\pi$. Además, $\cos^2\theta$ es siempre positivo mientras que $\operatorname{sen}\theta$ es negativo para $\pi \leq t \leq 2\pi$ por lo que el punto correspondiente a $\theta+\pi$ coincide con el correspondiente a θ. En consecuencia, la gráfica de esta función se encuentra siempre por encima del eje horizontal (de hecho, se puede tomar como periodo fundamental de periodicidad el $[0,\pi]$).

3. **Simetría:** Puesto que
$\rho(\pi-\theta) = \operatorname{sen}(\pi-\theta)\cos^2(\pi-\theta) = \operatorname{sen}\theta\cos^2\theta = \rho(\theta)$ la recta polar $\theta = \frac{\pi}{2}$ es un eje de simetría de la curva por lo que sólo se toman los puntos del primer cuadrante.

4. **Extremos:** De $\rho' = \cos^3\theta - 2\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta = \cos\theta(1-3\operatorname{sen}^2\theta) = 0$ se deduce que
a) $\cos\theta = 0 \to \theta = \frac{\pi}{2}$
b) $1 - 3\operatorname{sen}^2\theta = 0 \to \operatorname{sen}^2\theta = \dfrac{1}{3} \to t = arc\operatorname{sen}\dfrac{1}{\sqrt{3}} \to t = 35^0$
de donde resultan los puntos $(\frac{\pi}{2}, 0)$ (mínimo) y $(35^0, 0'38)$ (Máximo)

5. **Puntos críticos:**
a) *De tangente horizontal:*
$\dfrac{dy}{d\theta} = \dfrac{d}{d\theta}(\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta) = \dfrac{1}{4}\dfrac{d}{d\theta}(\operatorname{sen}^2(2\theta)) = \dfrac{1}{2}\operatorname{sen}(4\theta) = 0$ de donde resulta $4\theta = 0, \pi \to \theta = 0 \wedge \frac{\pi}{4}$
b) *De tangente vertical:*
$\dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{d}{d\theta}(\operatorname{sen}2\theta\cos^3\theta) = \cos^4\theta - 3\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta = \cos^2\theta(1-4\operatorname{sen}^2\theta) = 0$ de donde
a) $\cos\theta = 0 \to \theta = \frac{\pi}{2}$
b) $1 - 4\operatorname{sen}^2\theta = 0 \to \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}\theta = 45^0$

Representando estos datos y teniendo en cuenta la simetría con respecto al eje $\theta = \frac{\pi}{2}$, la gráfica de esta curva adopta la forma

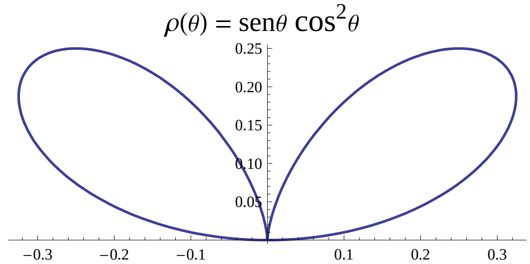


Figura 7.14: Gráfica de $\rho = \operatorname{sen}\theta\cos^2\theta$

Hay ciertas funciones polares que es mejor representarlas directamente sin más que dar valores al argumento como sucede con las funciones $r = \ln t$ y $r = t$. Ver Figuras 7.15 y 7.16

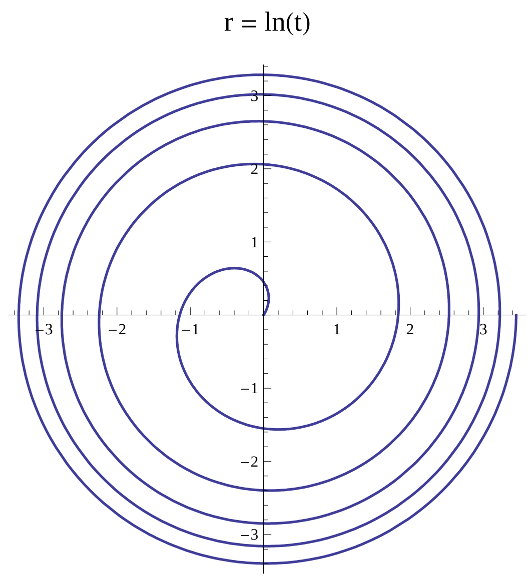


Figura 7.15: Espiral logarítmica

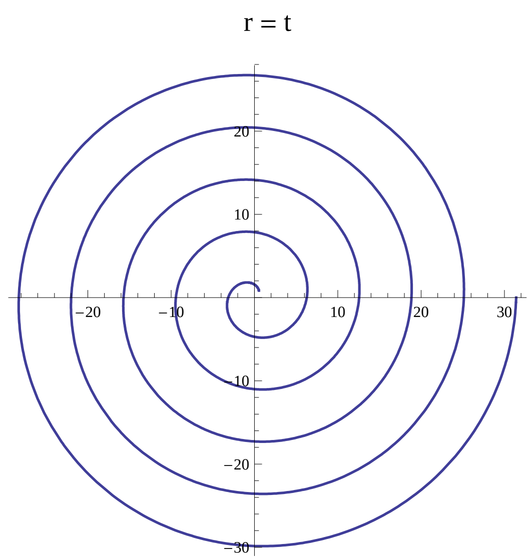


Figura 7.16: Espiral de Arquímedes

7.4. EJERCICIOS RESUELTOS

1. Representar la función $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-2}{-x^2+2x+3}\right)$

   a) **Dominio**: $(x-2=0 \to x=2)$, $(-x^2+2x+3=0 \to x=-1$, $x=3)$. Tomando valores intermedios se encuentra que el dominio de esta función es $D=(-\infty,-1)\cup(2,3)$

   b) **Asíntotas**:

      Verticales: Posee A.V. en $x=-1^-$, $x=2^+$, $x=3^-$.

      Horizontal: $(x\to\infty)\Rightarrow(y\to\infty)$: la curva no posee A.H.

      Oblicua:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x-2)-\ln(-x^2+2x+3)}{x} \\ &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{2x-2}{x^2-2x-3}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{-x^2+\cdots}{x^3+\cdots} = 0 \end{aligned}$$

      por lo que la curva no posee A.O.

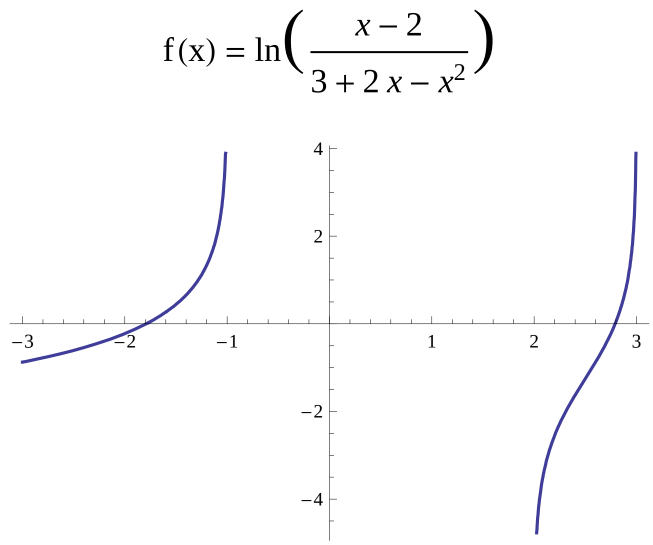
   c) **Simetría**: La forma del dominio indica que la función no puede ser simétrica.

   d) **Puntos de corte con los ejes**:

      Con el eje Y: $x=0\notin D$ por lo que la curva no corta al eje vertical. Con el eje X: $y=0\to \dfrac{x-2}{-x^2+2x-3}=1\to x^2-x-5=0$ cuyas soluciones son $x=\frac{1\pm\sqrt{21}}{2}$ lo que indica que la curva corta al eje horizontal en los puntos $\left(\dfrac{1\pm\sqrt{21}}{2},0\right)$

   e) **Crecimiento**: $f'(x)=\dfrac{x^2-4x+7}{(x-2)(-x^2+2x+3)}=0\to x^2-4x+7=0$ cuyas soluciones no son reales por lo que la curva no posee extremos relativos. Y dado que $f'(x)>0$ para todo valor de x, la curva es creciente en su dominio.

La gráfica de esta función es



2. Representar la función $f(x) = e^{-x}\sqrt[3]{x+1}$

a) **Dominio**: Es fácil comprobar que $D = \mathcal{R}$.

b) **Asíntotas**:

Verticales: si $y \to \infty$ entonces $x \to \infty$ por lo que la curva no posee A.V.

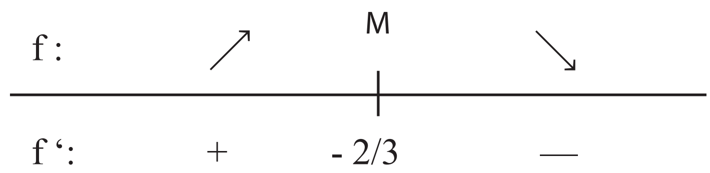
Horizontal: $y = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x+1}}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}e^x} = 0$ por lo que $y = 0$ es una A.H. a la que la curva corta en el punto $(-1, 0)$

Oblicua: no tiene.

c) **Simetría**: Esta curva no es simétrica puesto que $f(-x) = e^x\sqrt[3]{-x+1} \neq f(x)$.

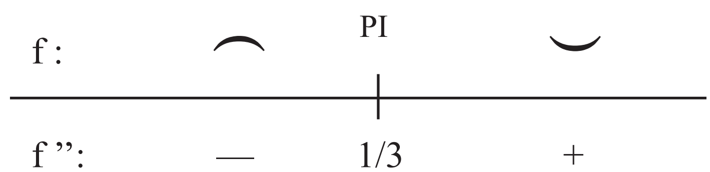
d) **Puntos de corte con los ejes**: Con el eje Y es el punto $(0, 1)$ mientras que con el eje X es el $(-1, 0)$

e) **Crecimiento**: $f'(x) = e^{-x}\dfrac{-3x-2}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}} = 0 \to x = -2/3$ obteniéndose los intervalos de crecimiento



Entonces, $\left(-\frac{2}{3}, \sqrt[3]{\frac{e^2}{3}}\right)$ es un Máximo de la curva.

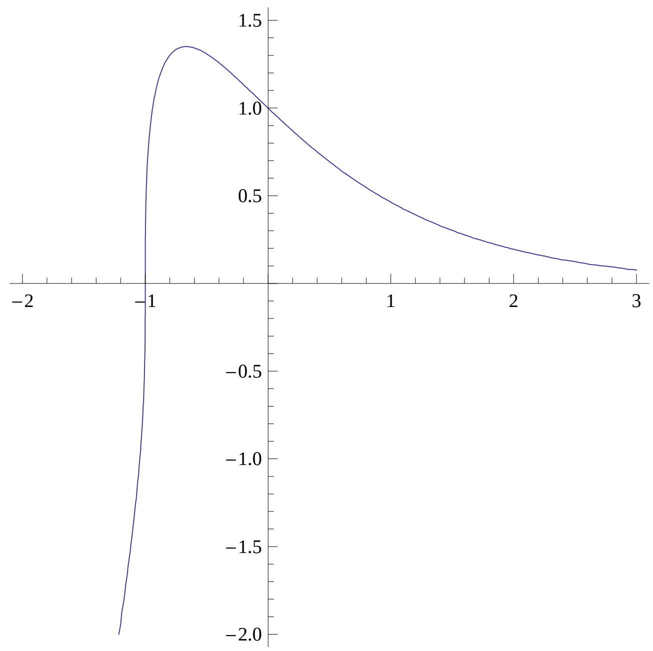
f) **Concavidad**: $f''(x) = e^{-x}\dfrac{3x^2+2x-1}{3\sqrt[3]{(x+1)^5}} = e^{-x}\dfrac{3x-1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}0 \to$ $3x-1=0$ cuya única solución es $x = 1/3$ y se obtienen los intervalos de concavidad



Por tanto, $\left(\frac{1}{3}, \sqrt[3]{\frac{4}{3e^3}}\right)$ es un punto de inflexión.

La gráfica de esta función es

$$f(x) = e^{-x}\sqrt[3]{x+1}$$



3. Representar la función $x(t) = \dfrac{t^2}{t^2+1}$, $y(t) = \dfrac{2t}{t^2+1}$

   a) **Dominios:** Para x: para todo valor de $t \in \mathcal{R}$, la función $x(t)$ es positiva y menor que 1 puesto que el numerador es menor que el denominador por lo que el dominio de $x(t)$ es el $D_X = [0,1]$. De forma parecida, $D_Y = [-1,1]$

   b) **Simetría:** Sustituyendo t por $-t$ resulta $x(-t) = \dfrac{t^2}{t^2+1} = x(t)$, $y(-t) = -\dfrac{2t}{t^2+1} = -y(t)$ por lo que la curva es simétrica con respecto al eje X.

   c) **Puntos de corte con los ejes:** Con el eje Y se hace $x = 0$ por lo que es $t = 0 \to y = 0$: el punto de corte es el origen $(0,0)$. Con el eje X se hace $y = 0 \to t = 0$ o bien $t = \infty$; en el primer caso se obtiene el punto $(0,0)$ mientras que para $t \to \infty$ es

$x = \lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{t^2}{t^2+1} = 1$ con lo que resulta el punto $(1, 0)$.

d) **Puntos críticos:** Se hallan las derivadas de x e y con respecto a t para luego hallar la derivada de y con respecto a x:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dy}{dt} = \frac{2(t^2+1)-2t\cdot 2t}{(t^2+1)^2} = \frac{2-2t^2}{(t^2+1)^2} \\ \frac{dx}{dt} = \frac{2t(t^2+1)-t^2 2t}{(t^2+1)^2} = \frac{2t}{(t^2+1)^2} \end{array}\right\} \to y' = \frac{dy}{dx} = \frac{2(1-t^2)}{2t} = \frac{1-t^2}{t}$$

Puntos de tangente horizontal: $y' = 0 \to 1 - t^2 = 0 \to t = \pm 1$ con lo que se obtienen los puntos $(\frac{1}{2}, 1)$ y $(\frac{1}{2}, -1)$. Evidentemente, y dada la simetría con respecto al origen, el primero de ellos es un punto Máximo para y mientras que el segundo es un mínimo.

Puntos de tangente vertical: $y' = \pm\infty \to (t = 0 \to (0, 0))$ o bien $(t \to \infty \to (1, 0))$.

e) **Puntos de inflexión:** Aunque no sea estrictamente necesario, hallemos los puntos de inflexión de esta curva.

La derivada segunda de la función y con respecto a x es
$y'' = \dfrac{dy'/dt}{dx/dt} = \dfrac{-2t \cdot t - (1-t^2)}{t^2} \dfrac{1}{\frac{2t}{(t^2+1)^2}} = -\dfrac{(t^2+1)^3}{2t^3}$.
Si se anula esta derivada $y'' = 0 \to t^2 + 1 = 0 \to t \notin \mathcal{R}$ por lo que la curva no tiene puntos de inflexión.

f) **Asíntotas:**

Verticales: Si $y \to \infty$ entonces $t^2 + 1 = 0 \to t \notin \mathcal{R}$ por lo que la curva no tiene asíntota vertical.

Horizontal: Por la misma razón que antes, no hay.

Oblicua: Su ecuación es $y = mx + n$ siendo $m = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{y}{x}$. Pero x no tiende a infinito, por lo que no existen asíntotas oblicuas.

La gráfica de esta función tiene la forma

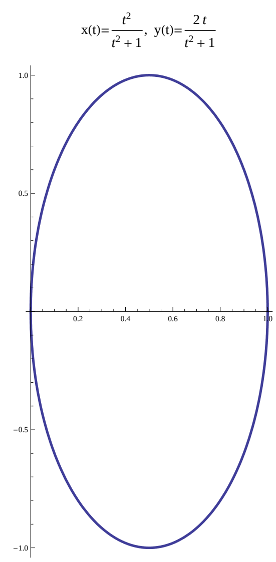


Figura 7.17: Gráfica de $x(t) = \dfrac{t^2}{t^2+1},\ y(t) = \dfrac{2t}{t^2+1}$
Elipse

4. Representar la función $\left(\dfrac{t}{t^2-1}, \dfrac{t^3}{t^2+1}\right)$

   a) **Dominios:**
   Para x: $x = \dfrac{t}{t^2-1} \rightarrow xt^2 - t - x = 0$ por lo que
   $t = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4x^2}}{2x} \rightarrow D_X = \mathcal{R}$
   Para y: $y = \dfrac{t^3}{t^2+1} \rightarrow t^3 - yt^2 - y = 0 \rightarrow t \in \mathcal{R}$ lo que indica que su dominio es $D_Y = \mathcal{R}$. (Posteriormente se verá que $y = \pm\frac{1}{2}$ son dos asíntotas horizontales por lo que verdaderamente $D_Y = \mathcal{R} - \{-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\}$, pero en este punto se admite que $D_Y = \mathcal{R}$).

   b) **Simetría:** Puesto que $x(-t) = -x(t)$, $y(-t) = -y(t)$, la curva es simétrica con respecto al origen.

c) **Puntos críticos:**

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dy}{dt} = \frac{t^2(t^2+3)}{(t^2+1)^2} \\ \frac{dx}{dt} = -\frac{t^2+1}{(t^2-1)^2} \end{array}\right\} \to y' = -\frac{t^2(t^2+3)(t^2-1)^2}{(t^2+1)^3}$$

Puntos de tangente horizontal: $y' = 0 \to t = 0 \to (0,0)$ ó $t = \pm 1 \to (x \to \infty)$ por lo que no hay puntos de tangente horizontal.

