MATEMÁTICAS PARA ARQUITECTURA
Segunda Parte

Sergio Falcón Santana

Curso 2018 – 2019

En esta segunda parte de *MATEMÁTICAS PARA ARQUITECTURA* se iniciará al alumno en los estudios correspondientes a la parte de la Matemática llamada Cálculo. Dentro de éste se estudia el Cálculo diferencial de varias variables así como el Cálculo integral de una y varias variables.

Finaliza esta parte con el estudia de los Campos Escalares y los Campos Vectoriales.

Índice general

Capítulo 9

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Hasta ahora se ha estudiado las funciones de una sola variable que son aquellas funciones que establecen una relación entre dos variables de tal forma que a un valor concreto de una de ellas considerada como variable independiente, le corresponde un valor determinado de la segunda variable llamada por ello variable dependiente. Estas funciones se indican en la forma $y = f(x)$ y se dice que es una función real y de una variable real x, siendo por tanto una aplicación $f : D \subset \mathcal{R} \to D' \subset \mathcal{R}$. El conjunto D es el dominio de la función $f(x)$ y D' su rango.

En esta parte extendemos los conceptos estudiados en las funciones de una sola variable al caso en que existan varias variables independientes con conceptos que son muy semejantes en ambos casos.

Dado que el estudio de las funciones de n variables es en todo idéntico al estudio de las funciones de sólo dos variables, estudiaremos éstas con detenimiento y, en caso necesario, se hará una generalización a funciones de n variables.

Intuitivamente sabemos que dos magnitudes son independientes si no hay relación entre ellas, de forma que si una magnitud varía en un sentido, la otra puede hacerlo en un sentido propio que no depende de cómo lo haya hecho la primera.

Pueden ser variables independientes las que determinen la posición de un punto en un plano, el precio y el volumen de los artículos de un comercio, la velocidad de un coche y la riqueza de su conductor, etc.

9.1. DERIVADAS PARCIALES

9.1.1. Concepto de función de varias variables

Se dice que la variable z es función de x e y si existe una aplicación f de $\mathcal{R}^2$ en $\mathcal{R}$ tal que $z = f(x, y)$.

Cada par de valores $x = a,\ y = b$ determina un único valor $c = f(a, b)$ generándose un punto (a, b, c) del espacio $\mathcal{R}^3$.

El conjunto $D \subset \mathcal{R}^2$ formado por los puntos $(x, y) \in \mathcal{R}^2$ para los cuales existe $z = z(x, y)$ se llama *dominio de la función* z y su estudio es en todo semejante al que se efectúa para las funciones de una sola variable. El dominio de una función de dos variables no es más que el recinto genrado mediante la proyección sobre el plano XOY de dicha superficie.

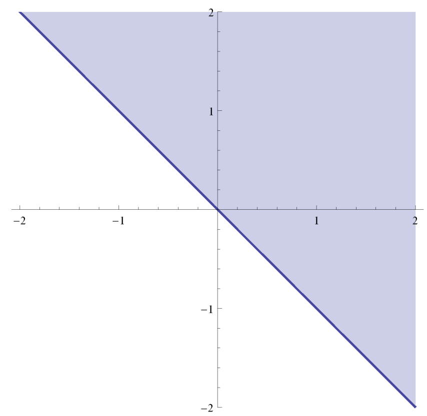
La ecuación del plano XOY es $z = 0$; la del XOZ es $y = 0$ y la del YOZ es $x = 0$. Teniendo en cuenta que una recta está determinada mediante la intersección de dos planos, los ejes coordenados están definidos mediante las ecuaciones $y = z = 0$ para el eje X; $x = z = 0$ para el eje Y y $x = y = 0$ para el eje Z.

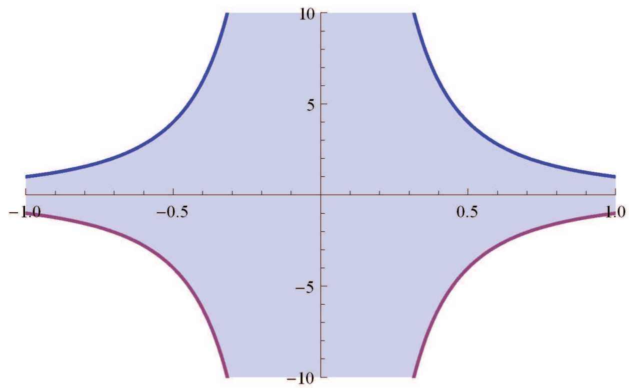
Ejemplo 9.1 *Hallar el dominio de la función* $z = \ln(x + y)$ *y dibujarlo.*

Para que el logaritmo sea un número real, la suma $x+y$ ha de ser un número estrictamente positivo, por lo que $x + y > 0$, de donde resulta $y > -x$.
Luego $D = \{(x, y) \in \mathcal{R}^2 : y > -x\}$ y representa el semiplano superior a la recta $y = -x$:

Ejemplo 9.2 *Representar el dominio de la función* $f(x, y) = \operatorname{arc\,sen}(x^2 y)$

Como el seno de una función varía entre -1 y $+1$ ha de ser
$-1 \leq x^2 y \leq 1 \rightarrow \frac{-1}{x^2} \leq y \leq \frac{1}{x^2}$.
Luego el dominio es $D = \{(x, y) \in \mathcal{R}^2 : \frac{-1}{x^2} \leq y \leq \frac{1}{x^2},\ x \neq 0\}$ y representa la región interior a las hipérbolas de la figura:





Ejemplo 9.3 *Hallar el dominio de la función* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Dado que la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ representa una esfera, su proyección sobre el plano $Z = 0$ es el círculo de centro el origen y radio 1, $x^2 + y^2 \leq 1$

Como vemos en estos ejemplos, representar el dominio de una función $z = f(x, y)$ es un problema relativamente sencillo. Por otra parte, para representar una función de dos variables, se dibuja el conjunto de puntos $(x, y, z = f(x, y))$ en un sistema cartesiano de 3 ejes. Se obtiene así una superficie en el espacio cuya proyección en el plano XOY es el dominio de la función z. Salvo superficies muy particulares como pueden ser las cuádricas estudiadas en el capítulo anterior, representar una función en el espacio suele ser una tarea harto complicada y sólo posible con ayuda de programas informáticos apropiados.

9.1.2. Derivada parcial

Una derivada parcial de una función de varias variables no es más que la derivada de la función con respecto a una de sus variables, suponiendo constantes las demás.

Si una función depende de varias variables, entonces tiene tantas funciones derivadas como variables posea y cada una de estas derivadas se llama *derivada parcial* de la función con respecto a esta variable.

Sea la función $z = f(x, y)$. Si y permanece constante, la función z variará sólo en función de x por lo que si x se incrementa en un valor Δx entonces z se incrementa en un incremento parcial con respecto a la variable x que se indica como $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$.

De forma semejante, si x permanece constante y se incrementa y se obtiene el incremento de z con respecto a la variable y que se indica como
$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$.

Definición 9.1 *Se llama derivada parcial de z con respecto a la variable x al límite del cociente incremental con respecto a esta variable, cuando el incremento de esta variable tiende a cero. Es decir:*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \tag{9.1}$$

Definición 9.2 *Se llama derivada parcial de z con respecto a la variable y al límite*

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \tag{9.2}$$

Estas derivadas parciales también se indican como $f_x,\ f'_x,\ \partial_x f$ o
$f_y,\ f'_y,\ \partial_y f$, respectivamente.

Por lo tanto la derivada parcial de una función de dos variables tiene exactamente las mismas propiedades que la derivada de una función de una sola variable y se calcula siguiendo las mismas reglas sin más que tener en cuenta que al derivar con respecto a una variable, la otra se considera como constante. No obstante, existe una diferencia fundamental entre ambas y es que toda función de una sola variable derivable en un punto es continua en el mismo, mientras que una función de varias variables puede poseer derivadas parciales con respecto a todas sus variables en un punto determinado y sin embargo no ser continua en él.

Ejemplo 9.4 *Hallar las derivadas parciales de primer orden de la función* $z = x^2 + 3xy - 2x^3 \cos y + e^{4xy^2}$

a) Derivamos con respecto a x (suponiendo la y constante):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y - 6x^2 \cos y + 4y^2 e^{4xy^2}$$

b) Derivamos con respecto a y (suponiendo la x constante):

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x + 2x^3 \operatorname{sen} y + 8xye^{4xy^2}$$

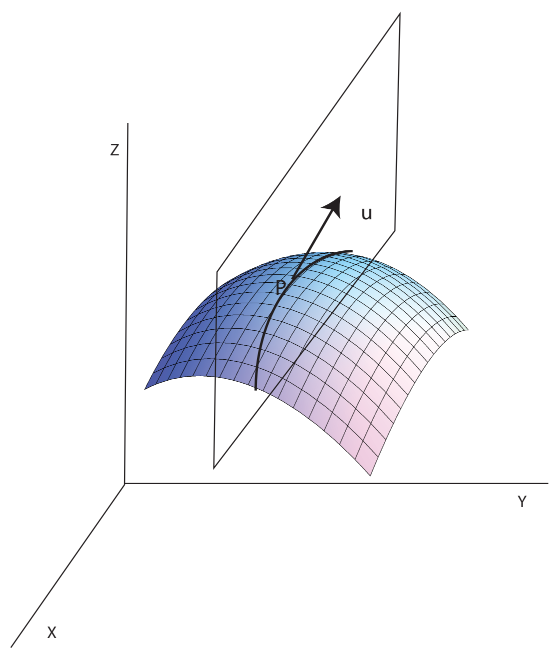
Ejemplo 9.5 *Hallar las derivadas parciales de primer orden de la función* $z = \operatorname{sen}^2(x^2 + xy - 1)$

a) Derivamos con respecto a x (suponiendo la y constante):
$z_x = 2 \operatorname{sen}(x^2 + xy - 1) \cos(x^2 + xy - 1)(2x + y)$
b) Derivamos con respecto a y (suponiendo la x constante):
$z_y = 2 \operatorname{sen}(x^2 + xy - 1) \cos(x^2 + xy - 1)x$

Interpretación geométrica de las derivadas parciales

a) $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$. Puesto que esta derivada se halla manteniendo y constante $y = y_0$, es evidente que $z = f(x, y_0)$ es la curva intersección de la superficie

$z = f(x,y)$ con el plano $y = y_0$ que es paralelo al plano coordenado XOZ. En consecuencia, la derivada parcial $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)_P$ representa el coeficiente angular de la recta tangente a la curva intersección de la superficie $z = f(x,y)$ con el plano $y = y_0$ en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ de la misma.



Por tanto, la ecuación continua de la recta tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ de la misma y contenida en un plano $y = y_0$ paralelo al XOZ es

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{0} = \frac{z - z_0}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P} \tag{9.3}$$

b) Igualmente, la ecuación continua de la recta tangente a la curva intersección de la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ de la misma con el plano $x = x_0$ paralelo al YOZ es

$$\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{1} = \frac{z - z_0}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P} \tag{9.4}$$

Ejemplo 9.6 *Hallar la ecuación continua de las rectas tangentes a la superficie* $z = \dfrac{3x^2 - 2y^2}{2x + y}$ *en el punto* $(1, -1, 1)$ *y que sean paralelas a los planos coordenados XOZ, YOZ.*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{6x(2x + y) - (3x^2 - 2y^2)2}{(2x + y)^2} \to \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P = 4$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-4y(2x + y) - (3x^2 - 2y^2)}{(2x + y)^2} \to \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P = 3$$

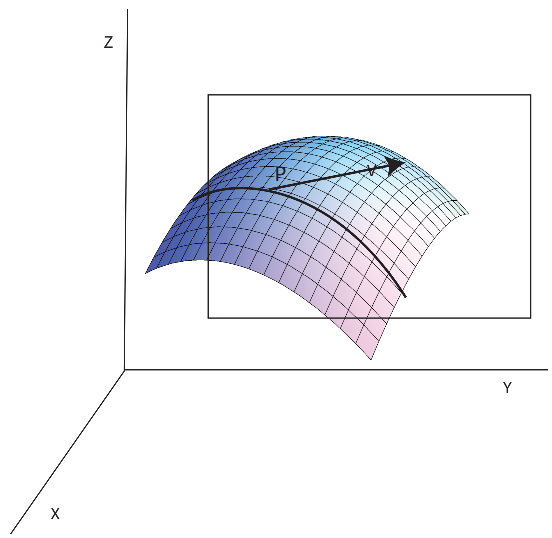
La ecuación de la recta tangente contenida en el plano $y = -1$ es
$\dfrac{x - 1}{1} = \dfrac{y + 1}{0} = \dfrac{z - 1}{4}$
y la de la recta tangente contenida en el plano $x = 1$ es $\dfrac{x - 1}{0} = \dfrac{y + 1}{1} = \dfrac{z - 1}{3}$

9.1.3. Ecuación del plano tangente a una superficie

Consideremos la superficie $z = z(x, y)$ y el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ de la misma. Un plano tangente a la superficie z en el punto P está determinado por este punto y por los vectores de las rectas tangentes $(1, 0, \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P$, $(0, 1, \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P$.

En consecuencia, la ecuación del plano tangente es

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ 1 & 0 & (z_x)_P \\ 0 & 1 & (z_y)_P \end{vmatrix} = 0$$



O, tras desarrollar el determinante,

$$z - z_0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P (x - x_0) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P (y - y_0) \tag{9.5}$$

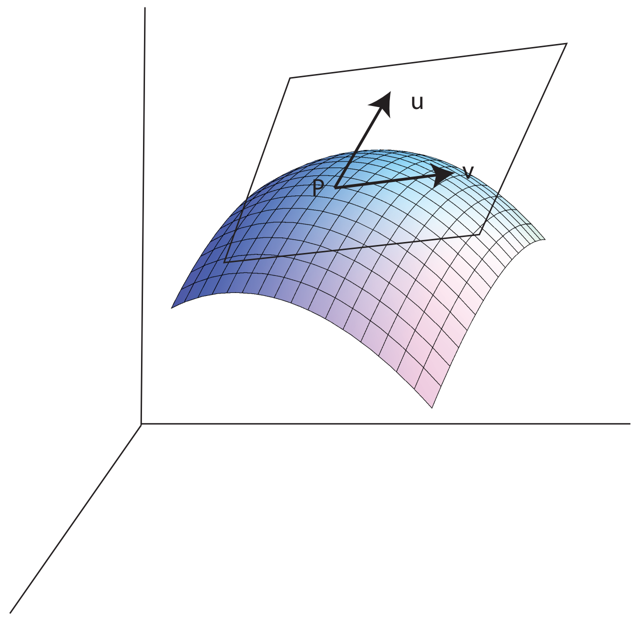


Figura 9.1: Plano tangente a una superficie

Ejemplo 9.7 *Ecuación del plano tangente a la superficie* $z = x^2y + 2x - 6y + 2$ *en el punto de coordenadas* $x = 3$, $y = -1$

En primer lugar debemos hallar la tercera coordenada del punto P de la superficie: $z(3, -1) = -9 + 6 + 6 + 2 = 5$ por lo que el punto en el cual se traza el plano tangente es el $P(3, -1, 5)$.

Por otra parte:
$z_x = 2xy + 2 \rightarrow z_x(P) = -6 + 2 = -4$
$z_y = x^2 - 6 \rightarrow z_y(P) = 9 - 6 = 3.$
Por lo tanto, la ecuación del plano tangente a la superficie z en el punto $P(3, -1, 5)$ de la misma, según la fórmula (9.5) es
$z - 5 = -4(x - 3) + 3(y + 1) \rightarrow 4x - 3y + z - 20 = 0$

9.1.4. Recta normal a una superficie

Se dice que la recta r es normal a la superficie $z = z(x, y)$ en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ de la misma si es perpendicular al plano tangente a la superficie en dicho punto.

Recordemos que el vector (A, B, C) es ortogonal al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ por lo que un vector de dirección de la recta normal es un vector ortogonal al plano tangente $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P (x - x_0) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P (y - y_0) - (z - z_0) = 0$, es decir, $\mathbf{u} = (z_x(P), z_y(P), -1)$.

En consecuencia, la ecuación continua de la recta normal a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ de la misma es

$$\frac{x - x_0}{z_x(P)} = \frac{y - y_0}{z_y(P)} = \frac{z - z_0}{-1} \tag{9.6}$$

Ejemplo 9.8 *Obtener la ecuación de la recta normal a la superficie* $z = \frac{x-2y}{x^2+y^2}$ *en el punto* $P(1, -1, \frac{3}{2})$

Debemos hallar las derivadas parciales de z en el punto P:

$$\begin{aligned} z_x &= \frac{-x^2 + y^2 + 4xy}{(x^2 + y^2)^2} \rightarrow z_x(P) = \frac{-4}{4} = -1 \\ z_y &= \frac{-2x^2 + 2y^2 - 2xy}{(x^2 + y^2)^2} \rightarrow z_y(P) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación continua de la recta normal a z en el punto P es

$$\frac{x - 1}{-1} = \frac{y + 1}{\frac{1}{2}} = \frac{z - \frac{3}{2}}{-1}$$

9.1.5. Diferencial de una función de dos variables

Se llama diferencial total (o simplemente diferencial) de la función $f(x, y)$ a la expresión

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \tag{9.7}$$

Ejemplo 9.9 *Hallar la diferencial de la función* $f(x,y) = e^{x^2y}\operatorname{sen}(x-y)$

Hallamos las derivadas parciales de primer orden y sustituimos en la ecuación (9.7):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 2xye^{x^2y}\operatorname{sen}(x-y) + e^{x^2y}cos(x-y)\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= x^2e^{x^2y}\operatorname{sen}(x-y) - e^{x^2y}cos(x-y) \rightarrow\\
\rightarrow df &= [2xye^{x^2y}\operatorname{sen}(x-y) + e^{x^2y}cos(x-y)]dx +\\
&+ [x^2e^{x^2y}\operatorname{sen}(x-y) - e^{x^2y}cos(x-y)]dy
\end{aligned}$$

Ejemplo 9.10 *Hallar la diferencial de* $z = \ln(x^2+y^2) - \sqrt{x^2+y^2}$ *en el punto* $x = 2,\ y = 1$

Al igual que en el ejemplo anterior:

$$\begin{aligned}
z_x &= \frac{2x}{x^2+y^2} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{2x - x\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} \rightarrow (z_x)_P = \frac{4-2\sqrt{5}}{5}\\
z_y &= \frac{2y}{x^2+y^2} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{2y - y\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} \rightarrow (z_y)_P = \frac{2-\sqrt{5}}{5}\\
dz &= \frac{4-2\sqrt{5}}{5}dx + \frac{2-\sqrt{5}}{5}dy
\end{aligned}$$

9.1.6. Ejercicios resueltos

1. *Hallar las derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones:*

   a) $z(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$

   Sus dos derivadas parciales de primer orden son:

$$\begin{aligned} z_x &= \frac{(x-y)-(x+y)}{(x-y)^2} = \frac{-2y}{(x-y)^2} \\ z_y &= \frac{(x-y)+(x+y)}{(x-y)^2} = \frac{2x}{(x-y)^2} \end{aligned}$$

   b) $u(x,y,z) = \cos^2(x-2y+3z)\ln(xyz)$

   Sus tres derivadas parciales de primer orden son:

$$\begin{aligned} u_x &= 2\cos(x-2y+3z)(-\operatorname{sen}(x-2y+3z))\ln(xyz) + \\ &+ \cos^2(x-2y+3z)\frac{yz}{xyz} = \\ &= -\operatorname{sen}2(x-2y+3z)\ln(xyz) + \cos^2(x-2y+3z)\frac{1}{x} \\ u_y &= 2\cos(x-2y+3z)(2\operatorname{sen}(x-2y+3z))\ln(xyz) + \\ &+ \cos^2(x-2y+3z)\frac{xz}{xyz} = \\ &= 2\operatorname{sen}2(x-2y+3z)\ln(xyz) + \cos^2(x-2y+3z)\frac{1}{y} \\ u_z &= 2\cos(x-2y+3z)(-3\operatorname{sen}(x-2y+3z))\ln(xyz) + \\ &+ \cos^2(x-2y+3z)\frac{xy}{xyz} = \\ &= -3\operatorname{sen}2(x^2y+3z)\ln(xyz) + \cos^2(x-2y+3z)\frac{1}{z} \end{aligned}$$

   c) $v(x,t) = \sqrt{x^2+t^2}\operatorname{sen}(x\sqrt[3]{t})$

   Sus dos derivadas parciales de primer orden son:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{x}{\sqrt{x^2+t^2}}\operatorname{sen}(x\sqrt[3]{t}) + \sqrt{x^2+t^2}\cos(x\sqrt[3]{t})\sqrt[3]{t} \\ v_t &= \frac{t}{\sqrt{x^2+t^2}}\operatorname{sen}(x\sqrt[3]{t}) + \sqrt{x^2+t^2}\cos(x\sqrt[3]{t})\frac{x}{3\sqrt[3]{t^2}} \end{aligned}$$

d) $z(u,v) = e^{uv}(\operatorname{sen} u + \cos v)$

Sus dos derivadas parciales de primer orden son:

$$\begin{aligned} z_u &= ve^{uv}(\operatorname{sen} u + \cos v) + e^{uv}\cos u \\ z_v &= ue^{uv}(\operatorname{sen} u + \cos v) - e^{uv}\operatorname{sen} v \end{aligned}$$

2. *Hallar la ecuación del plano tangente a* $z = e^{x^3+y^2}$ *en el punto* $(-1, 1, 1)$

   Hallamos las derivadas parciales de primer orden en el punto P:

$$\begin{aligned} z_x &= 3x^2e^{x^3+y^2} \to z_x(P) = 3 \\ z_y &= 2ye^{x^3+y^2} \to z_x(P) = 2 \end{aligned}$$

   Por lo tanto, la ecuación del plano tangente en el punto P es
   $z - 1 = 3(x+1) + 2(y-1) \to 3x + 2y - z + 2 = 0$

3. *Ecuación del plano tangente a la superficie* $z = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{xy}{1+x^2}\right)$ *en el punto de coordenadas* $x = 1$, $y = 2$

   Hallamos la tercera coordenada, $z_0 = \operatorname{arc\,tg}\frac{2}{2} = \frac{\pi}{4}$, por lo que el punto de la superficie en el que se desea trazar el plano tangente es el $P(1, 2, \frac{\pi}{4})$.

   Además,

$$\begin{aligned} z_x &= \frac{1}{1+\left(\frac{xy}{1+x^2}\right)^2}\frac{y(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \to z_x(P) = 0 \\ z_y &= \frac{1}{1+\left(\frac{xy}{1+x^2}\right)^2}\frac{x}{1+x^2} \to z_y(P) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

   por lo que la ecuación del plano tangente es $z - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{4}(y-2)$

4. *Ecuación de la recta normal a la superficie* $z = \dfrac{x^2y}{\operatorname{sen} y}$ *en el punto de coordenadas* $x = 1$, $y = \frac{\pi}{2}$

Para aplicar la fórmula (9.6) se necesita hallar la tercera coordenada del punto intersección y las derivadas parciales de z en el mismo.

En este caso $z_0 = \frac{\pi/2}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$ por lo que $P(1, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Además

$$\begin{aligned} z_x &= \frac{2xy}{\operatorname{sen} y} \to z_x(P) = \frac{2\pi/2}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}} = \pi \\ z_y &= \frac{x^2 \operatorname{sen} y - x^2 y \cos y}{\operatorname{sen}^2 y} \to z_y(P) = \frac{1-0}{1} = 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación continua de la recta normal a la superficie z en el punto P es

$$\frac{x-1}{\pi} = \frac{y-\frac{\pi}{2}}{1} = \frac{z-\frac{\pi}{2}}{-1}$$

5. *Hallar la diferencial de las siguientes funciones en los puntos que se indica:*

   a) $z = \dfrac{x+y}{x^2+y}$ en el punto $P(-1,1,0)$

   Teniendo en cuenta que la diferencial de una función de dos variables viene expresada mediante la fórmula $dz = z_x dx + z_y dy$ basta hallar las derivadas parciales de la función dada y sustituir en esta última expresión.

$$\begin{aligned} z_x &= \frac{-x^2+y-2xy}{(x^2+y)^2} \to (z_x)_P = \frac{1}{2} \\ z_y &= \frac{x^2-x}{(x^2+y)^2} \to (z_y)_P = \frac{1}{2} \\ &\to \ dz = \frac{1}{2}dx + \frac{1}{2}dy \end{aligned}$$

   b) $z = e^{x-y}(x^2+y^2)$ en $P(1,1,2)$

   Al igual que en el ejercicio anterior

$$\begin{aligned} z_x &= e^{x-y}(x^2+y^2+2x) \to (z_x)_P = 4 \\ z_y &= e^{x-y}(-x^2-y^2+2y) \to (z_y)_P = 0 \\ dz &= 4dx \end{aligned}$$

c) $u = \sqrt{x + 2y^2 + 3z^3}$ en $P(2, 1, 0, 2)$

En este caso, es $du = u_x dx + u_y dy + u_z dz$ por lo que

$$\begin{aligned}
u_x &= \frac{1}{2\sqrt{x + 2y^2 + 3z^3}} \to (u_x)_P = \frac{1}{4} \\
u_y &= \frac{4y}{2\sqrt{x + 2y^2 + 3z^3}} \to (u_y)_P = 1 \\
u_z &= \frac{9z^2}{2\sqrt{x + 2y^2 + 3z^3}} \to (u_z)_P = 0 \\
du &= \frac{1}{4}dx + dy
\end{aligned}$$

d) $f(x, y) = \ln(x + y + \sqrt{1 + (x + y)^2})$ en $x = 1$, $y = -1$

De forma semejante a los casos anteriores, es $df = f_x dx + f_y dy$ por lo que

$$\begin{aligned}
f_x &= \frac{1}{x + y + \sqrt{1 + (x + y)^2}} \left(1 + \frac{x + y}{\sqrt{1 + (x + y)^2}}\right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 + (x + y)^2}} \to (f_x)_P = 1 \\
f_y &= \frac{1}{x + y + \sqrt{1 + (x + y)^2}} \left(1 + \frac{x + y}{\sqrt{1 + (x + y)^2}}\right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 + (x + y)^2}} \to (f_y)_P = 1 \\
df &= dx + dy
\end{aligned}$$

e) $\rho(\alpha, \beta) = \alpha^\beta$ en $\alpha = 2,\ \beta = 1$

En este caso es $d\rho = \rho_\alpha d\alpha + \rho_\beta d\beta$ por lo que

$$\begin{aligned}
\rho_\alpha &= \beta\alpha^{\beta-1} \to (\rho_\alpha)_P = 1 \\
\rho_\beta &= \alpha^\beta \ln \alpha \to (\rho_\beta)_P = 2\ln 2 \\
d\rho &= d\alpha + 2\ln 2 d\beta
\end{aligned}$$

9.2. GRADIENTE DE UNA FUNCIÓN ESCALAR

Se llama gradiente de la función $z = z(x, y)$ a la función vectorial
$\overrightarrow{grad(z)} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\vec{j} = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$

Evidentemente, el gradiente de la función $f(x, y, z)$ es $\overrightarrow{grad\ f} = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}\right)$

El vector gradiente $\mathbf{grad}(z)$ también se indica en la forma $\nabla(z)$ e incluso, si no hay posibilidad de error, en la forma ∇z.

Ejemplo 9.11 *Hallar el gradiente de la función $z = xe^y - 3y + 2$ en el punto $P(4, 0)$*

Las derivadas parciales de la función z son $z_x = e^y,\ \ z_y = xe^y - 3$ por lo que $\overrightarrow{grad(z)} = e^y\mathbf{i} + (xe^y - 3)\mathbf{j} = (e^y, xe^y - 3)$.

Particularizando para $x = 4$, e $y = 0$ se obtiene el gradiente de la función z en el punto $P(4, 0)$: $(\nabla z)_P = (1, 1)$

9.2.1. Derivada direccional

Supongamos que una dirección en el plano está determinada por el vector unitario $\vec{u} = (u_1, u_2)$. Se llama *derivada direccional* de la función $z = f(x, y)$ en el punto P en dirección $\vec{u}$ al producto escalar del vector gradiente de la función z en este punto por este vector unitario:

$$\mathbf{grad}(z) \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial z}{\partial x}u_1 + \frac{\partial z}{\partial y}u_2 = z'_d$$

Ejemplo 9.12 *Hallar la derivada de la función $z = \dfrac{2x + 3y}{x^2 + y^2}$ en el punto $(-1, 1, \frac{1}{2})$ en dirección del vector $(-1, 2)$*

El gradiente de la función dada en el punto P es

$$\begin{aligned}
\mathbf{grad}(z)_P &= \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)_P \\
&= \left(\frac{-2x^2+2y^2-6xy}{(x^2+y^2)^2}, \frac{3x^2-3y^2-4xy}{(x^2+y^2)^2}\right)_P = \left(\frac{3}{2}, 1\right)
\end{aligned}$$

El vector unitario en la dirección dada es el $\mathbf{u} = (\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$ por lo que la derivada direccional es $z'_\alpha = \left(\frac{3}{2}, 1\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{-3}{2\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}$

9.2.2. Curvas de nivel

Se llaman curvas de nivel de la superficie $z = f(x, y)$ a la curva intersección de esta superficie con el plano horizontal $z = C$, donde, evidentemente, C es una constante indeterminada. En consecuencia, la ecuación de un curva de nivel es $f(x, y) = C$.

Igualmente, las curvas de nivel de la función $u = f(x, y, z)$ son las curvas alabeadas $f(x, y, z) = C$.

Ejemplo 9.13 *Indicar la naturaleza de las curvas de nivel del paraboloide elíptico* $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$

Haciendo $z = C$ se obtiene que las curvas de nivel de esta superficie son el conjunto de elipses $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = C$.

Si se desea hallar en particular la curva de nivel que pasa por el punto de coordenadas $x = 1$, $y = -2$, basta sustituir estos valores en la última ecuación obteniendo $C = \frac{1}{4} + \frac{4}{9} = \frac{25}{36}$ con lo que resulta la elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = \frac{25}{36}$

Ejemplo 9.14 *Indicar la naturaleza de las curvas de nivel de la campana de Gauss* $z = e^{-(x^2+y^2)}$

$z = C \to e^{-(x^2+y^2)} = C \to -(x^2+y^2) = \ln C \to x^2 + y^2 = \ln(\frac{1}{C})$: las curvas de nivel son circunferencias de centro el origen y radio $\ln(\frac{1}{C})$

Ejemplo 9.15 *Hallar las curvas de nivel de la superficie*
$36z = 4x^2 + 9y^2 - 16x + 54y + 97$

Se hace $z = C$ y se agrupan los términos del segundo miembro en la forma

$$\begin{aligned} & 4(x^2 - 4x) + 9(y^2 + 6y) + 97 = 36C \\ \rightarrow\ & 4(x-2)^2 - 16 + 9(y+3)^2 - 81 + 97 = 36C \\ \rightarrow\ & \frac{(x-2)^2}{9C} + \frac{(y+3)^2}{4C} = 1 \end{aligned}$$

Las curvas de nivel son elipses de centro $(2, -3)$ y semiejes $3\sqrt{C},\ 2\sqrt{C}$ con $C > 0$. Variando C se obtiene el haz de elipses.

9.2.3. Relación entre el gradiente de una función y las curvas de nivel

Teorema 9.1 *El gradiente de una función $z = z(x, y)$ en un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ indica la dirección normal a la curva de nivel que pasa por este punto.*

Demostración. Sea $z = C$ la curva de nivel que pasa por el punto P. Entonces $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = 0$ en todo punto de la curva por lo que, dividiendo por dx resulta $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dx} = 0 \rightarrow \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y}y' = 0$. Pero este sumando no es más que el producto escalar de los vectores $\overrightarrow{grad\ z} = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$ y $(1, y')$. Y teniendo en cuenta que $(1, y')$ es el vector tangente a la curva de nivel en el punto P, esta igualdad establece que el producto escalar de los vectores $\overrightarrow{gradz}$ y $(1, y')$ es nulo por lo que ambos vectores son ortogonales.

Por lo tanto, el vector gradiente de una función en un punto es ortogonal a la rectas tangente a la curva de nivel en ese punto y señala la dirección de máxima pendiente de la superficie en dicho punto. La magnitud de dicha pendiente la indica el módulo del vector gradiente.

Ejemplo 9.16 *Hallar la dirección de máxima pendiente de la superficie* $z = x^2y - 3x^2 + 4y - 3$ *en el punto de coordenadas* $x = 2, \;\; y = -1$

Basta hallar el vector gradiente de z en el punto $P(2, -1, -21)$:
$z_x = 2xy - 6x \to (z_x)_P = -16$
$z_y = x^2 + 4 \to (z_y)_P = 8$
Luego $\mathbf{grad}(z)_P = (-16, 8)$ indica la dirección de máxima pendiente de la función z en el punto $(2, -1, -21)$. Para hallar el ángulo que el vector gradiente forma con el eje X, basta tener en cuenta que
$\tan\alpha = \frac{u_y}{u_x} = \frac{8}{-16} = -\frac{1}{2} \to \alpha = \arctan(-0{,}5) = 156^0 23'$. La pendiente siempre debe estar comprendida entre 0 y 180 grados.

9.2.4. Ejercicios resueltos

1. *Indicar la naturaleza de las curvas de nivel de la superficie* $z = \frac{\sqrt{4y+3}}{2-x}$

   Haciendo $z = C$, elevando al cuadrado y eliminando el denominador resulta
   $\frac{\sqrt{4y+3}}{2-x} = C \to \frac{4y+3}{(2-x)^2} = C^2 \to 4y + 3 = C^2(2-x)^2 \to$
   $y = \frac{1}{4}(C^2(2-x)^2 - 3)$: las curvas de nivel son parábolas convexas de vértice $(2, -3/4)$

2. *Indicar la naturaleza de las curvas de nivel de la superficie*
   $f(x, y) = \ln(2x^2 + 3y - 1)$

   $\ln(2x^2 + 3y - 1) = C \to 2x2 + 3y - 1 = e^C \to y = \frac{1}{3}(-2x^2 + e^C + 1)$ por lo que se trata de parábolas cóncavas de vértices en $\left(0, \frac{1}{3}(e^C + 1)\right)$.