Puntos de tangente vertical: $y' = \infty \to t = \infty \to (0, \infty)$ por lo que la curva no tiene puntos de tangente vertical.

Crecimiento: puesto que $y' \leq 0$ para todo valor de t, la función es continuamente decreciente.

d) **Asíntotas:**

Verticales: si $y \to \infty$ entonces $t \to \infty$ por lo que $x = 0$ es una A.V.

Horizontales: si $x \to \infty$ entonces $t = \pm 1$ por lo que $y = \pm\frac{1}{2}$ son A.H.

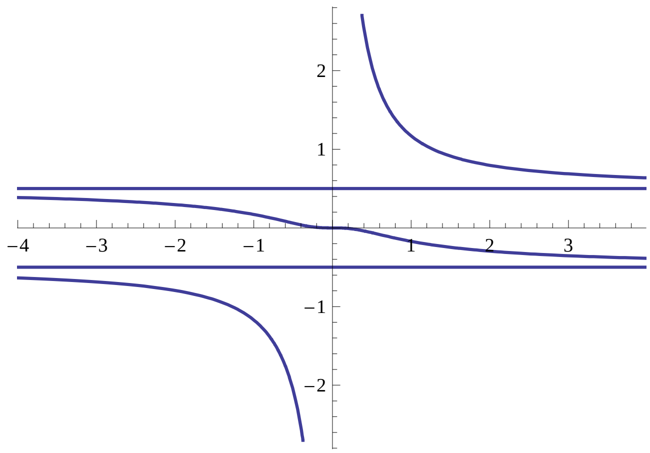
Oblicuas: $y = m\,x + n$ siendo $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{y}{x}$

Como $(x \to \infty) \Rightarrow (t = 1 \wedge t = -1$, debemos hallar ambos valores de m. Finalmente, $\dfrac{y}{x} = \dfrac{t^3}{t^2+1} : \dfrac{t}{t^2-1} = \dfrac{t^3(t^2-1)}{t(t^2+1)}$ por lo que $m = 0$, tanto si $t \to +1$ como si $t \to -1$ por lo que la curva no posee asíntota oblicua.

e) **Otros puntos:** Para $t = 2$ se obtiene el punto $(\frac{2}{3}, \frac{8}{5})$. Para $t = \frac{1}{2}$ resulta el punto $(-\frac{2}{3}, \frac{1}{10})$

Su gráfica es

$$x(t) = \frac{t}{t^2 - 1}, \qquad y(t) = \frac{t^3}{t^2 + 1}$$



5. Representar la curva de ecuaciones paramétricas $x(t) = \dfrac{t}{1+t^3}$, $y(t) = \dfrac{t^2}{1+t^3}$

   a) **Dominios:** De x: $\dfrac{t}{t^3+1} = x \to xt^3 - t + x = 0$, ecuación polinómica de tercer grado que siempre tiene al menos una solución real $t \in \mathcal{R}$ por lo que el dominio para la variable x es $D_X = \mathcal{R}$. Igual sucede para la variable y por lo que $D_Y = \mathcal{R}$.

   b) **Simetría:** Sustituyendo t por $-t$ resulta $x(-t) = \frac{-t}{1-t^3} = \frac{t}{t^3-1} \neq \pm x(t)$ por lo que la curva no es simétrica con respecto a los ejes de coordenadas. Pero cambiando t por $\frac{1}{t}$ es $x(1/t) = \dfrac{\frac{1}{t}}{1+(\frac{1}{t})^3} = \dfrac{t^2}{t^3+1} = y(t)$ por lo que la curva es simétrica con respecto a la bisectriz I-III.

   c) **Puntos de corte con los ejes:** Con el eje Y: se hace $x = 0$ por lo que o bien es $t = 0 \to y = 0$ o bien es $t = \infty \to y = 0$. En ambos casos, el punto de corte es el origen $(0, 0)$.

Con el eje X: se hace $y = 0 \to t = 0$ o es $t = \infty$ por lo que en ambos casos se obtiene el mismo punto que para el eje Y, el $(0,0)$.

d) **Puntos críticos:** Puesto que $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt}$ es

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dy}{dt} = \frac{2t-t^4}{(1+t^3)^2} \\ \frac{dx}{dt} = \frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2} \end{array}\right\} \to y' = \frac{dy}{dx} = \frac{2t - t^4}{1 - 2t^3}$$

Puntos de tangente horizontal:
$y' = 0 \to 2t - t^4 = 0 \to t(2 - t^3) = 0 \to t = 0, t = \sqrt[3]{2}$ por lo que se obtienen los puntos $(0,0)$ y $(\dfrac{\sqrt[3]{2}}{3}, \dfrac{\sqrt[3]{4}}{3})$.
Puntos de tangente vertical: $y' = \infty \to 1 - 2t^3 = 0 \to t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ y $t = \infty$ con lo que resultan los puntos $(\dfrac{2}{3\sqrt[3]{2}}, \dfrac{2}{3\sqrt[3]{4}}) = (\dfrac{\sqrt[3]{4}}{3}, \dfrac{\sqrt[3]{2}}{3})$ y el $(0,0)$.

e) **Puntos de inflexión:** La derivada segunda de y con respecto a x es $y'' = \dfrac{dy'}{dx} = \dfrac{dy'/dt}{dx/dt} = \dfrac{2(t^3+1)^2}{(1-2t^3)^2} : \dfrac{1-2t^3}{(1+t^3)^2} = 2\left(\dfrac{t^3+1}{1-2t^3}\right)^3$.
Ahora bien, si $y'' = 0 \to t^3 + 1 = 0 \to t = -1$ pero, para este valor, no existen x ni y por lo que la curva no tiene puntos de inflexión.

f) **Asíntotas:**
Verticales: Si $(y \to \infty)$ entonces $t = -1$ por lo que $(x \to \infty)$ lo que indica que no hay asíntota vertical.
Horizontales: Por la misma razón que antes, tampoco hay asíntota horizontal.
Oblicuas: Su ecuación es $y = m\,x + n$ siendo

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t\to-1} \frac{t^2}{t} = \lim_{t\to-1} t = -1 \\ n &= \lim_{x\to\infty} (y - mx) = \lim_{t\to-1} (\frac{t^2}{1+t^3} + \frac{t}{1+t^3}) \\ &= \lim_{t\to-1} \frac{t(t+1)}{(t+1)(t^2-t+1)} = \frac{-1}{3} \end{aligned}$$

Luego, la ecuación de la asíntota oblicua es $y = -x - \frac{1}{3}$

g) **Puntos de contacto de la curva con la Asíntota Oblicua:**
Se sustituyen las expresiones de $x(t)$ e $y(t)$ en la ecuación de la asíntota oblicua:
$\dfrac{t^2}{1+t^3} = -\dfrac{t}{1+t^3} - \dfrac{1}{3} \rightarrow (t+1)^3 = 0 \rightarrow t = -1$ pero para este valor no existen x ni y por lo que la curva y la asíntota oblicua no se cortan.

h) **Puntos dobles:** El origen es un punto doble pues se obtiene para $t = 0$ y para $t = \infty$.

La gráfica correspondiente a esta función es

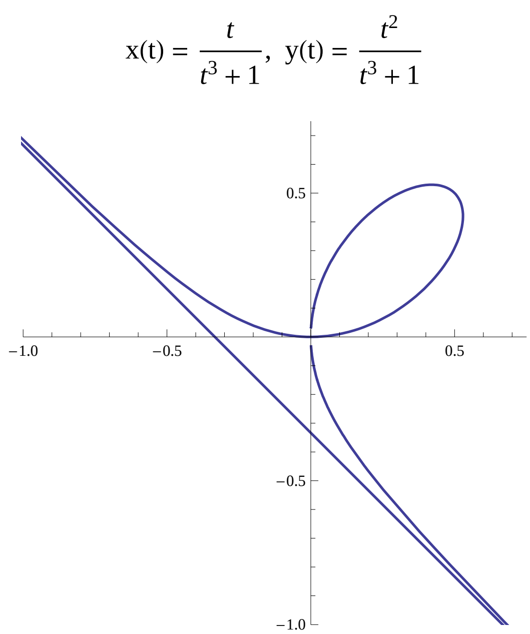


Figura 7.18: Gráfica de $x(t) = \frac{t}{t^3+1},\ y(t) = \frac{t^2}{t^3+1}$
Folium de Descartes

6. Representar la curva de ecuación polar $r = 1 + \cos t$

a) **Dominio:** Evidentemente $D = \mathcal{R}^+$.

b) **Periodicidad:** $t = 2\pi$.

c) **Simetría:** Como se indicó en un párrafo anterior, $t = 0$ y $t = \pi$ son ejes de simetrá, pero ambos coinciden por lo que la curva es simétrica con respecto al eje horizontal.

d) **Extremos:** $r' = -\operatorname{sen} t = 0 \to t = 0, \pi$. Sustituyendo estos valores en $r'' = -\cos t$ resultan los signos $-$, $+$ por lo que r es Máximo en el punto $(0, 2)$ y mínimo en el $(\pi, 0)$

e) **Puntos críticos**: *Puntos de tangente horizontal:* Se resuelve la ecuación $\dfrac{dy}{dt} = 0$ siendo
$y = r \operatorname{sen} t = (1 + \cos t) \operatorname{sen} t = \operatorname{sen} t + \operatorname{sen} t \cos t$ por lo que

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \cos t + \cos^t - \operatorname{sen}^t = \cos t + 2\cos^t - 1 = 0 \\ &\to 2\cos^t + \cos t - 1 = 0 \to \cos t = \frac{-1 \pm 3}{4} \\ &\to \begin{cases} \cos t = \frac{1}{2} \to t = 60^0,\ 300^0 \\ \cos t = -1 \to t = 180^0 \end{cases} \end{aligned}$$

Por lo tanto, hay tangente horizontal en los puntos $(\frac{\pi}{3}, \frac{3}{2})$, $(\frac{5\pi}{3}, \frac{3}{2})$ y $(\pi, 0)$

Puntos de tangente vertical: Ahora es $\dfrac{dx}{dt} = 0$ siendo
$x = r\cos t = (1 + \cos t)\cos t = \cos t + \cos^2 t$ por lo que

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\operatorname{sen} t - 2\operatorname{sen} t \cos t = -\operatorname{sen} t(1 + 2\cos t) = 0 \\ &\to \begin{cases} \operatorname{sen} t = 0 \to t = 0^0,\ 180^0 \\ 1 + 2\cos t = 0 \to \cos t = -\frac{1}{2} \to t = 180^0 \pm 60^0 \end{cases} \end{aligned}$$

Luego, hay tangente vertical en los puntos $(0, 2)$, $(\pi, 0)$, $(120^0, \frac{1}{2})$ y $(240^0, \frac{1}{2})$.

f) **Otros puntos**: $(30^0, 1'87)$, $(45^0, 1'71)$, $(135^0, 0'29)$, $(15^0, 0'13)$

La gráfica correspondiente a esta función es

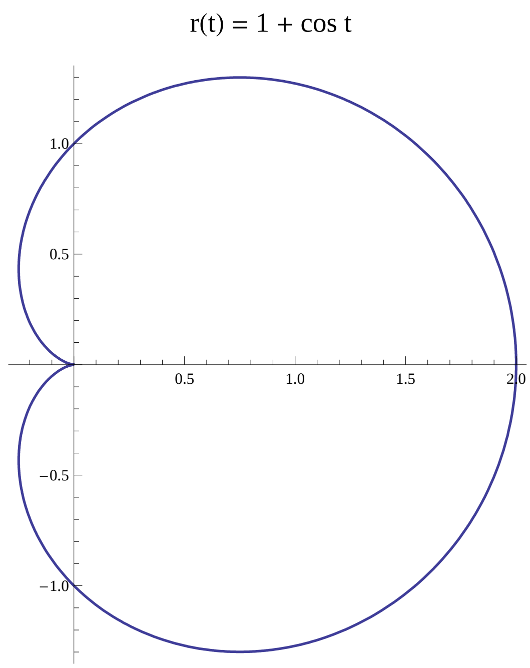


Figura 7.19: Cardioide

7. Representar la curva de ecuación polar $r(t) = \frac{\operatorname{sen} t}{t}$

   a) **Dominio:** Evidentemente $D = \mathcal{R}^+$. Pero, cuando t pertence al tercer y cuarto cuadrante, el valor de $\operatorname{sen} t$ es negativo por lo que la curva sólo posee representación en el semiplano superior.

   b) **Periodicidad:** Debido a la presencia del denominador t, la curva no puede ser periódica.

   c) **Simetría:** No es simétrica con respecto a los ejes coordenados ni tampoco con respecto al origen.

d) **Extremos:** $r'(t) = \dfrac{t\cos t - \operatorname{sen} t^2}{t} = 0 \rightarrow \operatorname{tg} t = t \rightarrow t = 0$: el valor Máximo de la función se encuentra en el punto $(0,1)$ puesto que, aplicando la regla de L'Hpital, $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} t}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\cos t}{1} = 1$. Además, $\lim\limits_{t\to\infty} r(t) = 0$.

e) **Puntos críticos**:

Puntos de tangente horizontal: Se resuelve la ecuación $\dfrac{dy}{dt} = 0$ siendo

$y = r\operatorname{sen} t = \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t}$ por lo que

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{2t\operatorname{sen} t\cos t - \operatorname{sen}^2 t}{t^2} = 0 \\ &\rightarrow \operatorname{sen} t(2t\cos t - \operatorname{sen} t) = 0 \\ &\rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} t = 0 \rightarrow t = k\pi \\ \operatorname{tg} t = 2 \rightarrow t = 63^0 26' + k\pi \end{cases} \end{aligned}$$

Por tanto, el eje orizontal es tangente inferior de la curva y hay tangentes superiores en todos los puntos de argumento $t = 63^0 26' + k\pi$.

Puntos de tangente vertical: Ahora es $\dfrac{dx}{dt} = 0$ siendo

$x = r\cos t = \frac{\operatorname{sen} t\cos t}{t} = \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}(2t)}{t} \rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\frac{2t\cos(2t) - \operatorname{sen}(2t)}{t^2} = 0$ de donde se deduce que $\operatorname{tg}(2t) = 2t \rightarrow t = 0$, por lo que hay una tangente vertical en el punto $(0,1)$ y en todos los puntos dee argumento $t = \frac{63^0 26'}{2} + k\pi$.

f) **Punto múltiple**: $\operatorname{sen} t = 0 \rightarrow t = k\pi$ con $k \in \mathcal{N} - \{0\}$

La gráfica correspondiente a esta función es

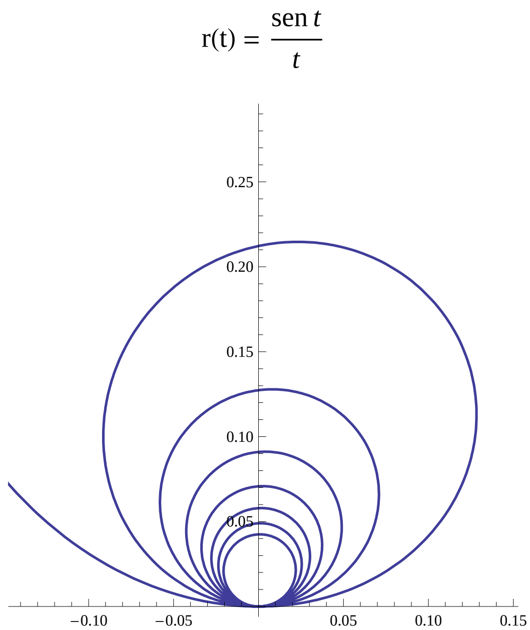


Figura 7.20: Cocloide

7.5. REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES. EJERCICIOS PROPUESTOS

7.5.1. Enunciados

1. Representar las siguientes funciones **explícitas**:

   a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 + 5x - 3}$

   b) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$

   c) $y(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$

   d) $y = \sqrt[3]{x^2 - 3x - 4}$

   e) $f(x) = e^{-x^2} x$

   f) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x} - 1\right)$

   g) $f(x) = \ln \dfrac{x+1}{2x-1}$

2. Representar las siguientes funciones **paramétricas**:

   a) $x(t) = \dfrac{t^2 - t + 1}{t+1}, \qquad y(t) = \dfrac{2t-1}{t+1}$

   b) $x(t) = \dfrac{t-1}{t}, \qquad y(t) = \dfrac{t+2}{t-1}$

   c) $x(t) = \dfrac{t+1}{t}, \qquad y(t) = t^2 - 2t - 2$

   d) $x(t) = \dfrac{3t^2}{t^2+1}, \qquad y(t) = \dfrac{2t^3}{t^2+1}$

3. Representar las siguientes funciones **polares**:

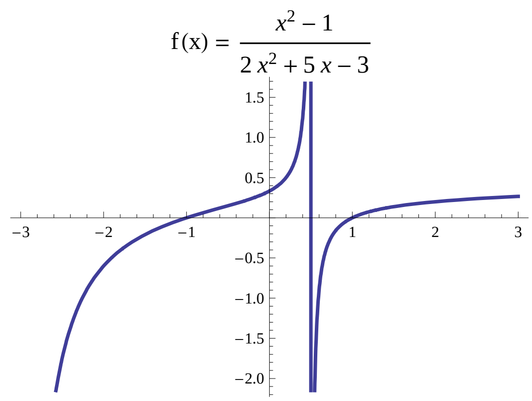
   a) $r(t) = \cos(2t)$

   b) $r(t) = \operatorname{sen} t \cdot \cos(2t)$

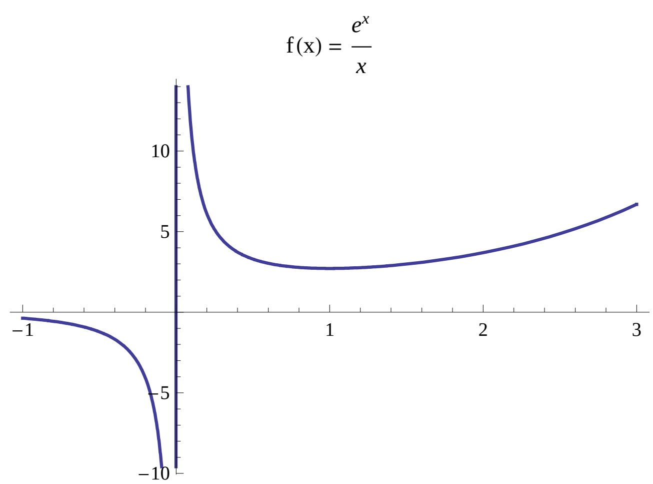
$c)$ $r(t) = \operatorname{sen} t \cdot \cos(\frac{t}{2})$