3. *Hallar el gradiente de la función* $f(x, y) = \dfrac{x}{y}e^{xy}$ *en el punto* $P(2, -1)$

   Las componentes del vector gradiente son las derivadas parciales de la función, calculadas en el punto P. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= xe^{xy} + \frac{1}{y}e^{xy} \to \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{(2,-1)} = e^{-2} \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{x^2}{y}e^{xy} - \frac{x}{y^2}e^{xy} \to \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{(2,-1)} = -6e^{-2}
\end{aligned}$$

   Luego, $\mathbf{grad}(z)_P = (e^{-2}, -6e^{-2})$

4. *Hallar el gradiente de la función* $f(x, y, z) = \dfrac{x + 2y + 3z}{x^2 + y^2 + z^2}$ *en el punto* $P(3, 2, 1)$

En este caso, es

$$
\begin{aligned}
\mathbf{grad}(f)_P &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)_P \\
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{-x^2+y^2+z^2-4xy-6xz}{(x^2+y^2+z^2)^2} \rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_P = \frac{-46}{196} \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{2x^2-2y^2+z^2-2xy-6yz}{(x^2+y^2+z^2)^2} \rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_P = \frac{-13}{196} \\
\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{3x^2+3y^2-3z^2-2xz-4yz}{(x^2+y^2+z^2)^2} \rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_P = \frac{22}{196} \\
\mathbf{grad}(f)_P &= \left(\frac{-46}{196}, \frac{-13}{196}, \frac{22}{196}\right)
\end{aligned}
$$

5. *Hallar la derivada de la función* $z = \operatorname{sen}(x-y)$ *en el punto* $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$ *en dirección paralela a la recta* $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3}$

   La derivada direccional de la función z en el punto P es

   $z'_\alpha = \mathbf{grad}(z)_P \cdot \mathbf{u}$ siendo $\mathbf{u}$ un vector unitario direccional de la recta.

   Entonces,

   $\frac{\partial z}{\partial x} = \cos(x-y) \rightarrow \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$

   $\frac{\partial z}{\partial y} = -\cos(x-y) \rightarrow \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P = -\cos(\pi/4) = -\sqrt{2}/2$

   Por otra parte, un vector direccional de la recta es el $(2,3)$, de módulo $\sqrt{13}$ por lo que $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{13}}(2,3)$.

   Por lo tanto, la derivada direccional es

   $z'_\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1,-1)\dfrac{1}{\sqrt{13}}(2,3) = \dfrac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{13}} = \dfrac{-1}{\sqrt{26}}$

6. *Hallar la derivada de la función* $z = e^{xy}\operatorname{sen}(xy)$ *en el punto* $(\pi/2, 1/2)$*, en dirección del vector* $(-3,4)$

Hallamos las derivadas parciales en el punto P:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= ye^{xy}\operatorname{sen}(xy) + e^{xy}y\cos(xy) \rightarrow \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P = \frac{e^{\pi/4}}{\sqrt{2}} \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= xe^{xy}\operatorname{sen}(xy) + e^{xy}x\cos(xy) \rightarrow \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P = \pi\frac{e^{\pi/4}}{\sqrt{2}} \\
&\rightarrow \ \mathbf{grad}(z) = \frac{e^{\pi/4}}{\sqrt{2}}(1,\pi)
\end{aligned}$$

El vector unitario es el $\mathbf{u} = (\frac{-3}{5}, \frac{4}{5})$, por lo que la derivada direccional de la función z en el punto P es

$$z'_\alpha = \frac{e^{\pi/4}}{\sqrt{2}}(1,\pi)\frac{1}{5}(-3,4) = \frac{e^{\pi/4}}{5\sqrt{2}}(4\pi - 3) = 2{,}97$$

7. *Hallar la derivada de la función* $u = \operatorname{arc\,sen}\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}$ *en el punto* $P(-1,1,1)$ *en dirección al punto* $Q(1,2,3)$

La fórmula de la derivada direccional es la indicada anteriormente, aunque los vectores tienen tres componentes:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2+z^2}}}\frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}} \rightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_P = 1 \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2+z^2}}}\frac{-xy}{\sqrt{(y^2+z^2)^3}} \rightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_P = \frac{1}{2} \\
\frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2+z^2}}}\frac{-xz}{\sqrt{(y^2+z^2)^3}} \rightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_P = \frac{1}{2} \\
\mathbf{grad}(z)_P &= (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})
\end{aligned}$$

Por otra parte, $\mathbf{PQ} = (2,1,2) \rightarrow \mathbf{u} = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.
Luego, $u'_\alpha = \frac{1}{2}(2,1,1)\frac{1}{3}(2,1,2) = \frac{7}{6}$

8. *Hallar la dirección de máxima pendiente de la superficie* $z = e^{-x^2-y^2}$ *en el punto* $P(1,-1)$

La dirección de máxima pendiente de una superficie en un punto, la indica el gradiente de la función en dicho punto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -2xe^{-x^2-y^2} \rightarrow \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P = -2e^{-2} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -2ye^{-x^2-y^2} \rightarrow \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P = 2e^{-2} \end{aligned}$$

Luego, la dirección de máxima pendiente en dicho punto la indica el vector $\mathbf{u} = (-2e^{-2}, 2e^{-2}) \equiv (-1,1)$ El ángulo que forma con el eje X es $\tan\alpha = \frac{1}{-1} = -1 \rightarrow \alpha = 135^0$

9.3. DERIVADAS PARCIALES DE ORDEN SUPERIOR

En general, las derivadas parciales de la función $z = f(x, y)$ son también funciones de x e y por lo que también podrán ser derivadas con respecto a las variables x e y. Las derivadas así obtenidas se llaman derivadas parciales de segundo orden de la función $z(x, y)$.

La función $z = z(x, y)$ posee cuatro derivadas parciales de segundo orden que son las siguientes:

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$: se deriva z con respecto a x dos veces

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$: se deriva z con respecto a x y el resultado con respecto a y

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$: se deriva z con respecto a y y el resultado con respecto a x

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$: se deriva z con respecto a y dos veces

Estas derivadas también pueden indicarse en la forma $z_{xx},\ z_{yx},\ z_{xy},\ z_{yy}$, respectivamente.

A su vez las funciones así obtenidas pueden derivarse nuevamente con respecto a x e y, obteniéndose ocho derivadas parciales de tercer orden, etc.

Ejemplo 9.17 *Hallar las derivadas parciales de segundo orden de la función* $z = e^{xy^2}$

Se halla en primer lugar las derivadas parciales de primer orden $z_x,\ z_y$ y luego se deriva éstas nuevamente con respecto a x e y obteniéndose

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= y^2 e^{xy^2} \\
&\to \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial\ (y^2 e^{xy^2})}{\partial x} = y^4 e^{xy^2} \\
&\quad\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial\ (y^2 e^{xy^2})}{\partial y} = e^{xy^2}(2y + 2xy^3) \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= 2xye^{xy^2} \\
&\to \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial(2xye^{xy^2})}{\partial x} = 2ye^{xy^2}(1 + xy^2) \\
&\quad\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial(2xye^{xy^2})}{\partial y} = 2xe^{xy^2}(1 + 2xy^2)
\end{aligned}
$$

En este ejemplo se comprueba que $x_{yx} = z_{xy}$ por lo que se podría preguntar si esta conmutatividad de la derivación se verifica siempre o no.

Admitamos sin demostración el siguiente teorema.

9.3.1. Teorema de Schwarz

Sea la función $z = z(x, y)$. Si las funciones $z,\ z_x,\ z_y,\ z_{xy},\ z_{yx}$ son continuas en un dominio D, entonces se verifica la igualdad de las derivadas cruzadas en todo punto del dominio: $z_{yx} = z_{xy}$

En la práctica, lo que este teorema establece es que para hallar la segunda derivada de una función con respecto a dos variables, no importa el orden en el cual se efectúe la derivación.

Ejemplo 9.18 *Si $z = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ hallar z_{xy}*

Dado que es indiferente el orden en el cual se hallen las segundas derivadas parciales, hallaremos primero la derivada de z con respecto a x y luego la derivada de ésta con respecto a y:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{2x(x^2+y^2)-(x^2-y^2)2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}\right) \\
&= \frac{8xy(x^2+y^2)-4xy^2\cdot 2\cdot 2y}{(x^2+y^2)^3} = \frac{8x^3y-8xy^3}{(x^2+y^2)^3}
\end{aligned}$$

Ejemplo 9.19 *Hallar las derivadas parciales de segundo orden de la función* $z = \operatorname{sen}(x+\cos y)$

Hay tres derivadas segundas

$$\begin{aligned}
z_x &= \cos(x+\cos y) \to \begin{cases} z_{xx} = -\operatorname{sen}(x+\cos y) \\ z_{yx} = \operatorname{sen}(x+\cos y)\operatorname{sen} y \end{cases} \\
z_y &= -\cos(x+\cos y)\operatorname{sen} y \\
&\to \; z_{yy} = -\operatorname{sen}(x+\cos y)\operatorname{sen}^2 y - \cos(x+\cos y)\cos y
\end{aligned}$$

Ejemplo 9.20 *Si* $z = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$, *hallar* z_{yx}

Derivamos la función dada con respecto a x y luego con respecto a y (también puede hacerse al revés):

$$\begin{aligned}
z_x &= \frac{-x^2+y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2};\; z_{yx} = \frac{\partial z_x}{\partial y} \\
\to z_{yx} &= \frac{(2y-2x)(x^2+y^2)-(-x^2+y^2-2xy)2\cdot 2y}{(x^2+y^2)^3} \\
&= \frac{6x^2y-2y^3-2x^3+6xy^2}{(x^2+y^2)^3}
\end{aligned}$$

9.3.2. Ejercicios resueltos

1. *Si* $z = \ln \operatorname{tg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$, *hallar* z_{xy}

   Derivamos esta función en primer lugar respecto a y y luego ésta con respecto a x: $z_y = \dfrac{1}{\operatorname{tg}(\frac{y}{x})} \dfrac{1}{\cos^2(\frac{y}{x})} \dfrac{1}{x} = \dfrac{2}{x \operatorname{sen}(\frac{2y}{x})} \to z_{xy} = \dfrac{-\operatorname{sen}(\frac{2y}{x}) + \frac{2y}{x}\cos(\frac{2y}{x})}{x^2 \operatorname{sen}^2(\frac{2y}{x})}$
   Tener en cuenta que $\operatorname{sen}\alpha \cos\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\alpha)$

2. *Si* $z = \sqrt{x^2+y^2}$ *hallar* $x^2 z_{xx} + xy\ z_{xy} + y^2 z_{yy}$

   Hallamos las dos derivadas parciales de primer orden y de éstas obtenemos las tres de segundo orden:

$$\begin{aligned} z_x &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \to \begin{cases} z_{xx} = \frac{y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \\ z_{yx} = \frac{-xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \end{cases} \\ z_y &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \to z_{yy} = \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \end{aligned}$$

   Por lo tanto, sustituyendo en la expresión dada, resulta

$$x^2 z_{xx} + xy\ z_{xy} + y^2 z_{yy} = \frac{x^2 y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$$

3. *Se dice que una función* $f(x,y)$ *es armónica si verifica que* $f_{xx}+f_{yy}=0$. *Comprobar que la función* $z = \ln(x^2+y^2) + \operatorname{arc\,tg}(\frac{y}{x})$ *es armónica*

   Hallemos las derivadas indicadas:

$$\begin{aligned} z_x &= \frac{2x-y}{x^2+y^2} \to z_{xx} = \frac{-2x^2+2y^2+2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ z_y &= \frac{x+2y}{x^2+y^2} \to z_{yy} = \frac{2x^2-2y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ &\to z_{xx}+z_{yy} = 0 \end{aligned}$$

9.4. EXTREMOS RELATIVOS

Los conceptos de máximo y mínimo de una función de varias variables son idénticos a los correspondientes a una función de una sola variable.

Definición 9.3 *Se dice que la función $f(x, y)$ posee un máximo (mínimo) absoluto en el punto (a, b) si $f(a, b)$ es mayor (menor) que el valor de la función en cualquier otro punto de su dominio de existencia.*

Si estos valores se consiguen sólo para los puntos de un entorno del (a, b) se dice que la función posee un máximo (mínimo) relativo en dicho punto. Los puntos máximos y mínimos de una función constituyen sus extremos. Estudiaremos sólo los extremos relativos de una función por ser los de mayor interés.

Teorema 9.2 Condiciones necesarias para la existencia de un extremo relativo
Sea $f(x, y)$ una función derivable en un dominio $D \subset \mathcal{R}^2$. Para que $f(x, y)$ posea un extremo relativo en el punto $(a, b) \in D$ es necesario que sus dos derivadas parciales de primer orden se anulen en este punto.

Este teorema es de fácil demostración puesto que, fijado $y = b$, la función $f(x, b)$ depende de una sola variable, x, por lo que si posee un extremo en (a, b) entonces su derivada con respecto a x se anula en él, es decir, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0$. Igual sucede para la función $f(a, y)$. Un punto en el cual se anulan las dos derivadas primeras se dice que es *crítico o estacionario*; en caso contrario, el punto se dice que es *regular*.

Ejemplo 9.21 *Averiguar si en los puntos $(1/3, -1/3)$ y $(3/4, 1/2)$ puede haber extremos relativos de la superficie $f(x, y) = x^2 - xy - x + y^3 + 5$.*

Basta averiguar si $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) = 2x - y - 1 \quad &\rightarrow \quad f_x(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} - 1 = 0 \\
& \quad f_x(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} - 1 = 0 \\
f_y(x,y) = -x + 3y^2 \quad &\rightarrow \quad f_y(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}) = -\frac{1}{3} + 3\frac{1}{9} = 0 \\
& \quad f_y(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}) = -\frac{3}{4} + 3\frac{1}{4} = 0
\end{aligned}$$

por lo que sí puede haber extremos en estos puntos.

Sin embargo, estas condiciones no son suficientes, ya que puede suceder que las derivadas primeras de $f(x,y)$ se anulen en un punto sin que en él exista un extremo. Los puntos extremos de una función están relcionados con el determinante funcional hessiano que se define a continuación.

9.4.1. Hessiano de una función

Se llama hessiano de la función $f(x,y)$ al determinante

$H(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$

De hecho, el hessiano de una función $f(x,y)$ no es más que el determinante jacobiano de sus derivadas parciales primeras $H(f(x,y)) = J\begin{pmatrix} f_x & f_y \\ x & y \end{pmatrix}$

Ejemplo 9.22 *Hallar en el punto* $(2,-1)$ *el hessiano de la función* $f(x,y) = x^2y - 2xy^2 + x^3 + y^4$.

Hallemos las derivadas parciales de primer orden $f_x = 2xy - 2y^2 + 3x^2$, $f_y = x^2 - 4xy + 4y^3$, y a continuación las de segundo orden en el punto indicado:

$f_{xx} = 2y + 6x \rightarrow f_{xx}(2,-1) = 10$

$f_{yx} = 2x - 4y \rightarrow f_{yx}(2,-1) = 8$
$f_{yy} = -4x + 12y^2 \rightarrow f_{yy}(2,-1) = 4$
Por lo tanto, el hessiano de la función en el punto indicado es
$H(2,-1) = \begin{vmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = -24$

Ejemplo 9.23 *Hallar el hessiano de la función* $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ *en el punto* $(1,-1)$

Hallamos las derivadas de segundo orden de la función
$f(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$:

$$\begin{aligned} f_x = \frac{x}{x^2+y^2} \rightarrow f_{xx} &= \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} \\ f_{yx} &= \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ f_y = \frac{y}{x^2+y^2} \rightarrow f_{yy} &= \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} H(x,y) &= \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} & \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} & \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{(x^2+y^2)^2} \\ &\rightarrow \quad H(1,-1) = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Teorema 9.3 Condiciones suficientes para la existencia de un extremo

Sea $(a,b) \in D$ *un punto del dominio de* $f(x,y)$ *tal que* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0$ *y* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$. *El punto* (a,b) *es crítico si las derivadas parciales de segundo orden de* $f(x,y)$ *son continuas en* (a,b).

1. *El hessiano en* (a,b) *es positivo. Entonces*

    a) *si* $f_{xx}(a,b) < 0$ *el punto* $(a,b,f(a,b))$ *es un máximo de la función*

b) *si* $f_{xx}(a,b) > 0$ *el punto* $(a,b,f(a,b))$ *es un mínimo*

2. *El hessiano en* (a,b) *es negativo. Entonces la superficie posee un punto de silla o de ensilladura en el mismo.*

Se dice que $(a,b,f(a,b))$ es un punto de silla de la función $f(x,y)$ si es un máximo en dirección a un eje (X o Y) mientras que es mínimo en dirección al otro (Y o X).