7.5.2. Representación de funciones. Soluciones

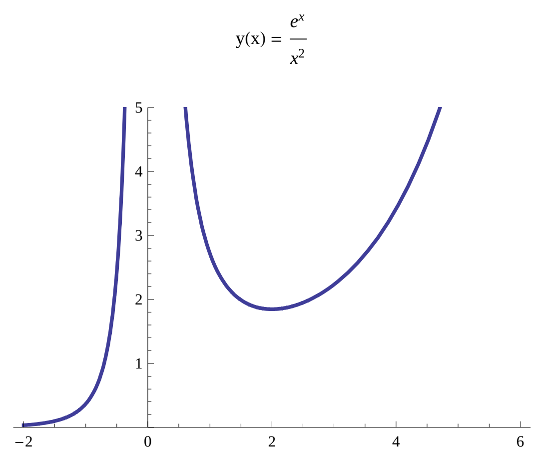
1. Funciones explícitas:



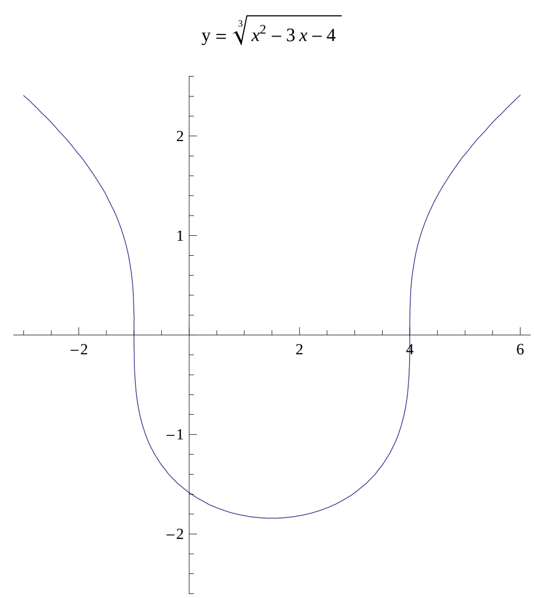
a)



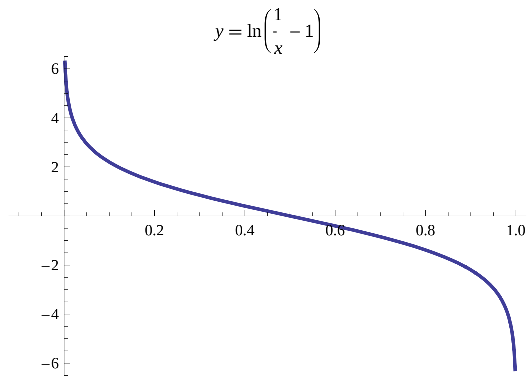
b)



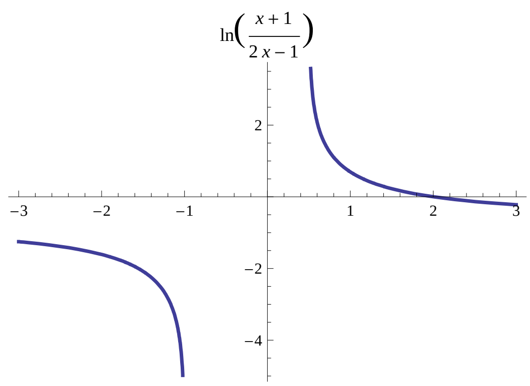
$c)$



$d)$


$y = \ln\left(\frac{1}{x} - 1\right)$
6
4
2
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
−2
−4
−6

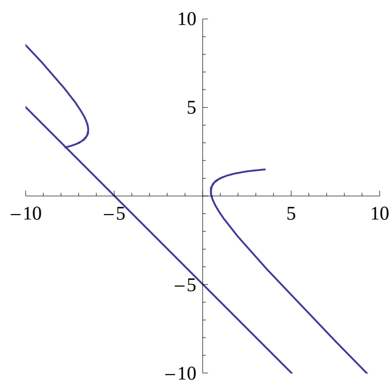
e)


$\ln\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)$
2
−3
−2
−1
1
2
3
−2
−4

f)

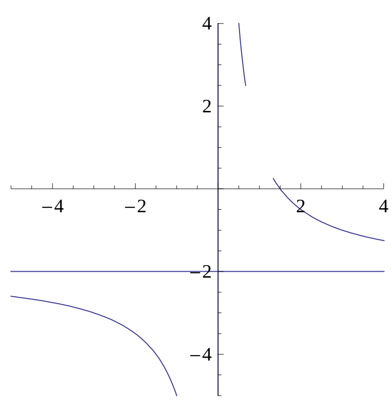
2. Funciones paramétricas:

$$x(t) = \frac{t^2 - t + 1}{t + 1}, \quad y(t) = \frac{2t - 1}{t + 1}$$



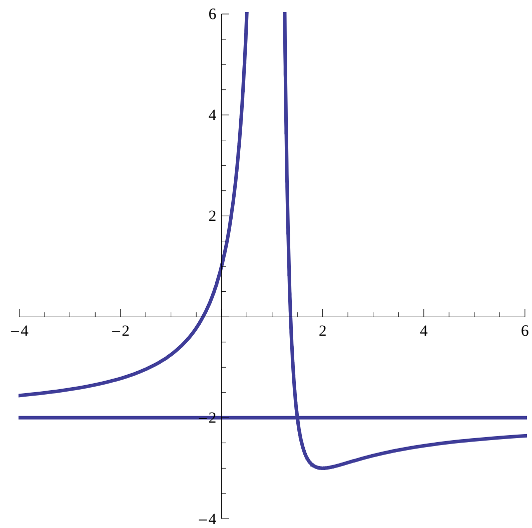
a)

$$x(t) = \frac{t - 1}{t}, \quad y(t) = \frac{t + 2}{t - 1}$$



b)

$x(t) = \frac{t+1}{t}, \; y(t) = t^2-2t-2$



$c)$

$d)$

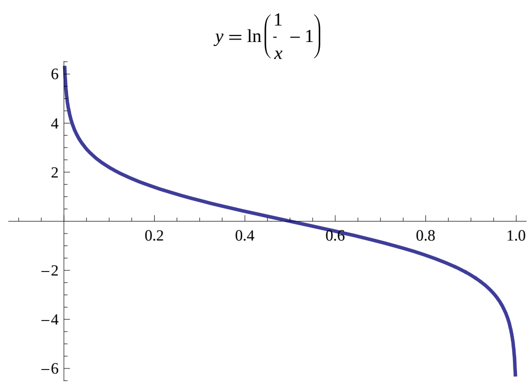
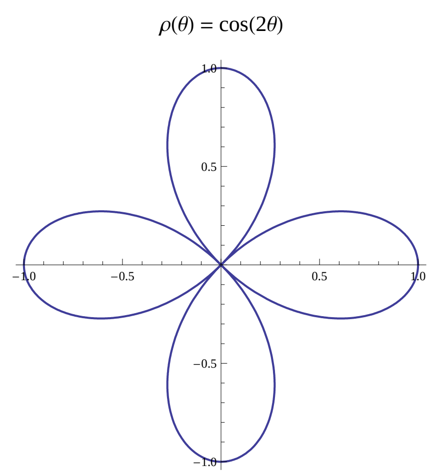


Figura 7.21: Cisoide de Diocles

3. Funciones polares:

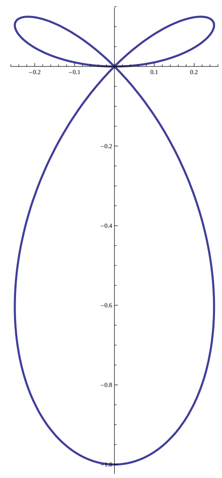


$a)$

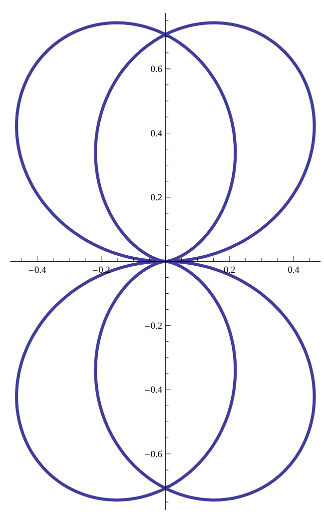
$b)$

$c)$

$\rho(\theta) = \operatorname{sen}\theta \cos(2\theta)$



$\rho(\theta) = \text{sen}\theta \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$



Capítulo 8

INTRODUCCIÓN AL ESTUDIO DE CÓNICAS Y CUÁDRICAS

En este capítulo estudiaremos las formas cuadráticas como una aplicación práctica de los resultados obtenidos en los capítulos anteriores y acabaremos el tema con un somero estudio de las cónicas y cuádricas no degeneradas que puedan dar una idea de la forma y propiedades de estas figuras tanto desde el punto de vista geométrico como desde el algebraico.

8.1. FORMAS CUADRÁTICAS

Tanto las ecuaciones de las cónicas como las de las cuádricas proceden de las formas cuadráticas que estudiamos en esta sección.

8.1.1. Aplicación lineal

Una aplicación entre espacios vectoriales $f : V_n \to V'_m$ es lineal si $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V_n, \forall a, b \in \mathcal{R} : f(a\vec{u} + b\vec{v}) = af(\vec{u}) + bf(\vec{v})$

Si el segundo espacio (V'_m) es el cuerpo de los números reales $\mathcal{R}$, se le llama *forma lineal* (La imagen de un vector es un número real).

8.1.2. Forma cuadrática.

Se llama forma cuadrática a toda aplicación bilineal
$Q : \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^n \to \mathcal{R} : Q(\vec{u}) = X^T\, A\, X$, siendo A una matriz simétrica llamada *matriz asociada a la forma cuadrática* Q mientras que X es la matriz de las componentes del vector $\vec{u}$ colocadas en vertical.

Dependiendo de la dimensión del espacio vectorial $\mathcal{R}^n$, estas matrices tendrán la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

En una forma cuadrática, la imagen de un par de vectores es un número real.

Ejemplo 8.1 *Desarrollar la forma cuadrática*

$$Q(\vec{u}) = (x_1\, x_2\, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Multiplicando las tres matrices se obtiene el polinomio de segundo grado $Q(\vec{u}) = x_1^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$

Una forma de desarrollar el producto sin tener que multiplicar las tres matrices es la siguiente: los elementos a_{ii} de la diagonal principal de la matriz

A se multiplican por sus correspondientes variables x_i^2 mientras que el resto de los elementos a_{ij} de A se multiplican por 2 y son los coeficientes de los respectivos productos $x_i x_j$

Ejemplo 8.2 *Desarrollar* $Q(\vec{u}) = (x_1\, x_2\, x_3\, x_4)\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

Según lo indicado es $Q(\vec{u}) = 1x_1^2 + 0x_2^2 + 4x_3^2 + 5x_4^2 + 2 \cdot 2x_1x_2 + 2(-3)x_1x_3 + 2 \cdot 2x_1x_4 + 2(-1)x_2x_3 + 2 \cdot 1x_2x_4 + 2 \cdot 0x_3x_4 \rightarrow$
$Q(\vec{u}) = x_1^2 + 4x_3^2 + 5x_4^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4$

Sugerencia: tomar sólo los elementos de la diagonal principal y los que se encuentran a su derecha.

Una ligera atención a los ejemplos anteriores nos indica que una fórmula polinómica en varias variables define una forma cuadrática si todos sus términos son de segundo grado ($Q(\vec{u})$ es una función homogénea de segundo grado).

Por ejemplo, es una forma cuadrática en $\mathcal{R}^3$ la expresión $x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_1x_2 - 5x_2x_3$ puesto que todos sus términos son de segundo grado y no lo es $x_2^2 + 4x_3^2 - 3x_1x_2 + 6x_2x_3 + x_3$ ya que el último término es un monomio de primer grado.

Ejemplo 8.3 *Hallar la matriz simétrica asociada a la forma cuadrática de* $\mathcal{R}^3$ $Q(\vec{u}) = x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3$

La matriz simétrica asociada a esta forma cuadrática tiene la forma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 8.4 *Hallar la matriz simétrica asociada a la forma cuadrática de* $\mathcal{R}^4$, $Q(\vec{u}) = 2x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 - 4x_4^2 + 4x_1x_2 - 3x_1x_3 + x_2x_3 - 4x_2x_4$

Su matriz simétrica asociada es $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 2 & -2 & \frac{1}{2} & -2 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

Uno de los objetivos de este capítulo es transformar una forma cuadrática cualquiera en una forma cuadrática de expresión más sencilla que sea equivalente a la inicial.

Se llama *forma canónica o forma reducida* de una forma cuadrática a la expresión más simple de la misma. Existen diversos métodos para hallar la forma canónica de una forma cuadrática. Uno de estos métodos consiste en hallar la matriz diagonal semejante a la matriz asociada a la forma cuadrática y expresar a partir de ella una nueva forma cuadrática que sólo dispondrá de términos cuadráticos aunque, evidentemente, en un sistema de nuevas coordenadas.

Ejemplo 8.5 *Expresar en forma canónica la forma cuadrática*
$Q(\vec{u}) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 6x_2x_3$

La matriz simétrica asociada a esta forma cuadrática es $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$
Su ecuación característica es $P(\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 + 12\lambda - 36 = 0$ y sus valores propios son $\lambda = 6,\ \lambda = 2,\ \lambda = -3$, ninguno de los cuales es nulo por lo que la forma cuadrática anterior toma la forma canónica $Q(\vec{u}) = 6y_1^2 + 2y_2^2 - 3y_3^2$

Ejemplo 8.6 *Expresar en forma canónica la forma cuadrática*
$Q(\vec{u}) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$

La matriz simétrica asociada a esta forma cuadrática es $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

cuya ecuación característica es

$P(\lambda) = -3\lambda^3 + 12\lambda^2 - 39\lambda + 28 = 0 \rightarrow \lambda = 7,\ \lambda = 4,\ \lambda = 1$, por lo que la forma cuadrática anterior toma la forma canónica $Q(\vec{u}) = 7y_1^2 + 4y_2^2 + y_3^2$

8.2. ESTUDIO DE LAS CÓNICAS

Las cónicas son curvas perfectamente definidas de forma que tienen alguna particularidad que las determinan y que las distinguen de cualquier otra curva. En este estudio, además de indicar la ecuación de la cónica se indica alguna otra fórmula como puede ser la longitud o el área, cuando esto sea posible.

8.2.1. Transformación de una forma cuadrática en la ecuación de una cónica

Sea la forma cuadrática
$Q(\vec{u}) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}\,x_1x_2 + 2a_{13}\,x_1x_3 + 2a_{23}\,x_2x_3$
Hagamos nula esta expresión:
$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}\,x_1x_2 + 2a_{13}\,x_1x_3 + 2a_{23}\,x_2x_3 = 0.$
Si dividimos esta ecuación por x_3^2 y hacemos $\dfrac{x_1}{x_3} = x, \quad \dfrac{x_2}{x_3} = y$, resulta la ecuación general de una cónica:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} + 2a_{12}\,xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y = 0$$

Luego, la ecuación matricial de una cónica es

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Hay que notar que la matriz de los coeficientes es simétrica.