Ejemplo 9.24 *Estudiar los puntos críticos de la función* $f(x,y) = x^2 - xy - x + y^3 + 5$

Para hallar los extremos relativos de una función de dos variables seguiremos el siguiente proceso:

1. Se resuelve el sistema de ecuaciones $f_x = 0,\ f_y = 0$:
$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y - 1 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -x + 3y^2 = 0 \end{array}\right\} \to (\frac{3}{4},\ \frac{1}{2}),\ (\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3})$$
2. Se halla el hessiano de la función
$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y \end{array}\right\} \to H(x,y) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 6y \end{vmatrix} = 12y - 1$$
3. Se calcula el hessiano en los puntos críticos y, en caso de que sea positivo, se estudia el signo de f_{xx} en ellos :

   - $H(\frac{3}{4},\frac{1}{2}) = 6 - 1 = 5 > 0$. Y como $f_{xx}(\frac{3}{4},\frac{1}{2}) = 2 > 0$, la función posee un mínimo relativo en el punto $(\frac{3}{4},\frac{1}{2},\frac{73}{16})$.
   - $H(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}) = -5 < 0$ por lo que $(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{131}{27})$ es un punto de silla.

Ejemplo 9.25 *Estudiar los puntos críticos de la función* $f(x,y) = x^2 - 2xy^2 - 4x + 3y^4$.

Seguimos el proceso descrito en el ejemplo anterior:

1. Se resuelve el sistema de ecuaciones $f_x = 0,\ f_y = 0$:
$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y^2 - 4 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -4xy + 12y^3 = 0\end{array}\right\} \rightarrow (2,\ 0), (3,\ 1), (3,\ -1)$$

2. Se halla el hessiano de la función
$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4y \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4x + 36y^2\end{array}\right\} \rightarrow H(x,y) = \begin{vmatrix} 2 & -4y \\ -4y & -4x + 36y^2 \end{vmatrix} = -8x + 56y^2$$

3. Se halla el hessiano en los puntos $(2,0)$, $(3,1)$ y $(3,-1)$ y, en caso de que sea positivo, se estudia el signo de f_{xx} en ellos:
   - $H(2,0) = -16 \rightarrow$ el punto $(2,0,-4)$ es un punto de silla.
   - $H(3,1) = -24 + 56 = 32 > 0$. Y como $z_{xx}(3,1) = 2 > 0$, el punto $(3,1,-6)$ es un mínimo.
   - $H(3,-1) = -24 + 56 = 32 > 0$. Y como $z_{xx}(3,-1) = 2 > 0$, también es un mínimo el punto $(3,-1,-6)$.

Ejemplo 9.26 *Estudiar los puntos críticos de la función* $f(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2 + 1)$.

1. Hallamos las derivadas parciales de primer orden, las igualamos a cero y resolvemos el sistema:
$$\begin{aligned} f_x &= \frac{x}{x^2 + y^2 + 1} = 0 \rightarrow x = 0 \\ f_y &= \frac{y}{x^2 + y^2 + 1} = 0 \rightarrow y = 0 \end{aligned}$$

2. Hallamos las derivadas parciales segundas en el punto $(0,0)$:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \frac{-x^2+y^2+1}{(x^2+y^2+1)^2} \to f_{xx}(0,0)=1 \\ f_{yx} &= \frac{-2xy}{(x^2+y^2+1)^2} \to f_{yx}(0,0)=0 \\ f_{yy} &= \frac{x^2-y^2+1}{(x^2+y^2+1)^2} \to f_{yy}(0,0)=1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor del hessiano en este punto es

$$H(0,0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0. \text{ Y como } f_{xx}(0,0) = 1 > 0$$

el punto $(0,0,0)$ es un mínimo.

Ejemplo 9.27 *Estudiar los puntos críticos de la función* $f(x,y) = x^3 + y^3 - 12xy$.

Siguiendo el proceso anterior, se obtiene en primer lugar el sistema $f_x = 3x^2 - 12y = 0$, $f_y = 3y^2 - 12x = 0$ cuyas soluciones reales son $(0,0)$ y $(4,4)$.

Las derivadas parciales segundas son $f_{xx} = 6x$, $f_{yx} = -12$, $f_{yy} = 6y$ y sus valores en los puntos anteriores son : $f_{xx}(0,0) = 0$, $f_{yx}(0,0) = -12$, $f_{yy}(0,0) = 0$ por lo que el valor del hessiano en este punto es $H(0,0) = -144 < 0$ por lo que el origen $(0,0,0)$ es un punto de silla.

Para el segundo punto $(4,4)$, se obtiene que el valor del hessiano es $432 > 0$ por lo que, dado que $f_{xx}(4,4) = 24 > 0$, en este punto hay un mínimo de valor $z = -64$

9.4.2. Máximos y mínimos ligados

Muchos de los problemas de cálculo de los extremos relativos que se nos pueden plantear, imponen alguna condición a la función planteada estableciendo ciertas relaciones entre las variables.

Es decir, estas ecuaciones de condición o ligadura, indican que las variables de la función dada no son independientes entre sí sino que, de alguna forma, dependen unas de otras.

Este problema se conoce con el nombre de *extremos ligados*, en contraposición a los estudiados en el párrafo anterior que son considerados como *extremos libres*.

Para clarificar el tema, se propone el siguiente ejemplo. Es evidente que el punto máximo de la esfera $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$ (esfera de centro (1,2,3) y radio 5) es el $(1,2,8)$ mientras que el mínimo es el $(1,2,-2)$.

Supongamos ahora que lo que se plantea es hallar el valor máximo o mínimo de un curva dibujada sobre esta superficie esférica. Entonces el problema consiste en hallar los valores extremos de la función z de la esfera con la condición de que la proyección sobre el plano $z=0$ de la curva dibujada sobre la esfera sea nula, es decir, que $g(x,y)=0$. Por ejemplo: ¿cuál es el punto más alto de la circunferencia obtenida cortando la esfera enterior por un plano no horizontal?.

Sea $f(x,y)$ una función de la cual se desea hallar los extremos relativos con la condición de que las variables x e y estén ligadas entre sí mediante la ecuación $g(x,y)=0$ y supongamos que f y g son funciones diferenciables en el punto (a,b).

Teorema 9.4 Condición necesaria para la existencia de un extremo relativo condicionado.

Condición necesaria para que el punto (a,b) sea un extremo relativo de la función $f(x,y)$ si $g(a,b)=0$, es que el jacobiano de f y g con respecto a x e y en el punto (a,b) sea nulo.

Demostración. Si (a,b) es un extremo de la función $f(x,y)$ entonces $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ por lo que se verifica que $df=f_xdx+f_ydy=0$ en el punto (a,b).

Por ser $g(x,y)=0$, también es $dg=0$ en todo punto (x,y) y en particular en el punto (a,b), por lo que $dg=g_x dx+g_y dy=0$ en (a,b).
Condición para que el sistema formado por las ecuaciones $df=0$ y $dg=0$ sea compatible es que el determinante de los coeficientes de dx y dy sea nulo:

$$J(a,b)=\left|\begin{array}{cc} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{array}\right|_{(a,b)}=0$$

Desarrollando este jacobiano se obtiene $f_x g_y - f_y g_x = 0 \rightarrow \dfrac{f_x}{f_y}=\dfrac{g_x}{g_y}$ en en el punto (a,b).

Fácilmente se extiende el desarrollo anterior al caso de una función que posea más de dos variables.

El cálculo de los extremos relativos de una función sujeta a una o más condiciones se denomina *optimizar* dicha función.

9.4.3. Algoritmo 1 para el cálculo de extremos condicionados: Mtodo de sustitución

En caso de que de las n ecuaciones de condición sea posible expresar $n-1$ variables en función de la restante, se sustituye dichas incógnitas en la función dada con lo que el problema se reduce al cálculo de los extremos relativos de una función de una sola variable.

Ejemplo 9.28 *Hallar los extremos relativos de la función $f(x,y)=x^2y$ sabiendo que $x+y-1=0$*

Despejando y en la ecuación de condición, $y=-x+1$, y sustituyéndola en la función a optimizar $f(x,y)$ se obtiene la función de una sola variable $\phi(x)=x^2(1-x)$. Hallemos los extremos de esta función:
$\phi'(x)=2x-3x^2=0 \rightarrow x=0,\ x=2/3$ que sustituidos en la segunda derivada $\phi''(x)=2-6x$ dan $\phi''(0)=2>0 \rightarrow x=0$ es un mínimo y

$\phi''(2/3) = -2 < 0 \rightarrow x = 2/3$ es un máximo.
Por lo tanto, la función dada posee un mínimo relativo en el punto $(0, 1, 0)$ y un máximo relativo en $(2/3, 1/3, 4/27)$.

9.4.4. Algoritmo 2 para el cálculo de extremos condicionados: Método de los multiplicadores de Lagrange

En algunos casos no es posible expresar $n-1$ variables en función de la restante por lo que se debe buscar otro método que nos permita hallar los extremos condicionados.

El método de los multiplicadores de Lagrange consiste en introducir tantos parámetros como ecuaciones de restricción existan y que al ser eliminados del sistema formado por las ecuaciones de ligaduras y las ecuaciones en derivadas parciales, determinan los puntos en los que existe extremos de la función en estudio.

Estudiemos el problema para el caso de una función de dos variables con una ecuación de ligadura.

Sea $f(x, y)$ la función que se pretende optimizar con la condición de que $g(x, y) = 0$. Formamos la función $\phi(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$, siendo λ un parámetro a determinar, llamado *multiplicador de Lagrange*. Entonces es $\phi_x = f_x + \lambda g_x$, $\phi_y = f_y + \lambda g_y$, $\phi_\lambda = g(x, y) = 0$.
Si se elige λ de tal forma que las derivadas sean nulas, se obtiene el sistema de tres ecuaciones: $\left\{\begin{array}{l} \phi_x = f_x + \lambda g_x = 0 \\ \phi_y = f_y + \lambda g_y = 0 \\ \phi_\lambda = g(x, y) = 0 \end{array}\right\}$ cuyas incógnitas son x, y, λ.
Resolviendo este sistema se obtiene los valores de x e y que optimizan la función $f(x, y)$ con la condición de que $g(x, y) = 0$.

Para saber si en los puntos encontrados la función $f(x, y)$ posee un extremo se puede estudiar el signo de ϕ_{xx} en dichos puntos, o el signo de f_{xx} puesto que $g(x, y) = 0 \to \phi = f$. También se puede hacer por simple inspección sin más que tomar otro punto cualquiera que verifique que $g(x, y) = 0$ y se comprueba si $f(x, y)$ en dicho punto es menor (o mayor) que el valor encontrado en el punto singular que se estudia.

El método es fácilmente extensible al caso en que haya un número mayor de ecuaciones de condición, sin más que introducir tantos parámetros como condiciones.

Ejemplo 9.29 *Hallar los extremos relativos de la función* $z = x^2 + y^2$ *con la condición de que* $3x^2 + 4xy + 6y^2 - 6 = 0$. *Interpretar el resultado.*

El problema consiste en optimizar la función $f(x, y) = x^2+y^2$ con la condición (ecuación) de que $g(x, y) = 3x^2 + 4xy + 6y^2 - 6 = 0$.

1. Formamos la función
   $\phi(x, y) = f + \lambda g = x^2 + y^2 + \lambda(3x^2 + 4xy + 6y^2 - 6)$.

2. Hallamos las derivadas de primer orden de la función ϕ:
   $\phi_x = 2x + \lambda(6x + 4y)$, $\phi_y = 2y + \lambda(4x + 12y)$.

3. Se resuelve el sistema $\phi_x = 0$, $\phi_y = 0$ y se sustituye la solución (x, y) en $g(x, y) = 0$:
   $(1 + 3\lambda)x + 2\lambda y = 0$
   $2\lambda x + (1 + 6\lambda)y = 0$
   Este sistema homogéneo admite como primera solución la trivial, $x = y = 0$, la cual no es válida porque el punto $(0, 0)$ no verifica la condición $g(0, 0) = 0$.
   Para que admita otras soluciones distintas de la trivial, el determinante de los coeficientes ha de ser nulo:
   $$\begin{vmatrix} 1+3\lambda & 2\lambda \\ 2\lambda & 1+6\lambda \end{vmatrix} = 14\lambda^2 + 9\lambda + 1 = 0 \to \lambda = -1/2, \ \lambda = -1/7$$

a) Si $\lambda = -1/2$, entonces, sustituyendo en una ecuación del sistema se obtiene $-x - 2y = 0 \to x = -2y$, que sustituido en $g(x, y) = 0$ origina la ecuación $5y^2 - 3 = 0 \to y = \pm\sqrt{\frac{3}{5}} \to x = \mp 2\sqrt{\frac{3}{5}}$.
Sustituyendo ambos valores en $f(x, y)$ resulta $f = 3$

b) Si $\lambda = -1/7$, entonces $-\frac{2}{7}x + \frac{1}{7}y = 0 \to y = 2x \to 35x^2 - 6 = 0$ por lo que $x = \pm\sqrt{\frac{6}{35}} \to y = \pm 2\sqrt{\frac{6}{35}}$.
Sustituyendo en la función dada resulta el valor $6/7$, por lo que el máximo de z es 3 y se consigue en los cuatro primeros puntos, mientras que el mínimo es $6/7$ y se consigue en los cuatro últimos puntos.

Interpretación: dado que $d^2 = x^2 + y^2$ representa el cuadrado de la distancia desde el origen hasta un punto (x, y), estos resultados indican que la máxima distancia desde el origen a la elipse $g(x, y) = 0$ es 3 y la mínima distancia es $6/7$.

Ejemplo 9.30 *Hallar los extremos de la función* $u = x^2 + y^2 + z^2$ *con las condiciones* $x + y + z = 0$, $x - y - 2z - 3 = 0$.

Aplicaremos el método de los multiplicadores de Lagrange.
Sea $\phi = u + \lambda_1 f + \lambda_2 g$ por lo que
$\phi = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1(x + y + z) + \lambda_2(x - y - 2z - 3)$. Se obtiene así el sistema lineal homogéneo
$\phi_x = 2x + \lambda_1 + \lambda_2 = 0$
$\phi_y = 2y + \lambda_1 - \lambda_2 = 0$
$\phi_z = 2z + \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0$
Sumando las dos primeras ecuaciones resulta $\lambda_1 = -x - y$, $\lambda_2 = y - x$ que sustituidas en la tercera ecuación da $x - 3y + 2z = 0$ que junto con las ecuaciones $f = 0$ y $g = 0$ origina el nuevo sistema
$x + y + z = 0$

$x - y - 2z = 3$
$x - 3y + 2z = 0$
cuya solución es el punto $\left(\frac{15}{14}, \frac{-3}{14}, \frac{-6}{7}\right)$ que sustituido en la función u da el valor 27/14 que es un mínimo, ya que u no es más que el cuadrado de la distancia desde el origen a la intersección de los planos $f = 0$ y $g = 0$ (la máxima distancia sería infinito)

9.5. EJERCICIOS RESUELTOS

1. *Estudiar los puntos críticos de la función* $f(x,y) = x^2 - xy + 2y^2 - x - 3y + 6$

   a) Se resuelve el sistema de ecuaciones $f_x = 0,\ f_y = 0$:
   $$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y - 1 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -x + 4y - 3 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow x = y = 1$$

   b) Se halla el hessiano de la función
   $$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial xy \partial y} = -1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4 \end{array}\right\} \rightarrow H(x,y) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 7 > 0$$

   c) Como el hessiano es positivo para todos los valores de x e y, en el punto $(1,1,4)$ hay un extremo relativo y puesto que $f_{xx}(x,y) > 0$, en el punto $(1,1,4)$ hay un mínimo de la función.

2. Estudiar los puntos críticos de la función $f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{x^2 - y^2}$

   Hallamos las derivadas primeras y se resuelve el sistema $f_x = 0,\ f_y = 0$:
   $f_x = 2e^{x^2-y^2}(x^3 + xy^2 + x) \rightarrow x^3 + xy^2 + x = 0 \rightarrow x = 0,\ x^2 + y^2 + 1 = 0$
   $f_y = 2e^{x^2-y^2}(-y^3 - x^2y + y) \rightarrow -y^3 - x^2y + y = 0 \rightarrow y = 0,\ y^2 + x^2 - 1 = 0$
   Dado que $x^2 + y^2 + 1$ no puede ser cero, las soluciones son los puntos $A(0,0)$, $B(0,1)$ y $C(0,-1)$.
   Hallemos el hessiano de la función en cada uno de estos tres puntos singulares:

$$\begin{aligned}
H(0,0) &= \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0,\ f_{xx}(0,0) > 0 \rightarrow \\
&\rightarrow \text{ hay un mínimo en A} \\
H(0,1) &= \begin{vmatrix} \frac{2}{e}2 & \frac{2}{e}(-2) \\ \frac{2}{e}(-2) & \frac{2}{e}(-2) \end{vmatrix} = -\frac{32}{e^2} < 0 \rightarrow \\
&\rightarrow \text{ hay un punto de silla en B} \\
H(0,-1) &= \begin{vmatrix} \frac{2}{e}2 & \frac{2}{e}2 \\ \frac{2}{e}2 & \frac{2}{e}(-2) \end{vmatrix} = -\frac{32}{e^2} < 0 \rightarrow \\
&\rightarrow \text{ hay un punto de silla en C}
\end{aligned}$$

3. *Hallar el punto de la recta* $3x - 2y + 4 = 0$ *más cercano al* $(1, 4)$

   Sea $X(x, y)$ un punto de la recta. La distancia del punto $P(1, 4)$ al $X(x, y)$ es $d = \sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2}$.
   Sea $\phi(x, y) = d^2 + \lambda(3x - 2y + 4) = (x-1)^2 + (y-4)^2 + \lambda(3x - 2y + 4)$.
   Entonces
   $\dfrac{\partial \phi}{\partial x} = 2(x-1) + 3\lambda = 0 \rightarrow x = \dfrac{2 - 3\lambda}{2}$
   $\dfrac{\partial \phi}{\partial y} = 2(y-4) - 2\lambda = 0 \rightarrow y = 4 + \lambda$
   Sustituyendo estos valores en la ecuación de la recta:
   $3\left(\dfrac{2-3\lambda}{2}\right) - 2(4 + \lambda) + 4 = 0 \rightarrow \lambda = -\dfrac{2}{13}$ por lo que $x = \frac{16}{13}$, $y = \frac{50}{13}$
   siendo el punto buscado el $X(\frac{16}{13}, \frac{50}{13})$.