8.2.2. Generación de cónicas

Una recta que gira alrededor de otra a la que corta, genera una superficie que es un cono doble. La recta que gira se llama *generatriz* y la recta fija es el *eje* del cono, que es un eje de simetría. El punto intersección de las dos rectas es el *vértice* del cono.

La intersección de un cono y un plano es una cónica. Según la posición del plano, la cónica puede ser:

1. *Degenerada*:

   a) Si el plano contiene al eje del cono, la intersección son dos rectas secantes.

   b) Si el plano es tangente al cono, la intersección son dos rectas coincidentes.

   c) Si el plano sólo pasa por el vértice del cono, la intersección es este punto.

2. *No degenerada*, si el plano no es ninguno de los anteriores. En este caso:

   a) Si el plano corta a todas las generatrices y oblicuamente al eje, la intersección es una elipsepero si lo hace perpendicularmente, la intersección es una circunferencia.

   b) Si el plano es paralelo al eje, la intersección es una hipérbola.

   c) Si el plano es paralelo a la generatriz, la intersección es una parábola.

Por lo tanto, una circunferencia es un caso especial de elipse por lo que tiene «por lo menos» las mismas propiedades que ésta.

<u>Entretenimiento</u>: enfoca una linterna contra una pared. El rayo de luz tiene forma de cono y la pared juega el papel del plano. En lugar de mover el plano, moveremos el cono, de forma que si la linterna está enfocada perpendicularmente a la pared, la luz forma un círculo (su exterior es la circunferencia); si la linterna está ligeramente inclinada, la luz forma una elipse

en la pared; si seguimos inclinando la linterna hasta desparecer la parte superior del haz de luz, la figura que se forma es una parábola; finalmente, si apoyamos la linterna en la pared se genera la mitad de una hipérbola.

En esta sección estudiaremos las cónicas no degeneradas.

Lugar geométrico

Se llama lugar geométrico al conjunto de puntos del plano o del espacio tridimensional que tienen alguna propiedad común.

Por ejemplo, el lugar geométrico del plano cuyos puntos equidistan de una recta fija son dos rectas paralelas a ella mientras que en el espacio dicho lugar geométrico es un cilindro circular.

El concepto de lugar geométrico es interesante para definir de forma sencilla las cónicas.

1. *Circunferencia*

   Una circunferencia es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo.

   El punto fijo se llama *centro* de la circunferencia y la distancia entre cada punto de la circunferencia y el centro es el *radio*.

   Una circunferencia tiene infinitos ejes de simetría que son todos sus diámetros. Los diámetros se cortan en un punto (el centro de la circunferencia) que es centro de simetría de la circunferencia.

   La circunferencia es una curva cerrada cuya longitud es $L = 2\pi r$ y encierra un área $A = \pi r^2$ (la región interior a la circunferencia se llama *círculo*)

   Sea la circunferencia de centro $\mathrm{C}(x_0, y_0)$ y radio r:

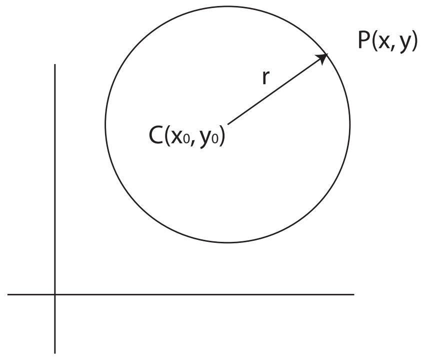


Figura 8.1: Circunferencia

Según la definición de circunferencia ha de ser
$|\overrightarrow{CX}| = r \rightarrow |(x - x_0, y - y_0)| = r \rightarrow \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r$ por lo que la ecuación de la circunferencia de centro $C(x_0, y_0)$ y radio r es $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

El desarrollo de esta ecuación nos lleva a la conclusión de que toda ecuación de la forma $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ representa una circunferencia.

Si el centro de la circunferencia es el origen de coordenadas
$(a = 0, b = 0)$, resulta la ecuación canónica o ecuación reducida de la circunferencia

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Ejemplo 8.7 *Hallar el centro y el radio de la circunferencia*
$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 5 = 0$

Esta ecuación también puede escribirse en la forma
$[(x-2)^2-4]+[(y+3)^2-9]-5 = 0$ de donde resulta $(x-2)^2+(y+3)^2 = 18$ lo que indica que el centro de esta circunferencia es el punto $(2, -3)$ y la longitud del radio es $r = \sqrt{18}$.

2. *Elipse*

Se define la elipse como el lugar geométrico de los puntos del plano cuyas sumas de distancias a dos puntos fijos es constante.

Los puntos fijos se llaman *focos* de la elipse. Una elipse tiene dos ejes de simetría que son perpendiculares entre sí por lo que se cortan en un punto que es centro de simetría de la elipse. Las intersecciones de la elipse con sus ejes de simetría se llaman *vértices*.

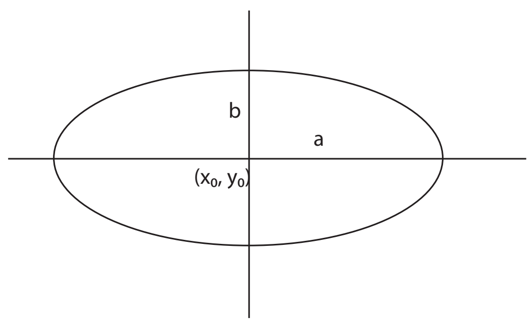


Figura 8.2: Elipse

La ecuación de la elipse cuyos ejes de simetría son paralelos a los ejes de coordenadas y su centro el punto (x_0, y_0) es

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

siendo $2a$ la longitud del eje horizontal y $2b$ la longitud del eje vertical.

Si los ejes de simetría de la elipse son los ejes de coordenadas (y entonces el centro de simetría de la elipse es el origen de coordenadas), su ecuación reducida es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

cuya forma matricial es $\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & & \\ & \frac{1}{b^2} & \\ & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

La elipse es una curva cerrada y encierra un área $A = \pi ab$ pero no existe fórmula para hallar su longitud.

Si en una elipse es $b = a$, la elipse se transforma en una circunferencia de radio a.

Ejemplo 8.8 *Hallar el centro y la longitud de los ejes de la elipse de ecuación* $4x^2 + 9y^2 + 16x - 18y - 24 = 0$

Esta ecuación también puede escribirse en la forma
$4(x^2 + 4x) + 9(y^2 - 2y) - 24 = 0$. Y repitiendo el proceso seguido con la circunferencia, resulta $4[(x+2)^2 - 4] + 9[(y-1)^2 - 1] - 24 = 0$, de donde $4(x+2)^2 + 9(y-1)^2 - 49 = 0$.
Finalmente, dividiendo por 49, es $\dfrac{(x+2)^2}{49/4} + \dfrac{(y-1)^2}{49/9} = 1$ lo que indica que el centro de la elipse es el punto $(-2, 1)$, la longitud del eje horizontal es $2a = 2\sqrt{\dfrac{49}{4}} = 7$ y la longitud del eje vertical $2b = 2\sqrt{\dfrac{49}{9}} = \dfrac{14}{3}$

3. *Hipérbola*

   Se define la hipérbola como el lugar geométrico de los puntos del plano cuyas diferencias de distancias a dos puntos fijos es constante.

   Los puntos fijos se llaman *focos* de la hipérbola. Una hipérbola tiene dos ejes de simetría que son perpendiculares entre sí por lo que se cortan en un punto que es centro de simetría de la hipérbola. Las intersecciones de la hipérbola con sus ejes de simetría se llaman *vértices*.

   La ecuación de la hipérbola cuyos ejes de simetría son paralelos a los

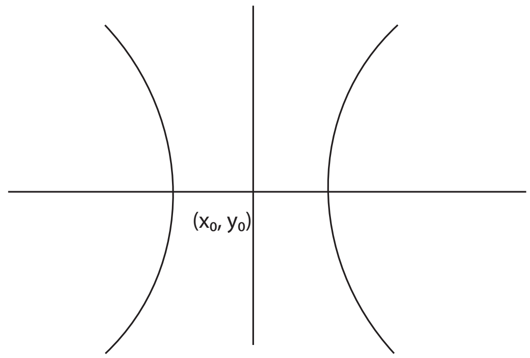


Figura 8.3: Hipérbola

ejes de coordenadas y su centro es el punto (x_0, y_0) es

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

Si los ejes de simetría de la hipérbola son los ejes de coordenadas, entonces el origen de coordenadas es su centro de simetría y su ecuación se reduce a

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

cuya forma matricial es $(x \quad y \quad 1)\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & & \\ & -\frac{1}{b^2} & \\ & & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

La hipérbola es una curva abierta por lo que su longitud es infinita, así como el área que encierra.

4. *Parábola*

   Se define la parábola como el lugar geométrico del plano formado por los puntos cuyas distancias a una recta y un punto fijos son iguales en cada punto.

La recta fija se llama *directriz* y el punto fijo es el *foco* de la parábola. Una parábola sólo tiene un eje de simetría que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz por lo que no tiene centro de simetría. La intersección de la parábola con su eje de simetría es el *vértice*.

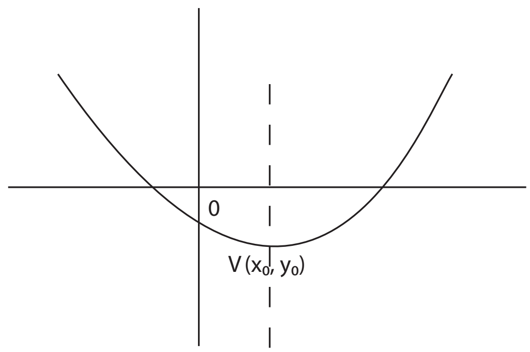


Figura 8.4: Parábola

La ecuación de la parábola cuyo eje de simetría es vertical y su vértice el punto (x_0, y_0) es

$$y - y_0 = a(x - x_0)^2$$

siendo la parábola cóncava o abierta hacia abajo si $a < 0$ y convexa o abierta hacia arriba si $a > 0$

La parábola es una curva abierta por lo que su longitud y el área que encierra son infinitas. En caso de que el vértice de la parábola sea el origen de coordenadas $(0, 0)$ y su eje de simetría el eje de ordenadas, la ecuación reducida de la parábola toma la forma

$$y = a\,x^2$$

siendo su forma matricial $\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

8.3. LAS CUÁDRICAS

En esta sección recordaremos algunos aspectos de las cuádricas de $\mathcal{R}^3$.

8.3.1. Estudio del las cuádricas

Si anulamos la forma cuadrática
$Q(\vec{u}) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 + 2a_{12}\,x_1x_2 + 2a_{13}\,x_1x_3 + 2a_{14}\,x_1x_4 + 2a_{23}\,x_2x_3 + 2a_{24}\,x_2x_4 + 2a_{34}\,x_3x_4$, dividimos por x_4^2 y hacemos
$\dfrac{x_1}{x_4} = x, \quad \dfrac{x_2}{x_4} = y, \quad \dfrac{x_3}{x_4} = z$, se obtiene la ecuación general de una cuádrica:
$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+a_{44}+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z = 0$

Por tanto, la ecuación matricial de una cuádrica es

$$(x \quad y \quad z \quad 1)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

siendo simétrica la matriz de los coeficientes.

Las cuádricas no degeneradas son el elipsoide, el hiperboloide de una y dos hojas y los paraboloides elíptico e hiperbólico. Las cuádricas degeneradas son el cilindro y el cono y un par de planos que pueden ser secantes o paralelos.

8.3.2. Clasificación de las cuádricas no degeneradas

Haremos una clasificación de las cuádricas de forma parecida a como lo hicimos para las cónicas.

Analíticamente, una cuádrica es no degenerada si el determinante de su matriz asociada es no nulo.

Las cuádricas no degeneradas son el elipsoide, el hiperboloide y el paraboloide. La esfera no es más que un caso particular de elipsoide. De hecho, la intersección de un elipsoide, un hiperboloide, un paraboloide o una esfera con un plano es una elipse, una hipérbola, una parábola o una circunferencia, respectivamente. En consecuencia, la ecuación de una de estas cuádricas es parecida a la ecuación de la cónica correspondiente añadiendo una nueva variable, z.

Las cuádricas degeneradas más interesantes son el cono y el cilindro.

Teniendo en cuenta que la ecuación de una cuádrica procede de una forma cuadrática, la ecuación general de una cuádrica puede ser reducida a una forma más simple que constituiría su forma canónica o reducida.

Las gráficas de las cuádricas así como sus ecuaciones reducidas se indican a continuación.

CUÁDRICAS NO DEGENERADAS

1. **Elipsoide**

Tiene tres planos de simetría ortogonales entre sí y, por tanto, tres ejes y un centro de simetría y su ecuación reducida es $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$. Es la única cuádrica que es cerrada por lo que encierra un volumen que está determinado por la fórmula $V=\frac{4}{3}\pi abc$.

Ecuación matricial: $(x \quad y \quad z \quad 1)\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & & & \\ & \frac{1}{b^2} & & \\ & & \frac{1}{c^2} & \\ & & & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}=0$

a) Si los tres parámetros a, b, c son distintos entre sí, el elipsoide es elíptico: la sección con cualquier plano paralelo a los planos coordenados $x=0,\ y=0,\ z=0$ es una elipse.

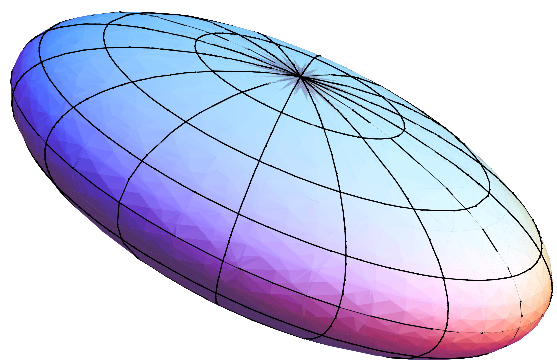
b) Si sólo dos de los parámetros son iguales, el elipsoide es circular: la sección con un plano paralelo a un plano coordenado es una circunferencia mientras que si es paralelo a los otros dos es una elipse: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$. En este caso se dice que es un *elipsoide de revolución*.

c) Si los tres parámetros son iguales, el elipsoide se transforma en una esfera y la sección con cualquier plano es una circunferencia:$x^2+y^2+z^2=r^2$: todo plano que pase por el centro es de simetría.

El volumen encerrado por un elipsoide es $V=\frac{4}{3}\pi\, abc$

Ejemplo 8.9 *Hallar el volumen del elipsoide* $4x^2+y^2+2z^2+16x-6y-8z-16=0$

ELIPSOIDE



Esta ecuación también puede escribirse como

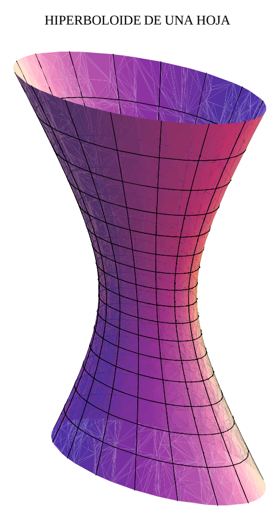
$$
\begin{aligned}
& 4(x^2+4x)+(y^2-6y)+2(z^2-4z)-16=0 \\
\rightarrow\quad & 4[(x+2)^2-4]+[(y-3)^2-9]+2[(z-2)^2-4]-16=0 \\
\rightarrow\quad & 4(x+2)^2+(y-3)^2+2(z-2)^2-16-9-8-16=0 \\
\rightarrow\quad & 4(x+2)^2+(y-3)^2+2(z-2)^2=49 \\
& \frac{(x+2)^2}{49/4}+\frac{(y-3)^2}{49}+\frac{(z-2)^2}{49/2}=1
\end{aligned}
$$

Las longitudes de los semiejes son $a=\sqrt{\frac{49}{4}}=\frac{7}{2}$, $b=\sqrt{49}=7$, $c=\sqrt{\frac{49}{2}}=\frac{7}{\sqrt{2}}$ por lo que el volumen del elipsoide es $V=\dfrac{4}{3}\pi\dfrac{7}{2}7\dfrac{7}{\sqrt{2}}=\dfrac{686\pi\sqrt{2}}{3}$

2. **Hiperboloide**: también posee tres planos de simetría ortogonales entre sí y, por tanto, tres ejes y un centro. A su vez, un hiperboloide puede ser de dos tipos:

   a) **Hiperboloide de una hoja**: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$: su sección con los planos $x=0,\ y=0$ es una hipérbola mientras que si se corta con el plano $z=0$ se obtiene una elipse.

   Ecuación matricial: $(x \quad y \quad z \quad 1)\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & & & \\ & \frac{1}{b^2} & & \\ & & -\frac{1}{c^2} & \\ & & & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}=0$

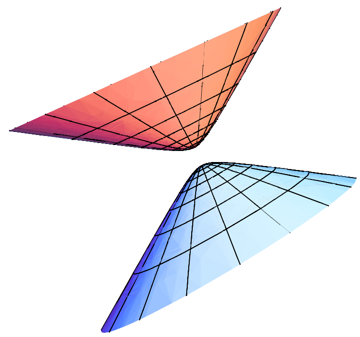
   Si $a=b$, el hiperboloide es de revolución y se genera mediante el giro de una hipérbola alrededor del eje al que no corta.

   b) **Hperboloide de dos hojas**: Ecuación reducida: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$

   Ecuación matricial: $(x \quad y \quad z \quad 1)\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & & & \\ & -\frac{1}{b^2} & & \\ & & -\frac{1}{c^2} & \\ & & & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}=0$

No corta al plano $x = 0$, pero su intersección con los planos $y = 0$, $z = 0$ es una hipérbola.

HIPERBOLOIDE DE DOS HOJAS



Si $a = b$, el hiperboloide es de revolución y se genera mediante el giro de una hipérbola alrededor del eje al que corta. Por esta razón, este hiperboloide está formado por dos partes disjuntas.

Nota: La ecuación reducida del hiperboloide de una hoja sólo posee un signo menos, mientras que la del hiperboloide de dos hojas tiene dos signos menos.

Ejemplo 8.10 *Hallar el centro y las longitudes de los semiejes del hiperboloide* $2x^2 + y^2 - 3z^2 + 4x - 6y + 24z + 5 = 0$

La ecuación reducida de este hiperboloide es

$$\begin{aligned}
& 2(x^2 + 2x) + (y^2 - 6y) - 3(z^2 - 8z) + 5 = 0 \\
\rightarrow \quad & 2[(x+2)^2 - 4] + [(y-3)^2 - 9] - 3[(z-4)^2 - 16] + 5 = 0 \\
\rightarrow \quad & 2(x+2)^2 + (y-3)^2 - 3(z-4)^2 = -36 \\
\rightarrow \quad & \frac{(x+2)^2}{18} + \frac{(y-3)^2}{36} - \frac{(z-4)^2}{12} = -1
\end{aligned}$$

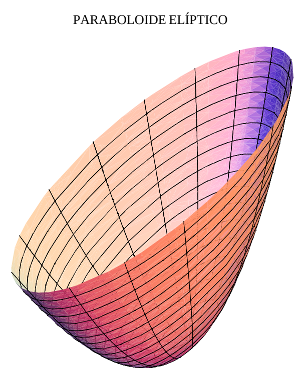
Como hay dos signos menos, se trata de un hiperboloide de dos hojas de centro C(-2, 3, 4) y longitudes de los semiejes $a = \sqrt{18}$, $b = 6$, $c = \sqrt{12}$

3. **Paraboloide**

Sólo posee dos planos de simetría que se cortan en el eje del paraboloide por lo que no posee centro de simetría. Un paraboloide puede ser:

a) *Paraboloide elíptico*:

Ecuación reducida: $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$: la sección con el plano $z = k \neq 0$ es una elipse, mientras que si se corta con planos paralelos al $y = 0$ o al $x = 0$, se obtiene una parábola. En la figura, el origen es su vértice.

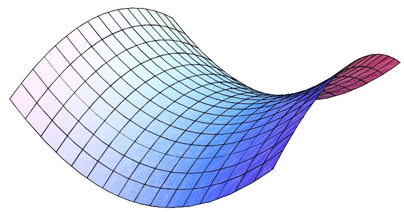


Ecuación matricial: $$(x \quad y \quad z \quad 1)\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & & & \\ & \frac{1}{b^2} & & \\ & & 0 & -\frac{1}{2} \\ & & -\frac{1}{2} & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

b) *Paraboloide hiperbólico*:

Ecuación reducida: $z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$: la sección con el plano $z = k \neq 0$ es una hipérbola, y si se corta con planos paralelos al $y = 0$ o al $x = 0$, se obtiene una parábola. En la figura, el origen es un punto de silla.

PARABOLOIDE HIPERBÓLICO

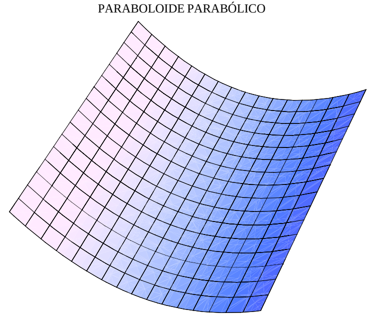


$$\text{Ecuación matricial: } (x \quad y \quad z \quad 1)\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & & & \\ & -\frac{1}{b^2} & & \\ & & 0 & -\frac{1}{2} \\ & & -\frac{1}{2} & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$c)$ *Paraboloide parabólico*:

Ecuación reducida: $z = ax^2 + by$: la sección con los planos $y = k \vee z = k'$ es una parábola.

PARABOLOIDE PARABÓLICO



CUÁDRICAS DEGENERADAS

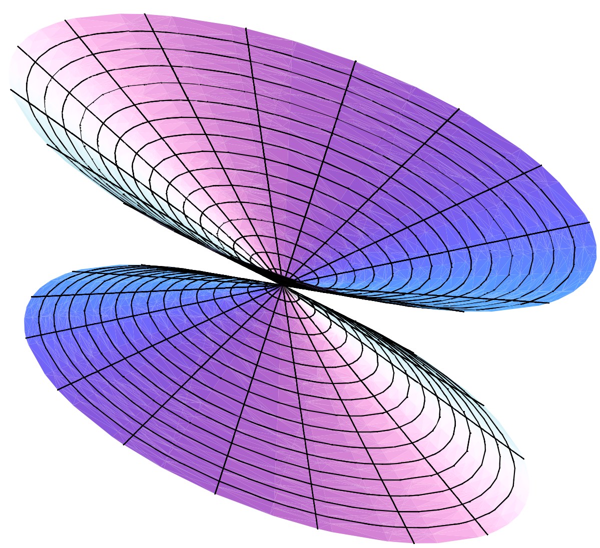
1. **CONO**

2. **Cono elíptico:**

   Ecuación reducida: $z^2 = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$

   Ecuación matricial: $(x \quad y \quad z \quad 1)\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & & & \\ & \frac{1}{b^2} & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

CONO ELÍPTICO

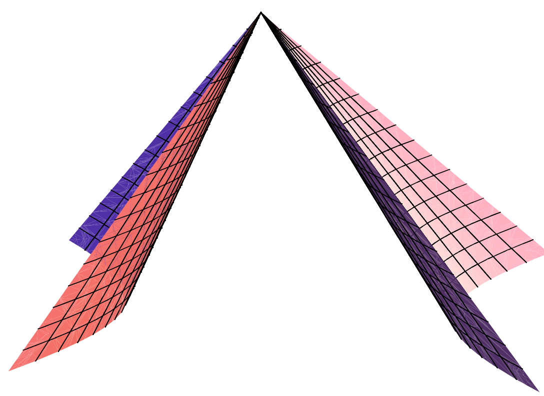


3. **Cono hiperbólico:**

Ecuación reducida: $z^2 = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$

Ecuación matricial: $(x \quad y \quad z \quad 1)\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & & & \\ & -\frac{1}{b^2} & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

CONO HIPERBÓLICO



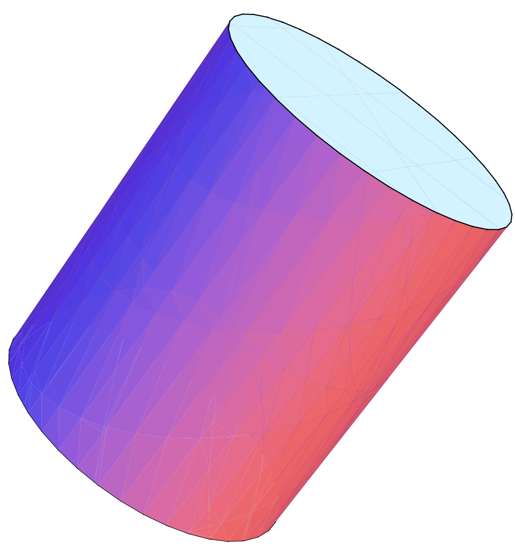
1. **CILINDRO**

   a) **Cilindro elíptico:**

      Ecuación reducida: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\ z=z$

      Ecuación matricial: $(x \quad y \quad z \quad 1)\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & & & \\ & \frac{1}{b^2} & & \\ & & 0 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}=0$

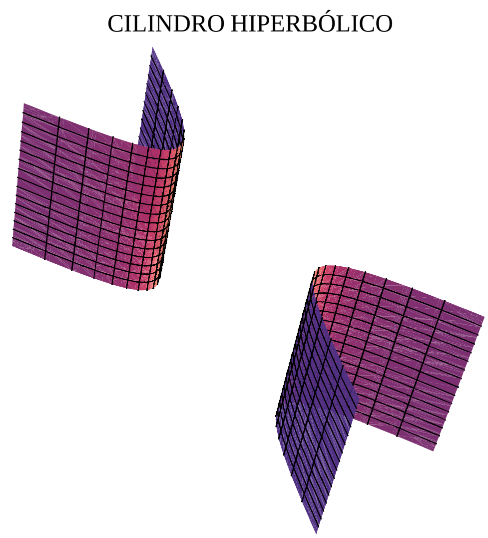
CILINDRO ELÍPTICO



b) **Cilindro hiperbólico**

Ecuación reducida: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \; z = z$

Ecuación matricial: $$(x \quad y \quad z \quad 1)\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & & & \\ & -\frac{1}{b^2} & & \\ & & 0 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

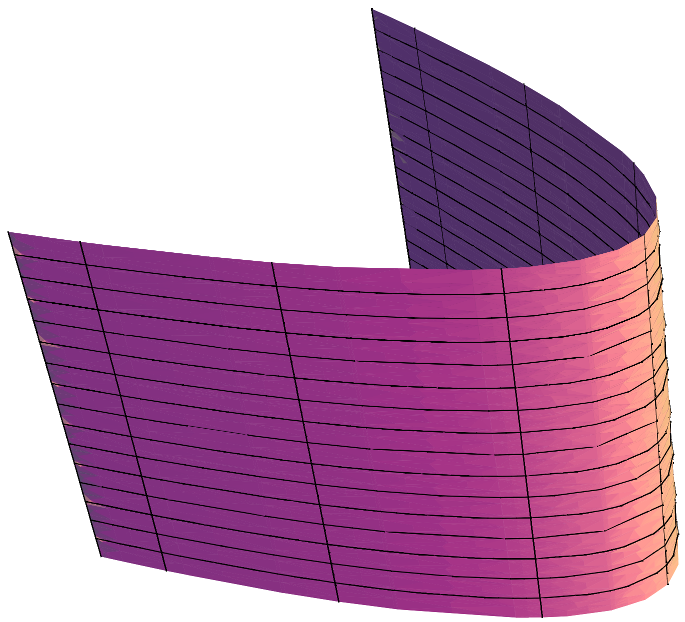


c) **Cilindro parabólico**

Ecuación reducida: $y = ax^2 + r,\ z = z$

Ecuación matricial: $(x \quad y \quad z \quad 1)\begin{pmatrix} a & & & \\ & & & -\frac{1}{2} \\ & & 0 & \\ & -\frac{1}{2} & & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

CILINDRO PARABÓLICO



Tanto el cilindro elíptico como el hiperbólico poseen dos planos de simetría mientras que el parabólico sólo tiene uno. Su intersección con un plano paralelo al $z = 0$ es una elipse, una hipérbola o una parábola, respectivamente. Si en el cilindro elíptico es $b = a$, entonces el cilindro es circular.

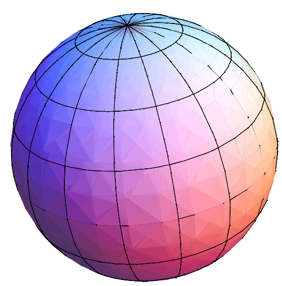
8.3.3. La esfera

La ecuación de la esfera de centro el punto (x_0, y_0, z_0) y radio r es $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$.

El área de la superficie esférica es $A = 4\pi r^2$ y el volumen de la esfera, $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

La intersección de una esfera con un plano es una circunferencia situada en el espacio por lo que la ecuación de la circunferencia está determinada por las ecuaciones de la esfera y del plano conjuntamente sin que pueda eliminarse ninguna de ellas. Por ejemplo, la intersección de la esfera $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 9$ con el plano $2x + y - z + 1 = 0$ es una circunferencia situada en el espacio por lo que su ecuación es el conjunto de ambas:
$$\left\{ \begin{array}{l} (x-3)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 9 \\ 2x + y - z + 1 = 0 \end{array} \right\}$$

ESFERA



La proyección sobre el plano XOY de la intersección de una esfera con un plano α es

- una circunferencia, si α es paralelo a XOY
- un segmento de recta, si α es perpendicular a XOY

- una elipse, en otro caso.

Ejemplo 8.11 *Hallar el área y el volumen de la esfera* $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 10 = 0$

La ecuación de la esfera es $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = r^2$ que, desarrollada, es $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+(a^2+b^2+c^2-r^2) = 0$. Igualando esta ecuación con la propuesta se obtiene $a = 1,\ b = -2,\ c = 3$, $1+4+9-r^2 = 10 \rightarrow r^2 = 4$. Por lo tanto, el radio de la esfera es $r = 2$ por lo que su área es $A = 4\pi r^2 = 16\pi$ y encierra un volumen $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{32}{3}\pi$

Ejemplo 8.12 *Hallar el área de la esfera* $x^2+y^2+z^2-4x+6y-10z+2 = 0$

Esta ecuación también puede escribirse como
$(x-2)^2-4+(y+3)^2-9+(z-5)^2-25+2 = 0 \rightarrow (x-2)^2+(y+3)^2+(z-5)^2 = 36$
lo que indica que el radio de la esfera es $r = \sqrt{36} = 6$ por lo que su área es $A = \pi r^2 = 36\pi$

EXÁMENES RESUELTOS DE LA PRIMERA PARTE

Enunciados 1

1. Estudiar si los vectores $(3, 1, 2)$, $(2, 1, -1)$, $(0, -1, 7)$ forman una base de $\mathcal{R}^3$

2. Hallar la ecuación cartesiana del espacio vectorial generado por los vectores $\{(1, 2, -1), \ (3, 1, 2)\}$

3. Estudiar el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & k \end{pmatrix}$ para los distintos valores de $k \in \mathcal{R}$

4. Discutir, para los distintos valores de m, la resolución del sistema $2x + y - z = -1, x + 4y + 2z = -2, \ 4x - 5y + mz = 1$

5. Estudiar la diagonalización de la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$

6. Diagonalizar la matriz $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y hallar una matriz de paso.

7. Representar la curva $x = \dfrac{t+1}{t},\ y = \dfrac{t^2+1}{t}$

Respuestas 1

1. *Estudiar si los vectores* $(3,1,2),\ (2,1,-1),\ (0,-1,7)$ *forman una base de* $\mathcal{R}^3$

   Estos vectores forman base si son linealmente independientes y en tal caso, el rango de la matriz de sus componentes ha de coincidir con el número de vectores (3). Reducimos la matriz:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 7 \end{pmatrix} \equiv \begin{matrix} F_1 \\ F_2 - 3F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 9 \end{pmatrix} \equiv \begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 3F_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   Y como el rango de la matriz coincide con el número de filas no nulas, entonces $rango = 2 < 3$ por lo que los vectores no forman base.

2. *Hallar la ecuación cartesiana del espacio vectorial generado por los vectores* $\{(1,2,-1),\ (3,1,2)\}$

   Si $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ es un vector de este espacio, entonces ha de ser combinación lineal de los vectores generadores por lo que
$$\begin{aligned} (x_1,x_2,x_3) &= a(1,2,-1) + b(3,1,2) = (a+3b, 2a+b, -a+2b) \\ &\to a+3b = x_1,\ 2a+b = x_2,\ -a+2b = x_3 \\ E_1+E_3: &\to 5b = x-1+x_3 \to b = \frac{x_1+x_3}{5} \to \\ & a = x_1 - 3b \to a = \frac{2x_1-3x_3}{5} \\ E_2: &\to \frac{4x_1-6x_3}{5} + \frac{x_1+x_3}{5} = x_2 \to x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{aligned}$$

3. *Estudiar el rango de la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & k \end{pmatrix}$ *para los distintos valores de* $k \in \mathcal{R}$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \to rango(A) \geq 2$

Por otra parte, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & k \end{vmatrix} = k + 4$. Por lo tanto, si $k = -4$, es $rango(A) = 2$ y si $k \neq -4$ es $rango(A) = 3$

4. *Discutir, para los distintos valores de m, la resolución del sistema*

   $2x + y - z = -1, x + 4y + 2z = -2,\ 4x - 5y + mz = 1$

   La matriz del sistema es $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & -2 \\ 4 & -5 & m & 1 \end{pmatrix}$

   Como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \to rango(A) \geq 2.$

   El determinante de la matriz general es $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 4 & -5 & m \end{vmatrix} = 7m + 49$: si $m \neq -7 \to rango(A) = 3 = rango(A^{+}) =$ número de incógnitas por lo que es un Sistema Compatible Determinado.