4. *Hallar el punto de la circunferencia* $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ *más cercano al origen. También el más lejano.*

   Sea $X(x, y)$ un punto de la circunferencia. La distancia entre X y el origen es $d = \sqrt{x^2 + y^2}$. Sea $\phi(x, y) = d^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12)$ $\rightarrow \phi(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12)$.

a) Se resuelve el sistema:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2x + 2\lambda x - 6\lambda = 0 \to x = \frac{3\lambda}{1+\lambda}$$
$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 2y + 2\lambda y + 4\lambda = 0 \to y = \frac{-2\lambda}{1+\lambda}$$

b) Se sustituyen estos valores en la ecuación de la circunferencia y se obtiene $\lambda = \dfrac{-5 \pm \sqrt{13}}{5}$.

- Para $\lambda = \dfrac{-5+\sqrt{13}}{5}$ es $X_1 = \left(\dfrac{-15+3\sqrt{13}}{\sqrt{13}}, \dfrac{10-2\sqrt{13}}{\sqrt{13}} \right)$
- Para $\lambda = \dfrac{-5-\sqrt{13}}{5}$ es $X_2 = \left(\dfrac{15+3\sqrt{13}}{\sqrt{13}}, \dfrac{10+2\sqrt{13}}{-\sqrt{13}} \right)$

c) Se halla el hessiano de la función:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2+2\lambda \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2+2\lambda \end{array}\right\} \to H(x,y) = \begin{vmatrix} 2+2\lambda & 0 \\ 0 & 2+2\lambda \end{vmatrix} = (2+2\lambda)^2 > 0$$

por lo que ambos puntos son extremos.

d) Hay que estudiar el signo de $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ en ambos puntos:

- Para $\lambda = \dfrac{-5+\sqrt{13}}{5}$ es $f_{xx}(X_1) = \frac{2\sqrt{13}}{5} > 0$ por lo que hay un mínimo en X_1
- Para $\lambda = \dfrac{-5-\sqrt{13}}{5}$ es $f_{xx}(X_2) = -\frac{2\sqrt{13}}{5} > 0$ por lo que hay un Máximo en X_2

9.5.1. Ejercicios resueltos

1. Hallar las derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones:

    a) $z(x,y) = e^{x+y}\operatorname{sen}(xy)$

    b) $f(\rho,\theta) = \rho^2 \operatorname{tg}\theta$

    c) $r(\rho,\theta) = \rho^2 \cos^4\theta$

    d) $z(x,y) = x^{xy}$

    e) $u(x,y) = x^2y^2 + \operatorname{sen}(\frac{x}{y})$

    f) $\rho(u,v) = \sqrt{u^2+v^2}e^x$

    g) $u(x,y,z) = e^{\frac{x}{y}} + e^{\frac{y}{z}}$

    h) $u(x,y,z) = 2^{xyz}\operatorname{tg}(x+y^2+z^3)$

2. Hallar las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal a las siguientes superficies en los puntos que se indican:

    a) $z = e^{xy(x^2+y^2)}$ en el punto $(1,-1)$

    b) $f(x,y) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$ en el punto $(0,-1)$

    c) $z(x,y) = \ln(x^2+y^2) - \sqrt{x^2+y^2}$ en el punto $(e,0)$

3. Comprobar que la función $f(x,y) = x^n \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right)$ es solución de la ecuación diferencial $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf$

4. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie
    $z = \dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ en el punto de coordenadas $x=1,\ \ y=-1$

5. Indicar la naturaleza de las curvas de nivel de la superficie
    $f(x,y) = \ln(2x^2+3y^2-4)$

6. Indicar la naturaleza de las curvas de nivel de la superficie
$f(x,y) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{2x^2+3y^2}{x^2-y^2+1}\right)$

7. Hallar la dirección de máxima pendiente en el punto $(2,-1,-23)$ de la superficie $z = x^2y - 3x^2 + 4y - 3$

8. Hallar el gradiente de la función $z(x,y) = x^2 \operatorname{sen} y + y^2 \cos x$

9. Hallar el gradiente de la función $u(x,y,z) = x^2y - 3yz\cos x + z^2 \cos z$

10. Si $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, hallar $x\ u_x + y\ u_y + z\ u_z$

11. Hallar las derivadas parciales de segundo orden de las funciones

    a) $z = x^2 \operatorname{sen} y$

    b) $z = xe^{y^2}$

    c) $z = \ln\left(x + y + \sqrt{1+(x+y)^2}\right)$

12. Si $u = z^2e^{xy^2}$, hallar u_{zyxx}

13. Si $z = \frac{x^2y^2}{x+y}$ hallar el valor de $x \cdot z_{xx} + y \cdot z_{yy}$

14. Hallar $z_{yxx}(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4})$ si $z = \operatorname{tg}(x+y)$

15. Hallar las derivadas parciales segundas de la función
$z = \ln(x^2+y^2)$ en el punto $P(2,1)$

16. Hallar los puntos críticos de la función
$f(x,y) = x^2 - 4xy + 3y^2 - 5x + 7$

17. Estudiar los puntos críticos de la función $f(x,y) = x^2 - 2xy^2 + 8y^2$

18. Estudiar los puntos críticos de $f(x,y) = \ln(2x^2 - 2xy + y^3 + 1)$

19. Hallar el punto del plano $x - 2y + 3z - 5 = 0$ más cercano al $(1,2,-2)$

20. Hallar las distancias mínima y máxima desde el origen a la elipse $x^2 + y^2 - xy - 1 = 0$

21. Hallar la mínima distancia del punto $(1, -1, 0)$ al paraboloide $z = x^2 + y^2$

RESPUESTAS:

1. *a*) $z_x = e^{x+y}[\operatorname{sen}(xy) + y\cos(xy)]$
   $z_y = e^{x+y}[\operatorname{sen}(xy) + x\cos(xy)]$

   b) $f_\rho = 2\rho \operatorname{tg}\theta,\ f_\theta = \rho^2(\operatorname{tg}^2\theta + 1)$

   c) $r_\rho = 2\rho\cos^4\theta,\ r_\theta = -4\rho^2\cos^3\theta \operatorname{sen}\theta$

   d) $z_x = xy \cdot x^{xy-1} + y \cdot x^{xy}\ln x,\ z_y = x \cdot x^{xy}\ln x$

   e) $u_x = 2xy^2 + \dfrac{\cos\frac{x}{y}}{y},\ u_y = 2x^2y - \dfrac{x}{y^2}\cos\dfrac{x}{y}$

   f) $\rho_u = u\dfrac{1}{\sqrt{(u^2+v^2)}}e^x,\ \rho_v = v\dfrac{1}{\sqrt{(u^2+v^2)}}e^x$

   g) $u_x = e^{\frac{x}{y}}\dfrac{1}{y},\ u_y = e^{\frac{x}{y}}\dfrac{-x}{y^2} + e^{\frac{y}{z}}\dfrac{1}{z},\ u_z = e^{\frac{x}{y}}\dfrac{-y}{z^2}$

   h) $u_x = 2^{xyz}\left(yz\ln 2\operatorname{tg}(x+y^2+z^3) + \dfrac{1}{cos^2(x+y^2+z^3)}\right)$
   $u_y = 2^{xyz}\left(zx\ln 2\operatorname{tg}(x+y^2+z^3) + \dfrac{2y}{cos^2(x+y^2+z^3)}\right)$
   $u_z = 2^{xyz}\left(xy\ln 2\operatorname{tg}(x+y^2+z^3) + \dfrac{3z^2}{cos^2(x+y^2+z^3)}\right)$

2. *a*) Plano tangente: $z - e^{-2} = -4e^{-2}(x-1) + 4e^{-2}(y+1)$
   Recta normal: $\frac{x-1}{-4e^{-2}} = \frac{y+1}{4e^{-2}} = \frac{z-e^{-2}}{-1}$

   b) Plano tangente: $z + \frac{\pi}{4} = x$
   Recta normal: $x = \frac{y+1}{0} = \frac{z+\frac{\pi}{4}}{-1}$

   c) Plano tangente: $z - (2-e) = (\frac{2}{e} - 1)(x-e)$
   Recta normal: $\frac{x-e}{\frac{2}{e}-1} = \frac{y}{0} = \frac{z-(2-e)}{-1}$

3. Hallamos las derivadas con respecto a x e y:
   $f_x = nx^{n-1}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x} - x^{n-2}y\dfrac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}$
   $f_y = x^{n-1}\dfrac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}$. Se sustituye en el primer miembro de la ecuación

propuesta
$nx^n \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right) - x^{n-1}y\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} + x^{n-1}\frac{y}{1+(\frac{y}{x})^2} = nf(x,y)$

4. $z = \sqrt{2}(x-1) + \sqrt{2}(y+1)$

5. $\frac{x^2}{\frac{e^C+4}{2}} + \frac{y^2}{\frac{e^C+4}{3}} = 1$: son elipses de centro el origen y semiejes de longitudes $\sqrt{\frac{e^C+4}{2}}$ y $\sqrt{\frac{e^C+4}{3}}$

6. $\frac{x^2}{\frac{m}{2-m}} - \frac{y^2}{\frac{m}{3+m}} = 1$: son hipérbolas de centro el origen y semiejes

   $a = \sqrt{\frac{m}{2-m}}, \;\; b = \sqrt{\frac{m}{3+m}}$ siendo $m = \operatorname{arc\,sen} C$

7. $\alpha = 153^0 26'$

8. $\mathbf{grad}(z) = (2x \operatorname{sen} y - y^2 \operatorname{sen} x, x^2 \cos y + 2y \cos x)$

9. $\mathbf{grad}(u) = (2xy + 3yz \operatorname{sen} x, x^2 - 3z \cos x,$
   $- 3y \cos x + 2z \cos z - z^2 \operatorname{sen} z)$

10. $xu_x + y\ u_y + z\ u_z = u$

11. *a*) $z_{xx} = 2 \operatorname{sen} y \qquad z_{yx} = 2x \cos y \qquad z_{yy} = -x^2 \operatorname{sen} y$

    b) $z_{xx} = 0 \qquad z_{yx} = 2ye^{y^2} \qquad z_{yy} = e^{y^2}(2x + 4xy^2)$

    c) $z_{xx} = z_{yx} = z_{yy} = -\frac{x+y}{\sqrt{(1+(x+y)^2)^3}}$

12. $u_{zyxx} = e^{xy^2}(8y^3z + 4xy^5z)$

13. $A = \frac{2xy(x^3+y^3)}{(x+y)^3}$

14. $z_{yxx}(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}) = 16$

15. $z_{xx}(P) = -\frac{6}{25} \qquad z_{yx}(P) = -\frac{8}{25} \qquad z_{yy}(P) = \frac{6}{25}$

16. $P(-\frac{15}{2}, -5, \frac{103}{4})$ es un punto silla.

17. El origen es un mínimo relativo y los puntos $(4, \pm 2, 4)$ son puntos silla.

18. $(0, 0, 0)$ es un punto de silla y $(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \ln \frac{53}{54})$ es un mínimo

19. $(2, 0, 1)$

20. Distancia mínima $\sqrt{2/3}$. Distancia Máxima $\sqrt{2}$

21. $d = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Capítulo 10

MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

Se ha dividido la parte dedicada al Cálculo Integral en dos capítulos. En el primero de ellos se estudia la integración indefinida, desarrollando distintos métodos de integración de funciones que, en general, dependen del tipo de función a integrar. No obstante, debemos indicar que algunos ejercicios pueden ser resueltos de formas distintas sin que se pueda decir que un método es mejor o peor que otro sino que, dependiendo de la función particular a integrar, en algunos casos es mejor un método determinado mientras que en otros casos es preferible usar otro distinto.

Y en el siguiente capítulo estudiaremos la integral definida de Cauchy-Riemann, sus propiedades y su aplicación a algunos problemas concretos como el cálculo de áreas en curvas planas, la longitud de un arco de curva y el volumen de una superficie de revolución.

10.1. INTRODUCCIÓN

10.1.1. Definición

De cursos anteriores sabemos que derivar una función $F(x)$ es hallar otra función $f(x)$ tal que $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$, donde la operación de derivar una función se ha de ajustar a ciertas normas y sabemos también que esta operación verifica propiedades que no hace al caso recordar en su totalidad. De entre estas propiedades destacamos la de linealidad que establece que la derivada de una suma de funciones es la suma de las derivadas de las mismas y que la derivada de una constante por una función es igual a la constante por la derivada de dicha función, es decir: $D(af(x)+bg(x)) = aD(f(x))+bD(g(x))$.

Definición 10.1 *Integrar una función $f(x)$ es hallar otra función $F(x)$ cuya derivada sea la función inicial $f(x)$*

La función que se integra, $f(x)$, se llama función integrando y la función hallada $F(x)$ se llama función primitiva o integral de $f(x)$. Por lo tanto la integración es la operación inversa de la derivación y se indica en la forma $\int f(x)dx = F(x)$.

Al igual que acontece con la derivada de una función que es una función única, la primitiva de una función también es única, salvo una constante llamada constante de integración. Es decir, que si $\int f(x)dx = F(x)$ y $\int f(x)dx = G(x)$ entonces $G(x) = F(x) + C$. Evidentemente, la razón es sencilla, puesto que si $D(F(x)) = f(x) \to D(F(x) + C) = f(x)$.

Esta integración se llama indefinida (se obtiene una función) para distinguirla de otra que veremos en el siguiente capítulo llamada definida (se obtiene un número).

10.1.2. Tabla de integrales inmediatas

Así como derivar una función puede ser un proceso más o menos laborioso pero generalmente sencillo, integrar una función suele ser una operación bastante más complicada que derivarla. De hecho, podemos decir que pocas funciones son integrables elementalmente y que aún las que lo son, suelen exigir un procedimiento específico para ellas.

Por regla general, el proceso de integración consiste en transformar el integrando en otra función cuya integral sea más sencilla de hallar que la anterior. Por esta razón es conveniente conocer la primitiva del mayor número posible de funciones. En cualquier caso, es necesario conocer cuando menos las integrales inmediatas que indicamos a continuación quedando bien entendido que otras integrales que aparecen en tablas más amplias pueden ser halladas a partir de éstas.

Tabla de integrales inmediatas

$$\int x^a\ dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \text{ para todo } a \in \mathcal{R} - \{-1\}$$
$$\int \frac{1}{x}\ dx = \ln x + C$$
$$\int a^x\ dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \Longrightarrow \int e^x\ dx = e^x + C$$
$$\int \operatorname{sen} x\ dx = -\cos x + C$$
$$\int \cos x\ dx = \operatorname{sen} x + C$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\ dx = \tan x + C$$
$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\ dx = -\cot x + C$$
$$\int \frac{1}{1+x^2}\ dx = \arctan x + C$$
$$\int \frac{1}{1-x^2}\ dx = \operatorname{arg\,tanh} x + C = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \operatorname{arc\,sen} x + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\ dx = \operatorname{arg\,senh} x + C = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\ dx = \operatorname{arg\,cosh} x + C = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + C$$

Esta tabla puede ser ampliada a criterio del lector con aquellas integrales de uso frecuente que le parezcan interesantes de memorizar.

De forma semejante a como dijimos al comienzo de este capítulo de que una propiedad fundamental del cálculo diferencial es la propiedad de linealidad, igualmente, la propiedad fundamental del Cálculo Integral es que la operación de integración verifica la propiedad lineal, es decir:
$\int (af(x) + bg(x))\ dx = a\int f(x)\ dx + b\int g(x)\ dx.$

Es fácil demostrar esta propiedad sin más que derivar ambos miembros de la igualdad y comprobando que se obtiene el mismo resultado.