   Si $m = -7 \to rango(A) = 2$. Pero $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 4 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0$ por lo que $rango(A^{+}) = 2 = rango(A) <$ número de incógnitas por lo que es un Sistema Compatible Indeterminado

5. *Estudiar la diagonalización de la matriz* $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$

   Autovalores:

   $|B - \lambda I| = 0 \to -\lambda^3 + 12\lambda + 16 = 0 \to \lambda = 4, \lambda = -2\ (\alpha = 2)$

   Autovectores: se resuelve el sistema $(B - \lambda I)\vec{u} = \vec{0}$:

a) Para $\lambda = 4$ es $(B-4I)\vec{u} = \vec{0} \rightarrow$
$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -3x - 3y + 3z = 0 \\ 6x - 6y = 0 \end{array} \right\}$$
cuya solución es $(x, x, 2x)$ de donde se obtiene un primer autovector $(1, 1, 2)$

b) Para $\lambda = -2$ es $(B+2I)\vec{u} = \vec{0} \rightarrow$
$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow 3x - 3y + 3z = 0$$ de donde $z = -x + y$ por lo que otros dos autovectores son $(1, 0, -1)$ $(0, 1, 1)$

Luego $B = P \cdot D \cdot P^{-1}$ siendo $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 4 & & \\ & -2 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$

6. *Diagonalizar la matriz* $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *y hallar una matriz de paso.*

Autovalores:
$|C - \lambda I| = 0 \rightarrow -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4 = 0 \rightarrow \lambda = 4, \lambda = 1$ $(\alpha = 2)$
Autovectores: se resuelve el sistema $(C - \lambda I)\vec{u} = \vec{0}$

a) Para $\lambda = 4$ es $(C-4I)\vec{u} = \vec{0} \rightarrow$
$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{array} \right\}$$
Restando ambas ecuaciones se obtiene $-3x + 3y = 0 \rightarrow y = x$ Sustituyendo en la segunda ecuación resulta $z = x$ por lo que un primer vector es el $e_1 = (1, 1, 1)$

b) Para $\lambda = 1$ es $(C - I)\vec{u} = \vec{0} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to x+y+z=0 \to z=-x-y \text{ por}$$
lo que otros dos autovectores son $e_2 = (1,0,-1)$, $e_3 = (0,1,-1)$.

Por lo tanto, $C = P \cdot D \cdot P^{-1}$ siendo $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$,

$D = \begin{pmatrix} 4 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

7. *Representar la curva* $x = \dfrac{t+1}{t}$, $y = \dfrac{t^2+1}{t}$

   a) *Dominio*:

      1) De x: $x = \frac{t+1}{t} \to xt = t+1 \to t = \frac{1}{x-1} \to D_X = \mathcal{R}$
      2) De y: $y = \frac{t^2+1}{t} \to yt = t^2+1 \to t^2 - yt + 1 = 0 \to t = \frac{y \pm \sqrt{y^2-4}}{2} \to D_Y = (-\infty, -2] \cup [+2, +\infty)$

   b) *Simetría*: $x(-t) = \frac{-t+1}{-t} \neq \pm x(t)$ por lo que la curva no es simétrica con respecto a ningún eje coordenado.

   c) *Puntos críticos*:

      1) De tangente horizontal: $\frac{dy}{dt} = \frac{t^2-1}{t^2} = 0 \to t = \pm 1$ por lo que $x = 2,\ x = 0$ y se obtienen los puntos $(2,2)$ y $(0,-2)$
      2) De tangente vertical: $\frac{dx}{dt} = \frac{-1}{t^2} \neq 0$ por lo que no hay puntos de tangente vertical.

   d) *Extremos relativos*: $y' = \frac{dy/dt}{dx/dt} = 1 - t^2 = 0 \to t = \pm 1$. Se sustituyen estos valores en y'':
   $y'' = \dfrac{dy'}{dx} = \dfrac{dy'/dt}{dx/dt} = \dfrac{-2t}{-1/t^2} = 2t^3$. Entonces, $y''(1) > 0$ por lo que

hay un mínimo en el punto $(2,2)$; $y''(-1)<0$ por lo que el punto $(0,-2)$ es un Máximo.

e) *Puntos de inflexión*: $y''=0 \to t=0 \to x=\infty,\ y=\infty$, por lo que la curva no tiene puntos de inflexión.

f) *Asíntotas*:

1) Vertical:

$$\text{Si } y \to \infty \Rightarrow \begin{cases} t=0 \Rightarrow x \to \infty\text{: no hay} \\ t \to \infty \Rightarrow x = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{t+1}{t} = 1 \Rightarrow x=1 \end{cases}$$

2) Oblicua: $y=mx+n$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2+1}{t+1} = 1$$

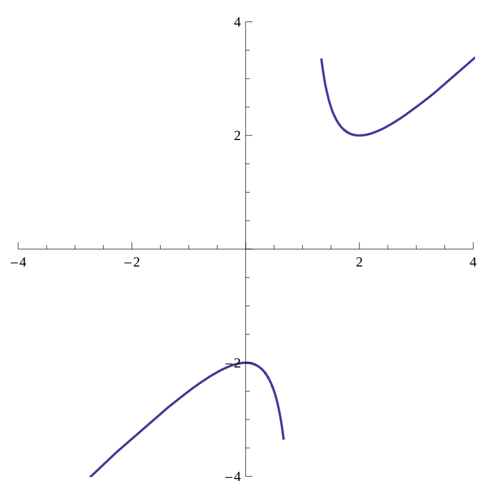
$$n = \lim_{x\to\infty} (y-mx) = \lim_{t\to 0} \left(\frac{t^2+1}{t} - \frac{t+1}{t} \right) = \lim_{t\to 0}(t-1) = -1$$

por lo que $y=x-1$ es una asíntota oblicua.

g) *Punto de corte con la asíntota oblicua*:

$y=x-1 \to \dfrac{t^2+1}{t} = \dfrac{t+1}{t} - 1 \to t=0 \to x=\infty,\ y=\infty$ por lo que la curva y la asíntota oblicua no se cortan.

Por lo tanto, la gráfica de la función indicada es



Enunciados 2

1. Hallar el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ k & 1 & 0 \\ 2 & k-1 & 1 \end{pmatrix}$ para los distintos valores de $k \in \mathcal{R}$

2. Indicar razonadamente si es posible diagonalizar la matriz $E = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

3. Estudiar (sin resolver) para $k \in \mathcal{R}$ la compatibilidad del sistema $2x - 3y + z = 2,\ k\,x - y + z = 0,\ x + k\,y - z = 1$

4. Hallar una matriz simétrica asociada a la forma bilineal $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 4xy - 6yz$

5. Hallar la dimensión del espacio vectorial generado por el conjunto de vectores $\{(1, 2, -1), (0, 1, 2), (2, 3, -4)\}$

6. Hallar el centro y la longitud del radio de la circunferencia $2x^2 + 2y^2 - 6x + 4y - 5 = 0$

7. Hallar las asíntotas de la curva $x(t) = \dfrac{t-1}{t+1},\ y(t) = \dfrac{t^2+2}{t+1}$

Respuestas 2

1. *Hallar el rango de la matriz* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ k & 1 & 0 \\ 2 & k-1 & 1 \end{pmatrix}$ *para los distintos valores de* $k \in \mathcal{R}$

   Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \to rango(C) \geq 2$

   $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ k & 1 & 0 \\ 2 & k-1 & 1 \end{vmatrix} = -k^2 + 4 = 0 \to k = \pm 2.$

   Por lo tanto, si $k \neq \pm 2 \to rango(A) = 3$ y si $k = \pm 2 \to rango(A) = 2$

2. *Indicar razonadamente si es posible diagonalizar la matriz* $E = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

   Hallemos los valores propios de esta matriz. Ecuación característica: $|F - \lambda I| = 0 \to$

   $\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & -2-\lambda & 5 \\ 0 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3) = 0 \to$

   $\lambda = 3,\ \lambda = -1\ (\alpha = 2)$

   E es diagonalizable si $rango(E - \lambda I) = orden(E) - \alpha$: para $\lambda = -1$ es $rango(E + \lambda I) = rango \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} = 2$ mientras que $orden(E) - \alpha = 3 - 2 = 1$ por lo que la matriz E no es diagonalizable.

3. *Estudiar (sin resolver) para* $k \in \mathcal{R}$ *la compatibilidad del sistema*

   $2x - 3y + z = 2,\ k\,x - y + z = 0,\ x + k\,y - z = 1$

   Resolvemos la ecuación $\Delta = 0$ siendo Δ el determinante general del

sistema:
$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & k & -1 \\ k & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -k^2 + 5k = 0 \rightarrow k = 0 \wedge k = 5.$
Discusión:

- Si $k = 5 \rightarrow rango(A) = 2$ mientras que $rango(A^+) = 3$ puesto que $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 9$ por lo que se trata de un Sistema Incompatible
- Si $k = 0 \rightarrow rango(A) = rango(A^+) = 2$ puesto que $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$ 0 por lo que se trata de un Sistema Compatible Indeterminado

4. *Hallar una matriz simétrica asociada a la forma bilineal* $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 4xy - 6yz$

   Teniendo en cuenta que $f(x, y, z) = (x\ y\ z)A(x\ y\ z)^T$, la matriz A puede ser $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

5. *Hallar la dimensión del espacio vectorial generado por el conjunto de vectores* $\{(1, 2, -1), (0, 1, 2), (2, 3, -4)\}$

   La dimensión del espacio vectorial generado por un conjunto de vectores coincide con el rango de la matriz de sus componentes:
   $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ por lo que $rango = dim \geq 2$
   $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -10 + 10 = 0$ por lo que el espacio vectorial generado

es de dimensión 2.

6. *Hallar el centro y la longitud del radio de la circunferencia* $2x^2+2y^2-6x+4y-5=0$

$$\begin{aligned}
&2x^2+2y^2-6x+4y-5=0 \to x^2+y^2-3x+2y-\frac{5}{2}=0\\
&\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+(y+1)^2-1-\frac{5}{2}=0\\
&\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y+1)^2=\frac{23}{4}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\left(\frac{3}{2},-1\right)$ es el centro de la circunferencia y $r=\frac{\sqrt{23}}{2}$ la longitud de su radio.

7. *Hallar las asíntotas de la curva* $x(t)=\dfrac{t-1}{t+1},\ y(t)=\dfrac{t^2+2}{t+1}$

- *Asíntotas verticales:* $(y\to\infty)\to(t=-1)\vee(t\to\infty)$.
  Si $t=-1$ es $x\to\infty$ por lo que no hay asíntota vertical.
  Si $t\to\infty$ entonces $x=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t-1}{t+1}=1$ por lo que $x=1$ es una asíntota vertical.

- *Asíntotas horizontales:* $(x\to\infty)\to(t=-1)\to(y=\infty)$: la curva no tiene asíntotas horizontales.

- *Asíntotas oblicuas:* $y=m\cdot x+n$ siendo

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{t\to-1}\left(\frac{t^2+2}{t+1}:\frac{t-1}{t+1}\right)=\lim_{t\to-1}\frac{t^2+2}{t-1}=-\frac{3}{2}\\
n &= \lim_{x\to\infty}(y-m\cdot x)=\lim_{t\to-1}\left(\frac{t^2+2}{t+1}+\frac{3}{2}\,\frac{t-1}{t+1}\right)\\
&= \lim_{t\to-1}\frac{2t^2+3t+1}{2(t+1)}=\lim_{t\to-1}\frac{4t+3}{2}=-\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

  Por lo tanto, $y=-\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{2}$ es una asíntota oblicua de la curva

Enunciados 3

1. Hallar $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}^{-1}$

2. Hallar la dimensión del espacio vectorial generado por el conjunto de vectores $\{(1,2,0,1),(2,4,-1,0),(3,6,-2,-1),(0,0,1,2)\}$

3. Según los valores del parámetro $k \in \mathcal{R}$, estudiar la compatibilidad del sistema $x+y+z=2,\ 2x+3y+kz=4,\ 4x+ky+3z=k+5$

4. Estudiar la diagonalización de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

5. Diagonalizar la matriz $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

6. Hallar el área encerrada por la elipse $2x^2+4y^2+10x-12y-3=0$

7. Representar la función $f(x) = e^{-x^2}x$

Respuestas 3

1. *Hallar* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}^{-1}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(adj(A))^T = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 4 & 0 & -2 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

2. *Hallar la dimensión del espacio vectorial generado por el conjunto de vectores* $\{(1,2,0,1),(2,4,-1,0),(3,6,-2,-1),(0,0,1,2)\}$

   La dimensión del espacio vectorial coincide con el rango de la matriz formada por las componentes de los vectores:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1 \\ F_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 2F_2 \\ F_4 + F_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Por tanto, $rango(A) = dim(V) = 2$

3. *Según los valores del parámetro* $k \in \mathcal{R}$*, estudiar la compatibilidad del sistema* $x + y + z = 2,\ 2x + 3y + kz = 4,\ 4x + ky + 3z = k + 5$

   El rango de la matriz de los coeficientes $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & k \\ 4 & k & 3 \end{pmatrix}$ es $rango(A) \geq 2$

por ser $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$

Por otra parte, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & k \\ 4 & k & 3 \end{vmatrix} = -k^2 + 6x - 9 = 0 \rightarrow k = 3$ $(doble)$

a) Si $k \neq 3$ es $rango(A) = 3 =$ número de incógnitas por lo que el Sistema es Compatible Determinado.

b) Si $k = 3$ es $rango(A) = 2$ y el rango de la matriz ampliada $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ es 2 puesto que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 0.$
Por tanto es $rango(A) = rango(A|b) <$ número de incógnitas por lo que se trata de un Sistema Compatible Indeterminado.

4. *Estudiar la diagonalización de la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Resolviendo la ecuación característica
$|A - \lambda I| = 0 \rightarrow -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$, se obtienen los autovalores $\lambda = -1$ (simple) y $\lambda = 1$ (doble, $\alpha = 2$).
Por el teorema del rango, si λ_0 es un autovalor múltiple de la matriz A, ésta es diagonalizable si $rango(A - \lambda_0 I) = orden(A) - \alpha = 3 - 2 = 1.$
Para $\lambda_0 = 1$ es $rango(A - \lambda_0 I) = rango \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2$ por lo que la matriz dada no es diagonalizable.

5. *Diagonalizar la matriz* $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Hallemos los autovalores de esta matriz simétrica:

$P(\lambda) = -\lambda^3 + (-4)\lambda^2 - 4\lambda = 0 \to \lambda = 0, \lambda = -1, \lambda = -3$

Y a continuación se halla una base de autovectores resolviendo los sistemas homogéneos $(A - \lambda I)\vec{u} = \vec{0}$ para los distintos valores de λ.

a) Para $\lambda = 0$ es $A\vec{u} = \vec{0} \to$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \left\{ \begin{array}{l} x - y = 0 \\ -x - z = 0 \end{array} \right\} \to$$

$y = x \wedge z = -x \to \vec{u}_1 = (1, 1, -1)$

b) Para $\lambda = -1$ es $(A + I)\vec{u} = \vec{0} \to$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \left\{ \begin{array}{l} x - y = 0 \\ -x - z = 0 \end{array} \right\} \to$$

$x = 0 \wedge z = y \to \vec{u}_2 = (0, 1, 1)$

c) Para $\lambda = -3$ es $(A + 3I)\vec{u} = \vec{0} \to$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \left\{ \begin{array}{l} x + 2y = 0 \\ -x + 2z = 0 \end{array} \right\} \to$$

$y = -\frac{x}{2} \wedge z = \frac{x}{2} \to \vec{u}_3 = (2, -1, 1)$

Por lo tanto, es $B = P \cdot D \cdot P^{-1}$ siendo $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$D = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & -1 & \\ & & -3 \end{pmatrix}$

6. *Hallar el área encerrada por la elipse*

$2x^2 + 4y^2 + 10x - 12y - 3 = 0$

$$
\begin{aligned}
& 2(x^2+5x)+4(y^2-3y)-3=0 \\
\rightarrow\ & 2\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{2}+4\left(y-\frac{3}{2}\right)^2-9-3=0 \\
\rightarrow\ & 2\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+4\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{49}{2} \\
\rightarrow\ & \frac{2\left(x+\frac{5}{2}\right)^2}{49/2}+\frac{4\left(y-\frac{3}{2}\right)^2}{49/2}=1 \\
\rightarrow\ & \frac{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2}{49/4}+\frac{\left(y-\frac{3}{2}\right)^2}{49/8}=1 \rightarrow a=\sqrt{\frac{49}{4}},\ b=\sqrt{\frac{49}{8}} \\
& A=\pi\cdot a\cdot b=\frac{49}{\sqrt{32}}\pi
\end{aligned}
$$

7. *Representar la función* $f(x) = e^{-x^2}x$

a) **Dominio:** $D = \mathcal{R}$

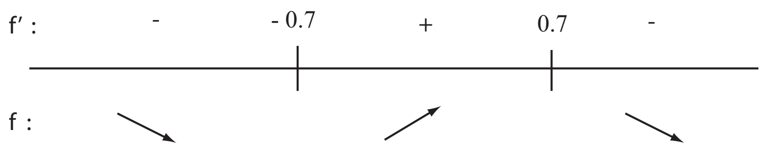
b) **Asíntotas:** No hay asíntota vertical.
Horizontal: $y = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2xe^{x^2}} = 0 \rightarrow y = 0$
Oblicua: no hay.

c) **Punto de corte con la asíntota horizontal:** $\frac{x}{e^{x^2}} = 0 \rightarrow x = 0$: la curva y la asíntota horizontal se cortan en el origen.

d) **Simetría:** $f(-x) = e^{-x^2}(-x) = -f(x)$ por lo que la curva es simétrica con respecto al origen.