Ejemplo 10.1 *Hallar* $\int \left(2x^3 - 4x^{-2} + 3sen\ x - \frac{4}{x}\right)\ dx$

Aplicando la propiedad lineal de la integración y teniendo en cuenta la tabla de integrales inmediatas, resulta

$$\begin{aligned} & \int \left(2x^3 - 4x^{-2} + 3sen\ x - \frac{4}{x}\right)\ dx = \\ = \ & 2\int x^3\ dx - 4\int x^{-2}\ dx + 3\int \operatorname{sen} x\ dx - 4\int \frac{1}{x}\ dx = \\ = \ & 2\frac{x^4}{4} - 4\frac{x^{-1}}{-1} - 3\cos x - 4\ln x + C = \frac{x^4}{2} + \frac{4}{x} - 3\cos x - 4\ln x + C \end{aligned}$$

A esta propiedad también se le llama *Integración por descomposición en sumandos.*

Una propiedad interesante puesto que simplifica mucho los cálculos es la siguiente.

Teorema 10.1 *Si* $\int f(x)\ dx = F(x)$ *entonces* $\int f(ax+b)\ dx = \frac{1}{a}F(ax+b)$

Demostración. Del concepto de integral indefinida se deduce que
$\int f(x)\ dx = F(x) \longleftrightarrow D[F(x)] = f(x)$, por lo que
$D[\frac{1}{a}F(ax+b)] = \frac{1}{a}af(ax+b) = f(ax+b)$.

Ejemplo 10.2 *Hallar* $\int \frac{dx}{2-3x}$

Teniendo en cuenta $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$, resulta que
$\int \frac{dx}{2-3x} = \frac{1}{-3}\ln(2-3x) + C$

Ejemplo 10.3 *Hallar* $\int \frac{dx}{cos^2(4x+5)}$

Dado que $\int \frac{dx}{cos^2 x} = \tan x + C$, entonces $\int \frac{dx}{cos^2(4x+5)} = \frac{1}{4}\tan(4x+5) + C$

10.1.3. Ejercicios resueltos

Aplicar las fórmulas de la tabla de integrales inmediatas y la propiedad lineal de la integral, para hallar las siguientes integrales:

1. $\displaystyle\int \left(2x^3 - 5x^2 + 4 + \frac{3}{x} - \frac{7}{x^2}\right)\, dx$

$$\begin{aligned} I &= \int \left(2x^3 - 5x^2 + 4 + \frac{3}{x} - \frac{7}{x^2}\right)\, dx = \\ &= 2\int x^3\, dx - 5\int x^2\, dx + 4\int dx + 3\int \frac{1}{x}\, dx - 7\int x^{-2}\, dx = \\ &= 2\frac{x^4}{4} - 5\frac{x^3}{3} + 4x + 3\ln x - 7\frac{x^{-1}}{-1} + C = \\ &= \frac{x^4}{2} - \frac{5}{3}x^3 + 4x + 3\ln x + \frac{7}{x} + C \end{aligned}$$

A partir de ahora, y siempre que sea posible sin dificultar la integración, pasaremos directamente a la integración sin pasar previamente por la descomposición y representaremos por I la integral a calcular.

2. $\displaystyle\int \left(3x - \sqrt{x} + 7\sqrt[3]{x^2} - \frac{4}{sen^2(3x-1)} + \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)\, dx$

$$\begin{aligned} I &= 3\int x\, dx - \int x^{\frac{1}{2}}\, dx + 7\int x^{23}\, dx - 4\int \frac{dx}{sen^2(3x-1)} + \\ &+ 2\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= 3\frac{x^2}{2} - 2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} + 7\frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5} + \frac{4}{3}\cot(3x-1) + 2\,\mathrm{arc\,sen}\, x + C \end{aligned}$$

3. $\displaystyle\int \left(2e^{3x-5}\ dx - \frac{5}{4x} + \frac{2}{7x-3} + \frac{3}{\cos^2(2x-1)} - 1\right)\ dx$

$$\begin{aligned}
I &= 2\int e^{3x-5}\ dx - \frac{5}{4}\int \frac{1}{x}\ dx + 2\int \frac{1}{7x-3}\ dx + \\
&+ 3\int \frac{1}{\cos^2(2x-1)}\ dx - \int dx = \\
&= \frac{2}{3}e^{3x-5} - \frac{5}{4}\ln x + \frac{2}{7}\ln(7x-3) + \frac{3}{2}\tan(2x-1) - x + C
\end{aligned}$$

4. $\displaystyle\int \left(2\cos(3x-5) + \frac{4}{\operatorname{sen}^2(3-5x)} - 2\sqrt[5]{3x+5}\right)\ dx$

$$\begin{aligned}
&I = 2\int \cos(3x-5)\ dx + 4\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(3-5x)}\ dx \\
&-2\int (3x+5)^{\frac{1}{5}}\ dx = \\
=\ & \frac{2}{3}\operatorname{sen}(3x-5) + \frac{4}{5}\cot(3-5x) - 2\frac{1}{3\frac{6}{5}}(3x+5)^{\frac{6}{5}} + C
\end{aligned}$$

5. $\displaystyle\int \left(2\sqrt{5-3x} + \frac{7}{\sqrt[4]{2-3x}} - \frac{3}{x^4} + 4\frac{5}{\sqrt[3]{1-4x}}\right)\ dx$

$$\begin{aligned}
I &= 2\int (5-3x)^{\frac{1}{2}}\ dx + 7\int (2-3x)^{-\frac{1}{4}}\ dx - 3\int x^{-4}\ dx + \\
&+ 20\int (1-4x)^{-\frac{1}{3}}\ dx \\
&= 2\frac{1}{-3\frac{3}{2}}(5-3x)^{\frac{3}{2}} + 7\frac{1}{-3\frac{3}{4}}(2-3x)^{\frac{3}{4}} - 3\frac{1}{-3}x^{-3} + \\
&+ 20\frac{1}{-4\frac{2}{3}}(1-4x)^{\frac{2}{3}} + C = \\
&= -\frac{4}{9}\sqrt{(5-3x)^3} - \frac{28}{9}\sqrt[4]{(2-3x)^3} + \frac{1}{x^3} - \frac{15}{2}\sqrt[3]{(1-4x)^2} + C
\end{aligned}$$

6. $\int \left(3\sqrt[4]{x} + \frac{2}{x^3} - \frac{4}{\sqrt[5]{x^3}} + 7\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} \right)\ dx$

$$\begin{aligned} I &= 3\int x^{\frac{1}{4}}\ dx + 2\int x^{-3}\ dx - 4\int x^{-\frac{3}{5}}\ dx + 7\int x^{-\frac{4}{3}}\ dx = \\ &= 3\frac{x^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} + 2\frac{x^{-2}}{-2} - 4\frac{x^{\frac{2}{5}}}{\frac{2}{5}} + 7\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{-\frac{1}{3}} + C = \\ &= \frac{12}{5}x^{\frac{5}{4}} - \frac{1}{x^2} - 10x^{\frac{2}{5}} - 21\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} + C \end{aligned}$$

10.2. MÉTODOS GENERALES DE INTEGRACIÓN

El primer problema que se plantea al intentar resolver una integral es saber de qué forma puede hacerse. En general, la forma de solucionar una integral indefinida depende de la función a integrar, de forma que según sea el tipo de función, así será el método a seguir.

No obstante, existen dos métodos generales de integración que se usan, generalmente, cuando el integrando es el producto de dos funciones.

Describiremos a continuación estos dos métodos.

10.2.1. Integración por sustitución o cambio de variable

Supongamos que intentamos resolver la $\int f(x)\, dx$ y que por alguna razón suponemos que si sustituímos la variable x por una función $g(t)$, la integral resultante es más sencilla de resolver que la integral propuesta. En tal caso, si hacemos $x = g(t)$, entonces es $dx = g'(t)dt$, por lo que, sustituyendo estas dos expresiones en la integral propuesta, se obtiene $\int f(x)\, dx = \int f[g(t)] \cdot g'(t)dt$. No olvidar que después de sustituir todas las variables x, también hay que sustituir la dx por su valor.

Aunque no es una regla fija, podemos decir que el cambio de variable se suele aplicar cuando la función integrando tiene la forma $\int f[u(x)] \cdot u'(x)\, dx$, pues en tal caso, haciendo el cambio de variable $u(x) = t$ es $u'(x)\, dx = dt$ con lo que resulta una integral de la forma $\int f(t)dt$ supuestamente más sencilla que la inicial. Se puede decir entonces que el método de integración por cambio de variable se utiliza en caso de que una parte del integrando sea la derivada de otra parte. También se utiliza, en combinación con otros métodos, para eliminar exponentes fraccionarios o para sustituir funciones de expresión complicada por otras más sencillas de manejar.

Ejemplo 10.4 *Mediante un cambio de variable apropiado, hallar* $\int e^{\operatorname{sen} x} \cos x \, dx$

Haciendo $\operatorname{sen} x = t$ es $\cos x \ dx = dt$ con lo que sustituyendo en la integral propuesta es

$$\int e^{\operatorname{sen} x} \cos x \ dx = \int e^t dt = e^t + C = e^{\operatorname{sen} x} + C$$

No olvidar que, tras hacer un cambio de variable para resolver una integral, hay que deshacer este cambio tras efectuar la integral.

Hemos visto en este ejemplo que, a veces, no es necesario expresar x en función de la nueva variable para luego diferenciar, sino que se diferencia directamente puesto que la función integral posee el factor $u'(x) \ dx$.

Ejemplo 10.5 *Resolver por sustitución* $\int \frac{e^x \ dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

Haciendo $e^x = t$, resulta $e^x \ dx = dt$, por lo que sustituyendo en la integral inicial es

$$\int \frac{e^x \ dx}{\sqrt{1-e^{2x}}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \operatorname{arc\,sen} t + C = \operatorname{arc\,sen}(e^x) + C$$

Ejemplo 10.6 *Hallar* $\int \frac{1}{\operatorname{sen} x} \ dx$

Teniendo en cuenta la fórmula del seno del ángulo doble, resulta que

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \int \frac{dx}{2\operatorname{sen}(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})} = \int \frac{dx}{2\frac{\operatorname{sen}(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})}\cos^2(\frac{x}{2})} = \\ &= \int \frac{dx}{2\tan(\frac{x}{2})\cos^2(\frac{x}{2})} \\ &\quad (\text{ Cambio: } \tan(\frac{x}{2}) = t \to \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2(\frac{x}{2})} \ dx = dt) \\ &\to \ I = \int \frac{dt}{t} = \ln t + C = \ln\tan(\frac{x}{2}) + C \end{aligned}$$

Teorema 10.2 *Demostrar que* $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\ dx = \ln(f(x)) + C$

Basta hacer el cambio de variable $f(x) = t \to f'(x)\ dx = dt$ para encontrar que

$$I = \int \frac{dt}{t} = \ln t + C = \ln(f(x)) + C \tag{10.1}$$

Es conveniente añadir esta integral a la tabla de integrales inmediatas.

Ejemplo 10.7 *Hallar* $\displaystyle\int \tan x\ dx$

Como $\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, haciendo el cambio de variable $\cos x = t \to -\operatorname{sen} x\ dx = dt$, por lo que $I = \displaystyle\int -\frac{dt}{t} = -\ln t + C = -\ln(\cos x) + C$

Por tanto, la integral de una función en la que el numerador es la derivada del denominador, es el logaritmo neperiano del denominador.

Teorema 10.3 *Demostrar que* $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\ dx = 2\sqrt{f(x)} + C$

Basta hacer el cambio de variable $f(x) = t^2 \to d(f(x)) = f'(x)\ dx = 2tdt$ para encontrar que

$$I = \int \frac{2tdt}{t} = \int 2dt = 2t + C = 2\sqrt{f(x)} + C \tag{10.2}$$

(Añadir esta fórmula a la tabla de integrales inmediatas)

10.2.2. Integración por partes

Recordemos que la diferencial del producto de dos funciones $u(x)$ y $v(x)$ es $\quad d(uv) = udv + vdu \to udv = d(uv) - vdu.$
Integrando esta última ecuación se obtiene la fórmula de la integración por partes:

$$\int udv = uv - \int vdu \tag{10.3}$$

Este método se suele aplicar cuando el integrando es el producto de dos funciones de distinto tipo: es un polinomio por un seno, un coseno, un logaritmo o una función exponencial o bien es un seno o un coseno multiplicado por una función exponencial. Como regla general, en el primer caso se hace u igual al polinomio y dv a la otra función, salvo en el caso del logaritmo en que se hace justo al revés; y si es el producto de una función seno (o coseno) por una función exponencial, es indiferente a quién se iguala u y a quién dv, pues siempre se obtiene la llamada *integral circular* como veremos en el último ejemplo de esta sección.

Digamos finalmente que una integral por partes se puede aplicar reiteradamente a las sucesivas integrales que se vayan obteniendo.

Ejemplo 10.8 *Integrar por partes* $\displaystyle\int (2x-3)\cos x\ dx$

Integral por partes:

$$u = 2x - 3 \to du = 2\ dx$$
$$\cos x\ dx = dv \to v = \int \cos x\ dx = \operatorname{sen} x$$

Aplicando la fórmula (10.3) de la integración por partes resulta:

$$\int (2x-3)\cos x\ dx = (2x-3)\operatorname{sen} x - \int 2\operatorname{sen} x\ dx = (2x-3)\operatorname{sen} x + 2\cos x + C$$

Notar que al hallar v no es necesario poner $+C$, pues si se hiciera sería $\displaystyle\int udv = u(v+C) - \int (v+C)du = uv + uC - \int vdu - Cu = uv - \int vdu.$

Por esta razón, las constantes intermedias no se tienen en cuenta al integrar y sólo se coloca la constante al obtener la integral final.

Ejemplo 10.9 *Hallar* $\displaystyle\int (3x-5)\ln x\ dx$

Por partes:
$u = \ln x \to du = \frac{1}{x}\ dx$

$dv = (3x - 5)\ dx \to v = \frac{3}{2}x^2 - 5x$
Luego

$$\begin{aligned} I &= (\frac{3}{2}x^2 - 5x)\ln x - \int (\frac{3}{2}x^2 - 5x)\frac{1}{x}\ dx = \\ &= (\frac{3}{2}x^2 - 5x)\ln x - \int (\frac{3}{2}x - 5)\ dx = \\ &= (\frac{3}{2}x^2 - 5x)\ln x - \frac{3}{2}\frac{x^2}{2} + 5x + C \end{aligned}$$

Ejemplo 10.10 *Hallar* $\displaystyle\int (4x^2 - 5x + 6)e^x\ dx$

Por partes:
$u = 4x^2 - 5x + 6 \to du = (8x - 5)\ dx$
$dv = e^x\ dx \to v = \int e^x\ dx = e^x$
Luego $I = (4x^2 - 5x + 6)e^x - \int (8x - 5)e^x\ dx$
Repetimos otra vez la integración por partes:
$u = 8x - 5 \to du = 8\ dx$
$dv = e^x\ dx \to v = e^x$
Por lo tanto
$I = (4x^2 - 5x + 6)e^x - (8x - 5)e^x + \int 8e^x\ dx =$
$(4x^2 - 5x + 6)e^x - (8x - 5)e^x + 8e^x + C$

De hecho, es fácil probar la siguiente fórmula de recurrencia:
Si $P(x)$ es un polinomio en x, entonces

$$\int P(x)e^x\ dx = e^x(P - P' + P'' - P''' + \cdots) + C \tag{10.4}$$

Ejemplo 10.11 *Hallar* $\displaystyle\int e^x(2x^3 - 4x^2 + 5x + 6)\ dx$

Aplicando la fórmula (10.4), resulta inmediatamente
$I = e^x[(2x^3 - 4x^2 + 5x + 6) - (6x^2 - 8x + 5) + (12x - 8) - 12] + C \to$
$\to I = e^x(2x^3 - 10x^2 + 25x - 19) + C$

Ejemplo 10.12 $\displaystyle\int \operatorname{arc\,sen} x \; dx$

Por partes:
$u = arc \;\operatorname{sen} x \to du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \; dx$
$dv = \; dx \to v = x$
Luego, aplicando la fórmula (10.2) resulta

$$I = x \operatorname{arc\,sen} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \; dx = x \operatorname{arc\,sen} x + \sqrt{1-x^2} + C$$

Ejemplo 10.13 *Hallar* $\displaystyle\int e^x \operatorname{sen} x \; dx$

Por partes:
$u = e^x \to du = e^x \; dx$
$dv = \operatorname{sen} x \; dx \to v = -\cos x \to I = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \; dx$
Volvemos a hacer una integración por partes con la misma asignación de antes:
$u = e^x \to du = e^x \; dx$
$dv = \cos x \; dx \to v = \operatorname{sen} x \to I = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x \; dx.$
Pero esta última integral obtenida es la misma que se había propuesto inicialmente, por lo que podemos escribir
$I = e^x(\operatorname{sen} x - \cos x) - I$. Si pasamos la I del segundo miembro al primero, sumamos y despejamos I, resulta finalmente que
$2I = e^x(\operatorname{sen} x - \cos x) \to I = \frac{1}{2} e^x(\operatorname{sen} x - \cos x) + C$

Los dos métodos de integración desarrollados en esta sección suelen ir combinados entre sí.

Ejemplo 10.14 *Hallar* $\displaystyle\int x \operatorname{arc\,sen} x \; dx$

Cambio de variable: $\operatorname{arc\,sen} x = t \to x = \operatorname{sen} t \to \; dx = \cos t dt$, por lo que
$I = \displaystyle\int t \operatorname{sen} t \cos t dt = \frac{1}{2} \int t \operatorname{sen}(2t) dt$

Por partes: $u = t \to du = dt$; $dv = \operatorname{sen}(2t)dt \to v = -\frac{1}{2}\cos(2t)$. Luego:

$$I = -\frac{1}{4}t\cos(2t) + \frac{1}{2}\int \cos(2t)dt = -\frac{1}{4}t\cos(2t) + \frac{1}{8}\operatorname{sen}(2t) + C$$

Para deshacer el cambio, tener en cuenta que
$\operatorname{sen}(2t) = 2\operatorname{sen} t \cos t = 2\operatorname{sen} t\sqrt{1 - cos^2 t} = 2x\sqrt{1-x^2}$
$\cos(2t) = \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t = 1 - 2\operatorname{sen}^2 t = 1 - 2x^2$. Por lo tanto,
$I = -\frac{1}{4}(1-2x^2)\operatorname{arc\,sen} x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} + C$

10.2.3. Ejercicios resueltos

Resolver las siguientes integrales aplicando el método apropiado:

1. $\displaystyle\int e^{\sqrt{3x-1}}\ dx$

   Hacemos el cambio de variable $3x-1=t^2 \to 3\ dx = 2tdt \to$
   $I=\dfrac{2}{3}\displaystyle\int e^t t dt$. Aplicando la fórmula (10.4), resulta

   $$I=\frac{2}{3}e^t(t-1)+C=\frac{2}{3}e^{\sqrt{3x-1}}(\sqrt{3x-1}-1)+C$$

2. $\displaystyle\int \arctan x\ dx$

   Hacemos la integral por partes siendo
   $u=\arctan x \to du=\frac{1}{1+x^2}\ dx$
   $dv=\ dx \to v=x$, con lo que

   $$I=x\arctan x-\int\frac{x}{1+x^2}\ dx = x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$$

3. $\displaystyle\int \operatorname{arc\,sen}^2 x\ dx$

   Cambio de variable: $\operatorname{arc\,sen} x = t \to x=\operatorname{sen} t \to\ dx=\cos t dt \to$
   $I=\displaystyle\int t^2\cos t dt$.
   Hacemos esta integral por partes siendo
   $u=t^2\to du=2tdt$ y $dv=\cos tdt\to v=\operatorname{sen} t$.
   Por lo tanto $I=t^2\operatorname{sen} t-2\displaystyle\int t\operatorname{sen} tdt$. Resolvemos esta nueva integral también por partes con

$u = t \to du = dt$ y $dv = \operatorname{sen} t dt \to v = -\cos t$, con lo que

$$\begin{aligned} I &= t^2 \operatorname{sen} t - 2(-t \cos t + \int \cos t dt) \\ &= t^2 \operatorname{sen} t + 2t \cos t - 2 \operatorname{sen} t + C \\ &= x \operatorname{arc} \operatorname{sen}^2 x + 2\sqrt{1-x^2} \operatorname{arc} \operatorname{sen} x - 2x + C \end{aligned}$$

Tener en cuenta que si $\operatorname{sen} x = t$ entonces $\cos x = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x} = \sqrt{1-t^2}$

4. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\ dx$

Mediante el cambio $\sqrt{x} = t \to x = t^2 \to\ dx = 2tdt$ se obtiene

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2tdt}{t\sqrt{1-t^2}} \\ &= 2\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = 2 \operatorname{arc} \operatorname{sen} t + C = 2 \operatorname{arc} \operatorname{sen}(\sqrt{x}) + C \end{aligned}$$

5. $\displaystyle\int \sqrt{x+1}(x-1)\ dx$

Cambio de variable: $x + 1 = t^2 \to x = t^2 - 1 \to\ dx = 2tdt \to$

$$\begin{aligned} I &= \int t(t^2-1-1)2tdt = 2\int (t^4 - 2t^2)dt = \\ &= 2(\frac{t^5}{5} - \frac{2t^3}{3}) + C = \frac{2}{5}\sqrt{(x+1)^5} - \frac{4}{3}\sqrt{(x+1)^3} + C \end{aligned}$$

6. $\displaystyle\int e^{2x-5}(3x+4)\ dx$

Cambio: $2x - 5 = t \to x = \frac{t+5}{2} \to \ dx = \frac{dt}{2} \to$

$$\begin{aligned} I &= \int e^t(3\frac{t+5}{2}+4)\frac{1}{2}dt = \frac{1}{4}\int e^t(3t+23)dt = \\ &= \frac{1}{4}e^t(3t+23-3)+C = \frac{1}{4}e^{2x-5}(3(2x-5)+20)+C = \\ &= \frac{1}{4}e^{2x-5}(6x+5)+C \end{aligned}$$

sin más que aplicar la fórmula (10.4).

7. $\displaystyle\int \operatorname{sen}\sqrt{x}\ dx$

Cambio: $x = t^2 \to \ dx = 2tdt \to I = \int 2t \operatorname{sen} tdt$.
Integración por partes: $u = 2t \to du = 2dt$ y $dv = \operatorname{sen} tdt \to v = -\cos t$, por lo que

$$\begin{aligned} I &= -2t\cos t + 2\int \cos tdt = -2t\cos t + 2\operatorname{sen} t + C \\ &= -2\sqrt{x}\cos(\sqrt{x}) + 2\operatorname{sen}(\sqrt{x}) + C \end{aligned}$$

8. $\displaystyle\int (x^2 - x)\ln(x+2)\ dx$

Por partes:
$u = \ln(x+2) \to du = \frac{1}{x+2}\ dx$

$dv = (x^2 - x)\ dx \rightarrow v = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$ por lo que

$$\begin{aligned}
I\ &= \ln(x+2)(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2) - \int \frac{\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2}{x+2}\ dx = \\
&= \ln(x+2)(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2) \\
&\quad -\frac{1}{6}\int\left(2x^2 - 7x + 14 - \frac{28}{x+2}\right)\ dx = \\
&= \ln(x+2)(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2) \\
&\quad -\frac{1}{6}(\frac{2}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 14x - 28\ln(x+2)) + C
\end{aligned}$$

9. $\displaystyle\int \arctan(\sqrt{x})\ dx$

Cambio de variable:
$x = t^2 \rightarrow\ dx = 2tdt \rightarrow I = \int 2t \arctan t dt$.
Esta integral se resuelve por partes:
$u = \arctan t \rightarrow du = \frac{1}{1+t^2}dt$
$dv = 2tdt \rightarrow v = t^2$ por lo que

$$\begin{aligned}
I &= t^2 \arctan t - \int \frac{t^2}{1+t^2}dt \\
&= t^2 \arctan t - \int (1 - \frac{1}{1+t^2})dt = \\
&= t^2 \arctan t - t + \arctan t + C \\
&= x \arctan(\sqrt{x}) - \sqrt{x} + \arctan(\sqrt{x}) + C
\end{aligned}$$

Acaban aquí los métodos generales de integración y pasamos a continuación a la integración según el tipo de funciones.

10.3. INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES

Recordemos que una función racional es el cociente de dos funciones polinómicas: $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$. En caso de que el numerador $N(x)$ sea un polinomio de grado igual o superior al grado del denominador $D(x)$ es necesario efectuar la división hasta llegar a un resto $r(x)$ que sea un polinomio de grado estrictamente inferior al del cociente $D(x)$. Teniendo en cuenta que en toda división se verifica que el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente más el resto, dividiendo por el divisor se obtiene $\frac{N(x)}{D(x)} = C(x) + \frac{r(x)}{D(x)}$ de donde resulta finalmente la fórmula

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}\, dx = \int C(x)\, dx + \int \frac{r(x)}{D(x)}\, dx \tag{10.5}$$

Dado que $C(x)$ es un polinomio, su integración no reviste ninguna dificultad, por lo que centraremos nuestra atención en la integración de funciones racionales cuyo numerador sea de grado inferior al del denominador. En general, la integración de una función racional se efectúa descomponiendo la fracción en suma de fracciones simples, descomposición que depende del tipo de raíces del denominador. Por lo tanto clasificaremos la integración de funciones racionales en los tipos que distinguimos a continuación.

I.- **Las raíces del denominador son reales y simples**.

Consideremos la integral $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$, siendo $Q(x)$ un polinomio de grado r con r raíces distintas. Entonces $Q(x)$ puede descomponerse en la forma $Q(x) = a_0(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_r)$. Suponiendo $a_0 = 1$, la fracción $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se descompone en suma de fracciones elementales en la forma

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \cdots + \frac{A_r}{x-a_r} \tag{10.6}$$

siendo A_i valores a determinar. Para ello se efectúa a continuación la suma del segundo miembro y se igualan los numeradores de ambos miembros. En este momento, para hallar los coeficientes desconocidos A_i se puede hacer o bien dando r valores arbitrarios a x (los más convenientes de los cuales son las raíces a_i) o desarrollando los dos miembros e igualando los coeficientes de los términos de igual grado. En ambos casos se obtiene un sistema compatible determinado de r ecuaciones con r incógnitas A_i. Sustituyendo los valores de estos coeficientes A_i en la ecuación (10.6) e integrando, se obtiene la solución
$\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = A_1 \ln(x-a_1) + A_2 \ln(x-a_2) + \cdots + A_r \ln(x-a_r) + C$

Ejemplo 10.15 *Hallar* $\displaystyle\int \frac{4x^4+4x^3-3x^2+13x+12}{2x^3+3x^2-2x-3}\,dx$

Como el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, se efectúa la división:

$$\begin{array}{rrrrr|l} 4x^4 & +4x^3 & -3x^2 & +13x & +12 & \underline{2x^3+3x^2-2x-3} \\ & -2x^3 & +x^2 & +19x & +12 & 2x-1 \\ & & +4x^2 & +17x & +9 & \end{array}$$

Luego

$$I = \int \left(2x - 1 + \frac{4x^2+17x+9}{2x^3+3x^2-2x-3}\right)\,dx = x^2 - x + I_1$$

Para resolver la integral I_1, se hallan las raíces del denominador:
$2x^3+3x^2-2x-3 = 0 \to x = \pm 1,\ x = -\frac{3}{2}$ por lo que
$2x^3+3x^2-2x-3 = (x-1)(x+1)(2x+3)$. Entonces

$$\begin{aligned} & \frac{4x^2+17x+9}{2x^3+3x^2-2x-3} = \frac{4x^2+17x+9}{(x-1)(x+1)(2x+3)} = \\ = \ & \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{2x+3} = \\ = \ & \frac{A(x+1)(2x+3) + B(x-1)(2x+3) + C(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(2x+3)} \end{aligned}$$

Igualando ambos numeradores resulta que
$A(x+1)(2x+3)+B(x-1)(2x+3)+C(x-1)(x+1) = 4x^2+17x+9$ Damos valores a x en ambos miembros:
$x = 1 \to 10A = 30 \to A = 3$
$x = -1 \to -2B = -4 \to B = 2$
$x = 0 \to 3A - 3B - C = 9 \to 9 - 6 - C = 9 \to C = -6$
Por lo tanto,

$$I_1 = \int \left(\frac{3}{x-1} + \frac{2}{x+1} - \frac{6}{2x+3} \right) dx = 3\ln(x-1) + 2\ln(x+1) - 6\frac{1}{2}\ln(2x+3)$$

Finalmente, $I = x^2 - x + 3\ln(x-1) + 2\ln(x+1) - 3\ln(2x+3) + C$

II.- **Alguna raíz del denominador es real múltiple**.

Supongamos que a_p es raíz del denominador $Q(x)$ de orden k. Entonces $Q(x) = (x - a_p)^k Q_1(x)$. En este caso, la descomposición en sumandos correspondiente al factor $(x - a_p)^k$ es de la forma

$$\frac{A_1}{x - a_p} + \frac{A_2}{(x - a_p)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x - a_p)^k} \tag{10.7}$$

Hay que tener en cuenta que al sumar las fracciones del segundo miembro, el mínimo común denominador de éste es
$(x - a_p)^k Q_1(x) = Q(x)$.

Después de igualar los numeradores, para hallar los valores de los coeficientes A_i se podrá hacer dando valores a x, pero teniendo en cuenta que deberá resultar siempre un sistema de ecuaciones lineales compatible determinado.

Tras hallar estos valores A_i, tener en cuenta que la integral del primer sumando de la descomposición (10.7) es un logaritmo neperiano, pero las restantes integrales son potencias negativas de $x - a_i$

Ejemplo 10.16 *Hallar* $\displaystyle\int \frac{9x^2+18}{x^4+x^3-3x^2-5x-2}\, dx$

Hallamos las raíces del denominador mediante la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 1 & -3 & -5 & -2 \\ x=-1 & & -1 & 0 & 3 & 2 \\ \hline & 1 & 0 & -3 & -2 & 0 \\ x=-1 & & -1 & 1 & 2 & \\ \hline & 1 & -1 & -2 & & \end{array}$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \to x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \to x = -1,\ x = 2$$

Por lo tanto, las raíces del denominador son $x = -1$, triple, y $x = 2$, simple, por lo que $x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2 = (x+1)^3(x-2)$.

Entonces, la descomposición del integrando es

$$\frac{9x^2+18}{(x+1)^3(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} + \frac{D}{x-2} =$$
$$= \frac{A(x+1)^2(x-2) + B(x+1)(x-2) + C(x-2) + D(x+1)^3}{(x+1)^3(x-2)}$$

de donde se deduce que

$A(x+1)^2(x-2) + B(x+1)(x-2) + C(x-2) + D(x+1)^3 = 9x^2 + 18$

Para

$x = -1 \to -3C = 27 \to C = -9$

$x = 2 \to 27D = 54 \to D = 2$

Damos otros dos valores a x, por ejemplo:

$x = 0 \to -2A - 2B - 2C + D = 18 \to A + B = 1$

$x = 1 \to -4A - 2B - C + 8D = 27 \to -2A - B = 1$

Resolviendo este último sistema se obtiene $A = -2,\ B = 3$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
I &= \int \left(\frac{-2}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2} - \frac{9}{(x+1)^3} + \frac{2}{x-2} \right)\, dx = \\
&= -2 \int \frac{2}{x+1}\, dx + 3 \int (x+1)^{-2}\, dx - 9 \int (x+1)^{-3}\, dx \\
&\quad +2 \int \frac{1}{x-2}\, dx = \\
&= -2\ln(x+1) - 3(x+1)^{-1} + \frac{9}{2}(x+1)^{-2} \\
&\quad +2\ln(x-2) + C = \\
&= -2\ln(x+1) - 3\frac{1}{x+1} + \frac{9}{2(x+1)^2} + 2\ln(x-2) + C
\end{aligned}$$

III.- **El denominador posee raíces complejas simples**.

Si $Q(x)$ posee una raíz compleja del tipo $x = a + ib$, entonces también posee la raíz conjugada $x = a - ib$. El producto de los factores correspondientes a estas dos soluciones es
$(x-a-ib)(x-a+ib) = (x-a)^2 + b^2$ y la fracción correspondiente a estas dos raíces toma la forma $\frac{Ax+B}{(x-a)^2+b^2}$ cuya integración da lugar siempre a un logaritmo neperiano más un arco tangente y cuyo proceso veremos mejor en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 10.17 *Integrar* $\displaystyle\int \frac{3x-5}{4x^2-16x+25}\, dx$

El proceso a seguir es el que se indica a continuación.
Se hallan las raíces del denominador: $4x^2 - 16x + 25 = 0 \to x = \frac{4 \pm 3i}{2}$. Dado estas dos raíces son complejas, entonces
1º) Se descompone la integral propuesta en la suma de dos integrales:

$$I = \int \frac{3x-5}{4x^2-16x+25}\, dx = 3 \int \frac{x}{4x^2-16x+25}\, dx - 5 \int \frac{dx}{4x^2-16x+25}$$

Para hacer más sencillas las operaciones, expresamos la integral I como
$I = 3I_1 - 5I_2$.