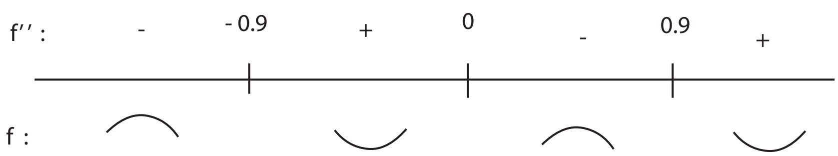
e) **Puntos de corte con los ejes:** $x = 0 \rightarrow f(0) = 0$: la curva corta a los ejes en el origen de coordenadas $(0, 0)$.

f) **Crecimiento:** $f'(x) = e^{-x^2}(-2x^2 + 1) = 0 \rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ con lo que se obtienen los intervalos de monotonía siguientes:



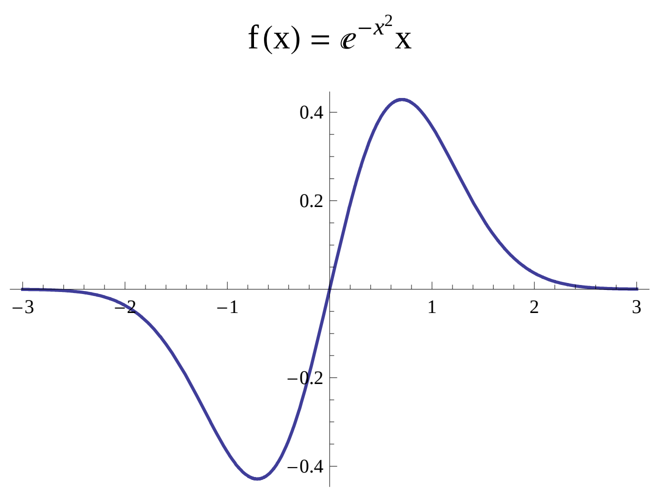
por lo que $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}\right)$ es un mínimo y $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}\right)$ un Máximo.

g) **Concavidad:** $f''(x) = e^{-x^2}(4x^3 - 6x) = 0 \rightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ y se obtienen los intervalos de concavidad:



con tres puntos de inflexión: $(0,0)$, $\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}, \pm\sqrt{\frac{3}{2}}e^{-\frac{3}{2}}\right)$

La representación gráfica es la siguiente figura:



Enunciados 4

1. Hallar el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & k-1 & -k & -2 \end{pmatrix}$ para $k \in \mathcal{R}$

2. Discutir la compatibilidad del siguiente sistema para los distintos valores del parámetro k:
   $kx + y - z = 1,\ 2x + ky + z = 5,\ kx + 2y + (k-1)z = 2k$

3. Hallar el valor de a para que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ sea diagonalizable.

4. Diagonalizar la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ hallando una matriz de paso

5. El conjunto de vectores $\{(1,-1,0,1),\ (2,1,3,-2),\ (3,3,6,-5),\ (-1,-5,-6,7)\}$ es un sistema generador del espacio vectorial L. Hallar una base y las ecuaciones cartesianas de L.

6. Hallar el centro del hiperboloide $2x^2 + 4y^2 - 6z^2 + 5x - 6y + 9z = 0$

7. Estudiar el crecimiento de la función $f(x) = \ln(3 + 5x - 2x^2)$

Respuestas 4

1. *Hallar el rango de la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & k-1 & -k & -2 \end{pmatrix}$ para $k \in \mathcal{R}$

   En primer lugar, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & k-1 & -k \end{vmatrix} = -2k + 3 = 0 \to k = \dfrac{3}{2}$. Discusión:

   a) Si $k \neq \frac{3}{2} \to rango(A) = 3$

   b) Si $k = \frac{3}{2}$, otro menor de tercer orden es $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & -\frac{3}{2} & -2 \end{vmatrix} = \dfrac{7}{2} \neq 0$ por lo que $rango(A) = 3$ En resumen: $rango(A) = 3, \forall k \in \mathcal{R}$

2. *Discutir la compatibilidad del siguiente sistema para los distintos valores del parámetro k:*
   $kx + y - z = 1,\ 2x + ky + z = 5,\ kx + 2y + (k-1)z = 2k$

   Hallamos el rango de la matriz general por menores complementarios:
   $\begin{vmatrix} k & 1 & -1 \\ 2 & k & 1 \\ k & 2 & k-1 \end{vmatrix} = k^3 - 3k - 2 = 0 \to k = 2 \wedge k = -1\ (doble)$

   Discusión:

   a) Si $k \neq 2$ y $k \neq -1$, entonces $rango(A) = rango(A|b) = 3 =$ número de incógnitas por lo que se trataría de un Sistema Compatible Determinado

   b) Si $k = 2$, entonces $rango(A) = 2$ y

$rango(A|b) = rango \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ y como

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, resulta que $rango(A|b) = 3 \neq rango(A)$ y se trataría de un Sistema Incompatible

c) Si $k = -1$, entonces $rango(A) = 2$ y

$rango(A|b) = rango \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ con

$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ -1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -10 \neq 0 \rightarrow rango(A|b) = 3 \neq rango(A)$ por lo que es también un Sistema Incompatible

En resumen: Si $k \neq 2$ y $k \neq -1$ el Sistema es Compatible Determinado. Si $k = 2$ o si $k = -1$ el Sistema es Incompatible.

3. *Hallar el valor de a para que la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ *sea diagonalizable*

Ecuación característica:

$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & a \\ 0 & -3-\lambda & 1 \\ 0 & -4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 + \lambda - 2) = 0 \rightarrow$

$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = 1 \ (\alpha = 2) \\ \lambda = -2 \end{array} \right\}$

Si $\lambda = 1$, ha de ser $rango(A - I) = orden(A) - \alpha = 3 - 2 = 1$:

$$rango(A-I) = rango\begin{pmatrix} 0 & 2 & a \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} = 1 \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & a \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$

$2 + 4a = 0 \rightarrow a = -\frac{1}{2}$ por lo que la matriz A es diagonalizable sólo si $a = -\frac{1}{2}$

4. *Diagonalizar la matriz* $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ *hallando una matriz de paso*

   Valores propios: $P(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 8\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 0, \lambda = -2, \lambda = 4$ por lo que la matriz B es semejante a la matriz diagonal $D = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & -2 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$

   Vectores propios: $(B - \lambda I)\vec{u} = \vec{0}$

   a) $\lambda = 0: \ B\vec{u} = \vec{0}$
   $$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_3 = 0 \end{array} \right\}$$
   $\rightarrow x_3 = x_1 \wedge x_2 = 0$ por lo que el primer autovector es el $\vec{u}_1 = (1, 0, 1)$

   b) $\lambda = -2: \ (B + 2I)\vec{u} = \vec{0}$
   $$= \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{array} \right\}$$
   $\rightarrow x_3 = -x_1 \wedge x_2 = 2x_1$ por lo que el segundo autovector es el $\vec{u}_2 = (1, 2, -1)$

   c) $\lambda = 4: \ (B - 4I)\vec{u} = \vec{0}$

$$= \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \left\{ \begin{array}{c} -3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{array} \right\}$$

$\to x_3 = -x_1 \wedge x_2 = -x_1$ por lo que el tercer autovector es el $\vec{u}_3 = (1, -1, -1)$

Por lo tanto, una matriz de paso es $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ de forma que $B = P \cdot D \cdot P^{-1}$

5. *El conjunto de vectores* $\{(1,-1,0,1),\ (2,1,3,-2),\ (3,3,6,-5),\ (-1,-5,-6,7)\}$ *es un sistema generador del espacio vectorial L. Hallar una base y las ecuaciones cartesianas de L.*

La dimensión de L (número de vectores independientes) coincide con el rango de la matriz de las componentes. Resolveremos este problema por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & 3 & 6 & -5 \\ -1 & -5 & -6 & 7 \end{pmatrix} \equiv \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F - 3 - 3F_1 \\ F_4 + F_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 6 & 6 & -8 \\ 0 & -6 & -6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \quad \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F - 3 - 3F_2 \\ F_4 + 2F_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto $dim(L) = 2$ y una base de L es $B = \{(1,-1,0,1),\ (0,3,3,-4)\}$.

Ecuaciones cartesianas de L:

$\vec{u} \in L \to \vec{u} = a(1,-1,0,1) + b(0,3,3-4) = (a, -a+3b, 3b, a-4b)$ de donde resulta el sistema

$$\begin{aligned}
a &= x_1 \\
-a+3b &= x_2 \\
3b &= x_3 \to b = \frac{1}{3}x_3 \\
a-4b &= x_4
\end{aligned}$$

Sustituyendo los valores de a y b en las ecuaciones segunda y cuarta, resultan las dos ecuaciones que definen al espacio L:

$$\begin{aligned}
-x_1+x_3 &= x_2 \to x_1+x_2-x_3=0 \\
x_1-\frac{4}{3}x_3 &= x_4 \to 3x_1-4x_3-3x_4=0
\end{aligned}$$

Luego $L=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathcal{R}^4:\ x_1+x_2-x_3=0,\ 3x_1-4x_3-3x_4=0\}$

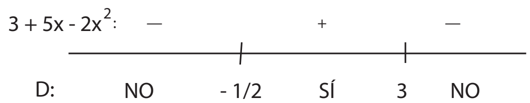
6. *Hallar el centro del hiperboloide* $2x^2+4y^2-6z^2+5x-6y+9z=0$

$$\begin{aligned}
&2x^2+4y^2-6z^2+5x-6y+9z=0 \\
&x^2+2y^2-3z^2+\frac{5}{2}x-3y+\frac{9}{2}z=0 \\
&\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{16}+2\left(y-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{8}-3\left(z-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{27}{16}=0 \\
&\left(x+\frac{5}{4}\right)^2+2\left(y-\frac{3}{4}\right)^2-3\left(z-\frac{3}{4}\right)^2=1
\end{aligned}$$

Es un hiperboloide de una hoja de centro el punto $(-\frac{5}{4},\frac{3}{4},\frac{3}{4})$

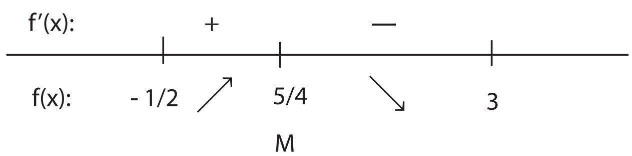
7. *Estudiar el crecimiento de la función* $f(x)=\ln(3+5x-2x^2)$

Dominio: $-2x^2+5x+3=0\to x=3,\ x=-\frac{1}{2}$ por lo que la recta real queda dividida en los intervalos de existencia



Luego $D =]-\frac{1}{2}, 3[$

Derivada: $f'(x) = \dfrac{5-4x}{3+5x-2x^2} = 0 \rightarrow 5-4x = 0 \rightarrow x = \dfrac{5}{4}$ por lo que las regiones de crecimiento quedan como sigue:



Por tanto, la función es creciente en el intervalo $]-\frac{1}{2}, \frac{5}{4}[$, decreciente en el $]\frac{5}{4}, 3[$ y posee un Máximo en el punto $(\frac{5}{4}, \ln \frac{49}{8})$

Enunciados 5

1. Según sus soluciones y para $k \in \mathcal{R}$, clasificar (sin resolver) el sistema
$$\left\{ \begin{array}{l} x + y - 2z + t = 0 \\ 2x - y + z - 3t = 1 \\ 5x - 7y + 10z + k\,t = -4 \end{array} \right\}$$

2. Hallar la ecuación cartesiana del espacio vectorial generado por los vectores (1, 2, -1, 0), (2, 1, 3, 2), (0, 1, -2, -1)

3. Resolver el sistema matricial $\left\{ \begin{array}{l} 2X - 3Y = A \\ 3X + 4Y = B \end{array} \right\}$, si $A = \begin{pmatrix} -10 & -7 & 5 \\ -3 & -4 & 13 \end{pmatrix}$
$B = \begin{pmatrix} 19 & -2 & -1 \\ 4 & 11 & -6 \end{pmatrix}$

4. Diagonalizar la matriz $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ hallando una matriz de paso

5. Hallar el volumen de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 2z - 2 = 0$

6. Estudiar la concavidad de la curva $f(x) = e^{-x+1}(x^2 - x + 2)$

7. Hallar las asíntotas de la curva $\left(\dfrac{t^2}{t-1}, \dfrac{t^2+1}{t+1} \right)$

Respuestas 5

1. *Según sus soluciones y para $k \in \mathcal{R}$, clasificar (sin resolver) el sistema*
$$\left\{\begin{array}{l} x+y-2z+t=0 \\ 2x-y+z-3t=1 \\ 5x-7y+10z+k\,t=-4 \end{array}\right\}$$
Resolvemos el problema por Gauss:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 5 & -7 & 10 & k & -4 \end{pmatrix}$$
$$\equiv \begin{array}{c} F_1 \\ F_2-2F_1 \\ F_3-5F_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & -5 & 1 \\ 0 & -12 & 20 & k-5 & -4 \end{pmatrix}$$
$$\equiv \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3-4F_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k+15 & -8 \end{pmatrix}$$
$k+15=0 \rightarrow k=-15$

   Si $k \neq -15 \rightarrow rango(A) = 3 = rango(A^{+})$: Sistema Compatible Indeterminado
   Si $k = -15 \rightarrow rango(A) = 2 \wedge rango(A^{+}) = 3$: Sistema Incompatible

2. *Hallar la ecuación cartesiana del espacio vectorial generado por los vectores* (1, 2, -1, 0), (2, 1, 3, 2), (0, 1, -2, -1)

   Ecuación vectorial:
   $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = a(1,2,-1,0) + b(2,1,3,2) + c(0,1,-2,-1)$
   Ecuaciones paramétricas: $\left\{\begin{array}{l} x_1 = a+2b \\ x_2 = 2a+b+c \\ x_3 = -a+3b-2c \\ x_4 = 2b-c \end{array}\right\}$

Ecuación cartesiana: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & x_1 \\ 2 & 1 & 1 & x_2 \\ -1 & 3 & -2 & x_3 \\ 0 & 2 & -1 & x_4 \end{vmatrix} = 0 \to x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$

3. *Resolver el sistema matricial* $\left\{ \begin{array}{l} 2X - 3Y = A \\ 3X + 4Y = B \end{array} \right\}$, si $A = \begin{pmatrix} -10 & -7 & 5 \\ -3 & -4 & 13 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 19 & -2 & -1 \\ 4 & 11 & -6 \end{pmatrix}$

Multiplicando la primera ecuación por –3, la segunda por 2 y sumando:

$$17Y = -3 \begin{pmatrix} -10 & -7 & 5 \\ -3 & -4 & 13 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 19 & -2 & -1 \\ 4 & 11 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\to \quad Y = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 68 & 17 & -17 \\ 17 & 34 & -51 \end{pmatrix} \to Y = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Multiplicando la primera ecuación por 4, la segunda por 3 y sumando:

$$17X = 4 \begin{pmatrix} -10 & -7 & 5 \\ -3 & -4 & 13 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 19 & -2 & -1 \\ 4 & 11 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\to \quad X = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 17 & -34 & 17 \\ 0 & 17 & 34 \end{pmatrix} \to X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

4. *Diagonalizar la matriz* $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *hallando una matriz de paso*

La matriz F es diagonalizable por ser simétrica.

Valores propios. Ecuación característica:

$|F - \lambda I| = 0 \to -\lambda^3 + 3\lambda - 2 = 0 \to \lambda = 1 \ (\alpha = 2), \lambda = -2$

Vectores propios: se resuelve la ecuación $(F - \lambda I)\vec{u} = \vec{0}$

Para $\lambda = 1:\ (F - I)\vec{u} = \vec{0} \rightarrow$

$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow -x + y - z = 0 \rightarrow z = x - y$ por lo que los dos primeros autovectores son $e_1 = (1, 0, 1),\ e_2 = (0, 1, -1)$

Para $\lambda = -2:\ (F - I)\vec{u} = \vec{0} \rightarrow$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{array} \right\} \rightarrow y = -x \wedge$ $z = x$ siendo un tercer autovector el $e_3 = (1, -1, 1)$. Por lo tanto, $F = P \cdot D \cdot P^{-1}$ siendo $P = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$

5. *Hallar el volumen de la esfera* $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 2z - 2 = 0$

   Esta ecuación puede escribirse también como suma de cuadrados:
   $(x - 2)^2 - 4 + (y + 3)^2 - 9 + (z + 1)^2 - 1 - 2 = 0$
   $\rightarrow (x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z + 1)^2 - 16 = 0$ por lo que $r = \sqrt{16} = 4 \rightarrow$
   Vol $= \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi 4^3 = \frac{256\pi}{3}$

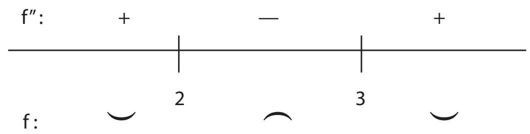
6. *Estudiar la concavidad de la curva* $f(x) = e^{-x+1}(x^2 - x + 2)$

   El dominio de esta función es $\mathcal{R}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-x+1}(-x^2 + x - 2 + 2x - 1) = e^{-x+1}(-x^2 + 3x - 3) \\ f''(x) &= e^{-x+1}(x^2 - 3x + 3 - 2x + 3) = e^{-x+1}(x^2 - 5x + 6) \end{aligned}$$

   $f''(x) = 0 \rightarrow x = 2 \wedge x = 3$ por lo que la recta real queda divida en los intervalos de convergencia

   En consecuencia, la curva es cóncava o abierta hacia abajo en el intervalo $]2, 3[$, convexa o abierta hacia arriba en el resto del dominio, y



posee dos puntos de inflexión: $(2, 4e^{-1})$ y $(3, 8e^{-2})$

7. *Hallar las asíntotas de la curva* $\left(\dfrac{t^2}{t-1}, \dfrac{t^2+1}{t+1}\right)$

- *Horizontales:*

$$(y \to \infty) \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} (t \to \infty) \Rightarrow (x \to \infty): \ \ no \\ (t = -1) \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \end{array} \right\}$$

- *Verticales:*

$$(x \to \infty) \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} (t \to \infty) \Rightarrow (y \to \infty): \ \ no \\ (t = 1) \Rightarrow y = 1 \end{array} \right\}$$

- *Oblicuas:* $y = m \cdot x + n$ siendo

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to\infty} = \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{t^3 - t^2 + t - 1}{t^3 + t} = 1 \\ \displaystyle\lim_{t\to 1} \frac{t^3 - t^2 + t - 1}{t^3 + t} = 0: \ \ no \end{array} \right\} \\ n &= \lim_{x\to\infty} (y - m \cdot x) = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{t^2+1}{t-1} - \frac{t^2}{t-1} \right) \\ &= \lim_{t\to\infty} \left(\frac{-2t^2 + t - 1}{t^2 - 1} = -2 \right) \to y = x - 2 \end{aligned}$$

En resumen: $x = -\dfrac{1}{2}$ es una asíntota vertical, $y = 1$ es una asíntota horizontal; $y = x - 2$ es una asíntota oblicua.

Enunciados 6

1. Según sus soluciones y para $k \in \mathcal{R}$, clasificar (sin resolver) el sistema
$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z = 1 \\ 3x - y + 2z = 0 \\ 3x - 8y + k\ z = -3 \end{array} \right\}$$

2. Hallar la ecuación cartesiana del subespacio vectorial de $\mathcal{R}^3$ generado por los vectores (1, 2, -1) y (2, 3, 2).

3. Si es posible, diagonalizar la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & -8 & 7 \end{pmatrix}$, e indicar una matriz de paso.

4. Hallar el área encerrada por la elipse $9x^2 + 4y^2 + 36x - 24y - 72 = 0$

5. Estudiar la concavidad de la curva $f(x) = e^{-x+1}(x^2 - 2)$

6. Hallar los dominios y las asíntotas de la curva $\left(t^2 - t - 2, \dfrac{t+1}{t^3 - 1}\right)$

Respuestas 6

1. *Según sus soluciones y para $k \in \mathcal{R}$, clasificar (sin resolver) el sistema*
$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z = 1 \\ 3x - y + 2z = 0 \\ 3x - 8y + k\ z = -3 \end{array} \right\}$$
Gauss:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & -8 & k & -3 \end{pmatrix} \equiv \begin{array}{c} F_1 \\ -3F_1 + F_2 \\ -3F_1 + F_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 5 & -3 \\ 0 & -14 & 3+k & -6 \end{pmatrix}$$
$$\equiv \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ -2F_2 + F_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -7+k & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -7 + k = 0 \rightarrow k = 7$$
Discusión:
   - Si $k = 7 \rightarrow rango(A) = rango(A^+) = 2$: Sistema Compatible Indeterminado
   - Si $k \neq 7 \rightarrow rango(A) = rango(A^+) = 3$: Sistema Compatible Determinado ($z = 0,\ y = \frac{3}{7},\ x = \frac{1}{7}$)

2. *Hallar la ecuación cartesiana del subespacio vectorial de $\mathcal{R}^3$ generado por los vectores* (1, 2, -1) y (2, 3, 2).

   Sea $\vec{u} = (1, 2, -1),\ \vec{v} = (2, 3, 2)$. Si $\vec{w} \in L_2 \rightarrow \vec{w}$ depende de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ por lo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 7x - 4y - z = 0$

3. *Si es posible, diagonalizar la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & -8 & 7 \end{pmatrix}$, *e indicar*

una matriz de paso.

Ecuación característica:

$$|A-\lambda I| = 0 \to \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 3 & -1-\lambda & 2 \\ 3 & -8 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\to \quad -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 12\lambda = 0 \to \lambda(\lambda^2 - 7\lambda + 12) = 0$$

$$\to \quad \lambda = 0,\ \lambda = 3,\ \lambda = 4$$

Puesto que los autovalores son simples, la matriz es diagonalizable:

$A \equiv \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 3 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$

Una matriz de paso es una matriz de autovectores. Para hallar los autovectores se resuelven los sistemas de ecuaciones $(A-\lambda_i I)\vec{u} = \vec{0}$

- Para $\lambda = 0$:

$$A\vec{u} = \vec{0} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & -8 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \quad \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z = 0 \\ 3x - y + 2z = 0 \end{array} \right\} \to 2E_1 + E_2:\ 5x + 3y = 0$$

$$\to \quad y = -\frac{5}{3}x \to z = x + 2y = -\frac{7}{3}x \to \vec{e}_1 = (3, -5, -7)$$

- Para $\lambda = 3$:

$$(A-3I)\vec{u} = \vec{0} \to \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \\ 3 & -8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \quad \left\{ \begin{array}{l} -2x + 2y - z = 0 \\ 3x - 4y + 2z = 0 \end{array} \right\} \to 2E_1 + E_2:\ -x = 0 \to x = 0$$

$$\to z = 2y \to \vec{e}_2 = (0, 1, 2)$$

- Para $\lambda = 4$:

$$(A-4I)\vec{u} = \vec{0} \to \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \\ 3 & -8 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \left\{ \begin{array}{l} -3x+2y-z=0 \\ 3x-5y+2z=0 \end{array} \right\} \to 2E_1+E_2: \ -3x-y=0$$

$$\to \ y=-3x \to z=-9x \to \vec{e}_3 = (1,-3,-9)$$

En consecuencia, una matriz de paso es $P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & -3 \\ -7 & 2 & -9 \end{pmatrix}$ de forma que $P \cdot D \cdot P^{-1} = A$

4. *Hallar el área encerrada por la elipse* $9x^2+4y^2+36x-24y-72=0$

   Esta ecuación también puede escribirse en la forma

$$\begin{aligned} & 9(x^2+4x)+4(y^2-6y)-72=0 \\ \to \ & 9(x+2)^2-36+4(y-3)^2-36-72=0 \\ \to \ & 9(x+2)^2+4(y-3)^2=144 \to \frac{(x+2)^2}{16}+\frac{(y-3)^2}{36}=1 \\ \to \ & a=\sqrt{16}=4, \ b=\sqrt{36}=6 \end{aligned}$$

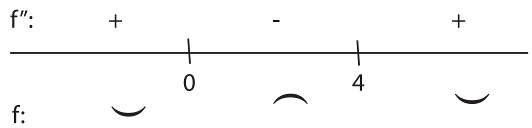
   Luego $A = \pi ab = \pi 4 \cdot 6 = 24\pi$

5. *Estudiar la concavidad de la curva* $f(x) = e^{-x+1}(x^2-2)$

   Dominio: $D = \mathcal{R}$.
   Derivadas:

$$\begin{aligned} & y' = e^{-x+1}(-x^2+2+2x) \to y'' = e^{-x+1}(x^2-x-2x-2x+2) \\ \to \ & y'' = e^{-x+1}(x^2-4x)=0 \to x^2-4x=0 \to x=0 \wedge x=4 \end{aligned}$$

   Y se obtienen los intervalos de concavidad que se indican en la figura siguiente:



Por lo tanto, la curva es cóncava en el intervalo $]0,4[$ y convexa en el resto del dominio. Posee dos puntos de inflexión: $(0,-2e)$ y $(4,14e^{-3})$

6. *Hallar los dominios y las asíntotas de la curva* $\left(t^2-t-2,\dfrac{t+1}{t^3-1}\right)$

Dominio de x:

$D_X:\ t^2-t-2=x \rightarrow t^2-t-(2+x)=0 \rightarrow t=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4(2+x)}}{2}$

$9+4x\geq 0 \rightarrow x\geq -\dfrac{9}{4} \rightarrow D_X=[-\dfrac{9}{4},+\infty[$

Dominio de y: $\dfrac{t+1}{t^3-1}=y \rightarrow t+1=yt^3-y \rightarrow yt^3-t-(y+1)=0$: ecuación polinómica de tercer grado en t que siempre tiene al menos una solución real para cualquier valor de y por lo que $D_Y=\mathcal{R}$

Asíntotas:

Asíntotas verticales: $(y\rightarrow\infty)\Rightarrow t=1\rightarrow x=-2$

Asíntotas horizontales: $(x\rightarrow\infty)\Rightarrow(t\rightarrow\infty)\Rightarrow y=0$

Asíntotas oblicuas: $y=mx+n$ siendo

$m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{t\to\infty}\left(\dfrac{t+1}{t^3-1}:(t^2-t-2)\right)$

$=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t+1}{(t^3-1)(t^2-t-2)}=0$ por lo que la curva no tiene asíntota oblicua.

Enunciados 7

1. Resolver el sistema $\begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ 3x + 2y - z = -2 \\ 5x + 12y - 5z = -8 \end{cases}$

2. Los vectores (1, 2, –1), (-2, 1, –3), (1, –1, 0) forman una base de $\mathcal{R}^3$. Hallar las componentes del vector (3, 4, 1) con respecto a esta base.

3. Hallar la longitud de la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 8 = 0$

4. Hallar una matriz de paso que permita diagonalizar la matriz
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

5. Estudiar la concavidad de la curva $f(x) = e^{-x}(x^2 - 7)$

6. Hallar las asíntotas de la curva $\left(\dfrac{t^2-1}{t+2}, \dfrac{t-2}{t^2-2t+1}\right)$

Respuestas 7

1. *Resolver el sistema* $\begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ 3x + 2y - z = -2 \\ 5x + 12y - 5z = -8 \end{cases}$

   Lo resolveremos por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -2 \\ 5 & 12 & -5 & -8 \end{pmatrix} \equiv \begin{array}{c} F_1 \\ 3F_1 - 2F_2 \\ 5F_1 - 2F_3 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -13 & 5 & 7 \\ 0 & -39 & 15 & 21 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_2 - 3F_3 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -13 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Se trata por tanto de un sistema compatible indeterminado siendo la segunda ecuación $-13y + 5z = 7 \rightarrow z = \dfrac{7 + 13y}{5}$.
   Sustituyendo en la primera ecuación $2x - 3y + z = 1$, se obtiene el valor de x: $2x - 3y + z = 1 \rightarrow 2x - 3y + \dfrac{7 + 13y}{5} = 1 \rightarrow x = \dfrac{y - 1}{5}$

2. *Los vectores (1, 2, –1), (-2, 1, –3), (1, –1, 0) forman una base de* $\mathcal{R}^3$*. Hallar las componentes del vector (3, 4, 1) con respecto a esta base.*

   Sean $u_1 = (1, 2, -1)$, $u_2 = (-2, 1, -3)$, $u_3 = (1, -1, 0)$. Si el vector $x = (3, 4, 1)$ es combinación lineal de ellos, entonces

$$\begin{aligned} x &= au_1 + bu_2 + cu_3 \\ &\rightarrow (3,4,1) = a(1,2,-1) + b(-2,1,-3) + c(1,-1,0) \\ &\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a - 2b + c = 3 \\ 2a + b - c = 4 \\ -a - 3b = 1 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

   Sumando las dos primeras ecuaciones resulta $3a - b = 7$. Multiplicando esta ecuación por 3 y restando la tercera, queda $10a = 20 \rightarrow a = 2$, por lo que $b = -1$ y $c = -1$. Por lo tanto, las componentes del vector indicado con respecto a esta base son $x = (2, -1 - 1)$

3. *Hallar la longitud de la circunferencia* $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 8 = 0$

   Esta ecuación puede escribirse en la forma $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 5$ por lo que $r^2 = 5 \to r = \sqrt{5}$. Por lo tanto, la longitud de la circunferencia es $L = 2\pi r = 2\pi\sqrt{5} = 14{,}05$

4. *Hallar una matriz de paso que permita diagonalizar la matriz*

   $$M = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

   Una matriz de paso es una matriz de autovalores. Hallemos primero los autovalores para lo cual resolvemos la ecuación $|M - \lambda I| = 0$:

   $$\begin{aligned} |M - \lambda I| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 6 & -3 \\ 0 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 + 2\lambda - 3) = 0 \to \lambda = 1 \text{ (doble)},\ \lambda = -3 \end{aligned}$$

   Para hallar los autovectores se resuelven las ecuaciones $(M - \lambda_i I)\vec{x} = \vec{0}$. Para $\lambda = 1$

   $$\begin{aligned} (M - I)\vec{x} = 0 \ &\to \begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\to \left\{ \begin{array}{c} 6y - 3z = 0 \\ -2y + z = 0 \end{array} \right\} \to z = 2y,\ x = x \end{aligned}$$

Por lo tanto, los dos primeros autovectores son $(0,1,2),(1,0,0)$

Para $\lambda = -3$:

$$
\begin{aligned}
(M+3I)\vec{x}=0 \quad &\rightarrow \quad \begin{pmatrix} 4 & 6 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} 4x+6y-3z=0 \\ 2y+z=0 \end{array} \right\} \\
&\rightarrow \quad z=-2y, \ x=-3y
\end{aligned}
$$

por lo que el tercer autovector es el $(-3,1,-2)$.

En consecuencia, una matriz de paso para la diagonalización puede ser la $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

5. *Estudiar la concavidad de la curva* $f(x) = e^{-x}(x^2-7)$

   El dominio de la función $f(x) = \dfrac{x^2-7}{e^x}$ es $\mathcal{R}$.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= e^{-x}(-x^2+7+2x) \\
&\rightarrow \ f''(x) = e^{-x}(x^2-7-2x-2x+2) = e^{-x}(x^2-4x-5) \\
f''(x) &= 0 \rightarrow x^2-4x-5=0 \rightarrow x=-1 \wedge x=5 \\
&\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x<-1 \rightarrow f''(x)>0 \\ -1<x<5 \rightarrow f''(x)<0 \\ x>5 \rightarrow f''(x)>0 \end{array} \right\}
\end{aligned}
$$

En resumen:

la curva es cóncava hacia arriba en el dominio $]-\infty,-1[\cup]5,+\infty[$ y cóncava hacia abajo en el intervalo $]-1,5[$.

Los puntos $(-1,-6e)$ y $(5,18e^{-5})$ son de inflexión.

6. *Hallar las asíntotas de la curva* $\left(\dfrac{t^2-1}{t+2}, \dfrac{t-2}{t^2-2t+1}\right)$

Asíntota horizontal:

$$(x \to \infty) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (t \to \infty) \Rightarrow y = 0 \\ (t = -2) \Rightarrow y = \dfrac{-4}{9} \end{array} \right\}$$

Asíntota vertical:

$(y \to \infty) \Rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \to t = 1 \to x = 0$

Asíntota oblicua: $y = m\ x + n$ siendo

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\lim_{t\to\infty} \left(\frac{t-2}{t^2-2t+1} : \frac{t^2-1}{t+2} \right) = \lim_{t\to\infty} \frac{t^2-4}{t^4+\cdots} = 0 \\ \displaystyle\lim_{t\to-2} \frac{t^2-4}{(t-1)^3(t+1)} = 0 \end{array} \right\}:$$

la curva no tiene asíntota oblicua.

En resumen: las asíntotas de la curva son los ejes coordenados y la recta horizontal $y = -\dfrac{4}{9}$.

Bibliografía

[1] FALCÓN SANTANA, S.: *Cálculo I*, El Libro Técnico, Las Palmas de G.C. (2001)

[2] FALCÓN SANTANA, S.: *Cálculo II*, El Libro Técnico, Las Palmas de G.C. (2001)

[3] GRANERO RODRÍGUEZ, F.: *Álgebra y Geometría Analítica*, Ed. McGraw-Hill España, 1985.

[4] MERINO L. y SANTOS E.: *Álgebra lineal con métodos elementales*, Ed. Thomson-Paraninfo, 2006.

[5] MONTESDEOCA, A.: *Representación gráfica de curvas dadas en implícitas, paramétricas y polares*, (2003), www.gt.matfun.ull.es/angel/

[6] PISKUNOV, N.: *Cálculo diferencial e integral*, Montaner y Simón, Barcelona (1966)

[7] SPIEGEL M. y ROBERT M.: *Álgebra*, Ed. McGraw-Hill España, 2004.

[8] TÉBAR FLORES, E.: *Problemas de Álgebral lineal*, Ed. Tébar.

[9] www.mathcurve.com

[10] www.2dcurves.com

[11] http://en.wikipedia.org

[12] www.mathworld.wolfram.com/AlgebraicSurface