2º) Para hallar I_1 se busca que el numerador sea la derivada del denominador, $8x-16$, para lo cual se multiplica la integral por 8 (y se divide por 8) y se resta 16 al numerador (y se suma 16):

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{8}\int \frac{8x}{4x^2-16x+25}\,dx = \frac{1}{8}\int \frac{8x-16+16}{4x^2-16x+25}\,dx = \\ &= \frac{1}{8}\int \frac{8x-16}{4x^2-16x+25}\,dx + \frac{16}{8}\int \frac{1}{4x^2-16x+25}\,dx = \\ &= \frac{1}{8}\ln(4x^2-16x+25)+2I_2 \end{aligned}$$

3º) Para hallar I_2, debemos expresar el denominador como suma de dos cuadrados: $4x^2-16x+25 = 4(x+a)^2+b = 4(x^2+2ax+a^2)+b = 4x^2+8ax+4a^2+b$ e igualando coeficientes en ambos miembros resulta
$8a=-16 \to a=-2$ y $4a^2+b=25 \to b=25-16=9$ por lo que
$4x^2-16x+25 = 4(x-2)^2+9$. Luego

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{1}{4(x-2)^2+9}\,dx = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{\frac{4}{9}(x-2)^2+1} \\ &= \frac{1}{9}\int \frac{dx}{(\frac{2}{3}(x-2))^2+1} = \frac{1}{9}\frac{3}{2}\arctan(\frac{2}{3}(x-2)) \\ &= \frac{1}{6}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2(x-2)}{3}\right) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} I &= 3I_1-5I_2 = 3\left(\frac{1}{8}\ln(4x^2-16x+25)+2I_2\right)-5I_2 = \\ &= \frac{3}{8}\ln(4x^2-8x+25)+\frac{1}{6}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2(x-2)}{3}\right)+C \end{aligned}$$

Ejemplo 10.18 *Integrar* $\displaystyle\int \frac{24x^2-5x+6}{(2x+1)(9x^2-6x+5)}\,dx$

La raíces del denominador $9x^2-6x+5$ son $x=\frac{1\pm 2i}{3}$, por lo que la descomposición del integrando es

$$
\begin{aligned}
& \frac{24x^2-5x+6}{(2x+1)(9x^2-6x+5)} = \frac{A}{2x+1} + \frac{Bx+C}{9x^2-6x+5} \\
= \quad & \frac{A(9x^2-6x+5)+(Bx+C)(2x+1)}{(2x+1)(9x^2-6x+5)} \\
\to \quad & A(9x^2-6x+5)+(Bx+C)(2x+1) = 24x^2-5x+6 \\
\text{Para} \quad & x = \frac{-1}{2} \to \frac{37}{4}A = \frac{37}{2} \to A = 2 \\
& x = 0 \to 4A + C = 7 \to C = -2 \\
& x = 1 \to 7A + 3B + 3C = 20 \to B = 3. \text{ Luego} \\
I \quad & = \int \frac{2}{2x+1}\,dx + \int \frac{3x-2}{9x^2-6x+4}\,dx \\
= \quad & \ln(2x+1) + 3\int \frac{x}{9x^2-6x+5}\,dx - 2\int \frac{1}{9x^2-6x+5}\,dx \\
= \quad & \ln(2x+1) + \frac{3}{18}\int \frac{18x-6+6}{9x^2-6x+5}\,dx - 2\int \frac{1}{(3x-1)^2+4}\,dx \\
= \quad & \ln(2x+1) + \frac{1}{6}\int \frac{18x-6}{9x^2-6x+5}\,dx - \int \frac{1}{(3x-1)^2+4}\,dx \\
= \quad & \ln(2x+1) + \frac{1}{6}\ln(9x^2-6x+5) - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(\frac{3x-1}{2}\right)^2+1} \\
= \quad & \ln(2x+1) + \frac{1}{6}\ln(9x^2-6x+4) - \frac{1}{4}\frac{1}{3/2}\arctan\left(\frac{3x-1}{2}\right) + C
\end{aligned}
$$

En resumen, la integración de una función racional cuyo denominador es un polinomio de tercer grado, se reduce a uno de estos tres casos según sea las raíces del denominador $Q(x)$:

- $Q(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$ (tres raíces reales distintas)
  $I = A\ln(x-a) + B\ln(x-b) + C\ln(x-c) + K$

- $Q(x) = (x-a)(x-b)^2$ (dos raíces reales iguales)
  $I = A\ln(x-a) + B\ln(x-b) - \dfrac{C}{x-b} + K$

- $Q(x) = (x-a)(x^2+2mx+n)$ (dos raíces complejas conjugadas)
  $I = A\ln(x-a) + B\ln(x^2+2mx+n) + C\arctan\dfrac{x+m}{\sqrt{n-m^2}} + K$

10.3.1. Ejercicios resueltos

Resolver las integrales que se proponen a continuación.

1. $\displaystyle\int \frac{5x^2+2x+5}{3x^3+2x^2-7x+2}\, dx$
   Hallamos las raíces del denominador mediante la regla de Ruffini y encontramos $x=1;\ x=1/3,\ x=-2$, simples, por lo que $3x^3+2x^2-7x+2=(x-1)(3x-1)(x+2)$ con lo que la función a integrar se descompone en la forma

$$\begin{aligned} &\frac{5x^2+2x+5}{3x^3+2x^2-7x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{3x-1} + \frac{C}{x+2} = \\ = \ &\frac{A(3x-1)(x+2)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)(3x-1)}{(x-1)(3x-1)(x+2)} \end{aligned}$$

   Igualando los numeradores de ambas fracciones resulta
   $A(3x-1)(x+2)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)(3x-1)=5x^2+2x+5.$
   Damos valores a x:
   $x=\frac{1}{3} \to -\frac{14}{9}B=\frac{56}{9} \to B=-4$
   $x=-2 \to 21C=21 \to C=1$
   $x=1 \to 6A=12 \to A=2 \to$
   Y finalmente,

$$\begin{aligned} I &= \int \left(2\frac{1}{x-1} - 4\frac{1}{3x-1} + \frac{1}{x-2}\right)\, dx \\ &= 2\ln(x-1) - \frac{4}{3}\ln(3x-1) + \ln(x-2) + C \end{aligned}$$

2. $\displaystyle\int \frac{4x-5}{x^3-6x^2+12x-8}\, dx$
   La única solución del denominador es $x=2$, triple, por lo que $x^3-6x^2+12x-8=(x-2)^3$. En este caso particular, un método sencillo

para resolver la integral es el siguiente:

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{4(x-2)+3}{(x-2)^3}\, dx \\
&= 4\int \frac{1}{(x-2)^2}\, dx + 3\int (x-2)^{-3}\, dx \\
&= 4\frac{(x-2)^{-1}}{-1} + 3\frac{(x-2)^{-2}}{-2} + C \\
&= -\frac{4}{x-2} - \frac{3}{2(x-2)^2} + C
\end{aligned}$$

3. $\displaystyle\int \frac{6x^2-5x-5}{x^3+x^2-5x+3}\, dx$
Los ceros del denominador son $x=-3$, simple, y $x=1$, doble, por lo que $x^3+x^2-5x+3=(x+3)(x-1)^2$ y la fracción a integrar se descompone como

$$\begin{aligned}
& \frac{6x^2-5x-5}{x^3+x^2-5x+3} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} \\
= \quad & \frac{A(x-1)^2+B(x+3)(x-1)+C(x+3)}{(x+3)(x-1)^2} \\
\to \quad & A(x-1)^2+B(x+3)(x-1)+C(x+3) \\
= \quad & 6x^2-5x-5 \\
\text{Para} \quad & x=1 \to 4C=-4 \to C=-1 \\
& x=-3 \to 16A=64 \to A=4 \\
& x=0 \to A-3B+3C=-5 \to B=2. \\
\text{Luego} \quad & I = \int \left(\frac{4}{x+3} + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} \right) dx = \\
= \quad & 4\ln(x+3) + 2\ln(x-1) + \frac{1}{x-1} + C
\end{aligned}$$

4. $\displaystyle\int \frac{5x+3}{x^2-4x+8}\, dx$
Como las raíces del denominador son $2 \pm 2i$ (complejas), se sigue el

algoritmo que indicamos en la última sección:

$$
\begin{aligned}
I &= 5\int \frac{x}{x^2-4x+8}\,dx - 3\int \frac{1}{x^2-4x+8}\,dx \\
&= 5\int \frac{2x-4}{x^2-4x+8} + 20\int \frac{1}{x^2-4x+8}\,dx \\
&\quad -3\int \frac{1}{x^2-4x+8}\,dx = \\
&= 5\ln(x^2-4x+8) + 17\int \frac{1}{(x-2)^2+4}\,dx = \\
&= 5\ln(x^2-4x+8) + \frac{17}{4}\int \frac{1}{(\frac{x-2}{2})^2+1}\,dx = \\
&= 5\ln(x^2-4x+8) + \frac{17}{4}2\arctan(\frac{x-2}{2}) + C
\end{aligned}
$$

5. $\displaystyle\int \frac{2x+7}{x^2+2x+6}\,dx$

Las raíces del denominador son complejas, por lo que repetimos el procedimiento anterior:

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{2x+2}{x^2+2x+6} - 2\int \frac{1}{x^2+2x+6} \\
&\quad +7\int \frac{1}{x^2+2x+6}\,dx = \\
&= \ln(x^2+2x+6) + 5\int \frac{1}{(x+1)^2+5}\,dx = \\
&= \ln(x^2+2x+6) + \int \frac{1}{(\frac{x+1}{\sqrt{5}})^2+1}\,dx = \\
&= \ln(x^2+2x+6) + \sqrt{5}\arctan(\frac{x+1}{\sqrt{5}}) + C
\end{aligned}
$$

6. $\displaystyle\int \frac{4x-5}{6x^2+5x-4}\,dx$

Las raíces del denominador son $x = 1/2$ y $x = -4/3$, simples, por lo que $6x^2 + 5x - 4 = (2x-1)(3x+4)$. Entonces

$$\begin{aligned}
& \frac{4x-5}{6x^2+5x-4} = \frac{4x-5}{(2x-1)(3x+4)} \\
& = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{3x+4} = \frac{A(3x+4)+B(2x-1)}{(2x-1)(3x+4)} \\
\rightarrow \quad & A(2x-1) + B(3x+4) = 4x-5 \\
\text{Para} \quad & x = \frac{1}{2} : A = -\frac{6}{11} \\
& x = -\frac{4}{3} : B = \frac{31}{11} \\
\text{Luego} \quad I \quad & = -\frac{6}{11}\int \frac{1}{2x-1}dx + \frac{31}{11}\int \frac{1}{3x+4}dx \\
& = -\frac{6}{11}\frac{1}{2}\ln(2x-1) + \frac{31}{11}\frac{1}{3}\ln(3x+4) + C \\
& = -\frac{3}{11}\ln(2x-1) + \frac{31}{33}\ln(3x+4) + C
\end{aligned}$$

7. $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\, dx$

Esta integral se puede resolver fácilmente de la siguiente forma:

$$I = \int \frac{x}{1+(x^2)^2}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+(x^2)^2}\, dx = \frac{1}{2}\arctan(x^2) + C$$

8. $\displaystyle\int \frac{e^x+1}{e^x-1}\, dx$

Cambio de variable:

$e^x = t \rightarrow x = \ln t \rightarrow\ dx = \dfrac{1}{t}dt \rightarrow I = \displaystyle\int \frac{t+1}{t(t-1)}dt.$

El integrando es una función racional con dos raíces reales simples, por lo que

$$\begin{aligned}
& \frac{t+1}{t(t-1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} = \frac{A(t-1)+Bt}{t(t-1)} \\
\rightarrow \quad & A(t-1) + Bt = t+1 \rightarrow A = -1,\ B = 2 \\
\rightarrow \quad & I = \int \left(\frac{-1}{t} + \frac{2}{t-1} \right) dt = -\ln t + 2\ln(t-1) + C \\
= \quad & -\ln e^x + 2\ln(e^x - 1) + C = \ln(e^x - 1)^2 - x + C
\end{aligned}$$

10.4. INTEGRACIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Debido principalmente a la variedad de fórmulas que pueden establecerse en trigonometría, la integración de funciones trigonométricas puede estudiarse según multitud de casos, dependiendo siempre de la forma que posea la función a integrar.

Para hacer nuestro estudio más sencillo, según la forma de la función a integrar distinguiremos los casos que se indican a continuación.

10.4.1. Producto de senos y/o cosenos de distinto argumento

A su vez, en estos productos distinguiremos varios tipos:

1.1.- Producto de seno y coseno: $\int \operatorname{sen}(ax)\cos(bx)\ dx$

Sumando las fórmulas

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b$ y $\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cos b - \cos a \operatorname{sen} b$

se obtiene $\operatorname{sen} a \cos b = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b))$ por lo que al sustituir esta igualdad en la integral propuesta resulta

$$\int \operatorname{sen}(ax)\cos(bx)\ dx = \frac{1}{2}\int (\operatorname{sen}((a+b)x) + \operatorname{sen}((a-b)x))\ dx$$
$$= \ -\frac{1}{2}\frac{\cos((a+b)x)}{a+b} - \frac{1}{2}\frac{\cos((a-b)x)}{a-b} + C$$

Ejemplo 10.19 *Hallar* $\int \operatorname{sen}(7x)\cos(3x)\ dx$

En este caso, $a = 7x,\ b = 3x$ por lo que

$$\int \operatorname{sen}(7x)\cos(3x)\ dx = \frac{1}{2}\int (\operatorname{sen}(10x)+\operatorname{sen}(4x))\ dx = -\frac{1}{2}\frac{\cos(10x)}{10} - \frac{1}{2}\frac{\cos(4x)}{4} + C$$

Ejemplo 10.20 *Hallar* $\int \operatorname{sen}(2x)\cos(5x)\ dx$

Como en el ejercicio anterior, es $a = 2x,\ b = 5x$ por lo que

$$\int \operatorname{sen}(2x)\cos(5x)\ dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(7x)\ dx + \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(-3x)\ dx$$

$$= \quad -\frac{1}{14}\cos(7x) - \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(3x)\ dx = -\frac{\cos(7x)}{14} + \frac{\cos(3x)}{6} + C$$

Hemos tenido en cuenta que $\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}(\alpha)$

1.2.- Producto de senos: $\displaystyle\int \operatorname{sen}(ax)\operatorname{sen}(bx)\ dx$

Restando las igualdades $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \operatorname{sen} a\operatorname{sen} b$, y
$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \operatorname{sen} a\operatorname{sen} b$, se obtiene
$\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$ por lo que

$$\int \operatorname{sen}(ax)\operatorname{sen}(bx)\ dx = \frac{1}{2}\int (\cos((a-b)x) - \cos((a+b)x))\ dx$$

$$= \quad \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}((a-b)x)}{a-b} - \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}((a+b)x)}{a+b} + C$$

Ejemplo 10.21 *Hallar* $\displaystyle\int \operatorname{sen}(7x)\operatorname{sen}(5x)\ dx$

Aplicando el proceso indicado resulta

$$\int \operatorname{sen}(7x)\operatorname{sen}(5x)\ dx = \frac{1}{2}\int (\cos(2x) - \cos(12x))\ dx = \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4} - \frac{\operatorname{sen}(12x)}{24} + C$$

Ejemplo 10.22 *Aplicar este método para hallar* $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2(3x)\ dx$

En este caso, como $\operatorname{sen}^2(3x) = \operatorname{sen}(3x)\operatorname{sen}(3x)$ es $a = 3x,\ b = 3x$, por lo que
$\displaystyle\int \operatorname{sen}^2(3x)\ dx = \frac{1}{2}\int (\cos(0x) - \cos(6x))\ dx = \frac{1}{2}\int (1 - \cos 6x)\ dx$
$\displaystyle= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}(6x)}{6} + C$

1.3.- Producto de cosenos: $\displaystyle\int \cos(ax)\cos(bx)\ dx$

Si sumamos las fórmulas indicadas en el ejercicio anterior se obtiene

$\cos(ax)\cos(bx) = \frac{1}{2}(\cos((a+b)x) + \cos((a-b)x))$ por lo que

$$\int \cos(ax)\cos(bx)\ dx = \frac{1}{2}\int \cos((a+b)x)\ dx + \frac{1}{2}\int \cos((a-b)x)\ dx$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}((a+b)x)}{a+b} + \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}((a-b)x)}{a-b} + C$$

Ejemplo 10.23 *Hallar* $\int \cos(8x)\cos(3x)\ dx$

Según la fórmula anterior es
$\int \cos(8x)\cos(3x)\ dx = \frac{1}{2}\int \cos(11x)\ dx + \frac{1}{2}\int \cos(5x)\ dx$
$= \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}(11x)}{11} + \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}(5x)}{5} + C$

Ejemplo 10.24 *Aplicar este método para hallar* $\int \cos^2(3x)\ dx$

$\int \cos^2(3x)\ dx = \int \cos(3x)\cos(3x)\ dx = \frac{1}{2}\int(\cos(6x) + \cos(0x))\ dx$
$= \frac{1}{2}\int \cos(6x)\ dx + \frac{1}{2}\int\ dx = \frac{1}{12}\operatorname{sen}(6x) + \frac{1}{2}x + C$

10.4.2. Producto de potencias naturales de senos y cosenos

Supondremos una integral de la forma $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x dx$. Distinguiremos los siguientes casos:

1. Si m es impar se hace el cambio de variable $\cos x = t$
2. Si n es impar, el cambio de variable es $\operatorname{sen} x = t$
3. Si ambos exponentes son pares, se sustituye $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$ y $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$

Ejemplo 10.25 *Hallar* $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x\ dx$

La función integrando posee un exponente impar en seno por lo que hay que hacer el cambio $\cos x = t$ y seguir el siguiente proceso:

$$\begin{aligned}
I &= \int \operatorname{sen}^2 x \ \operatorname{sen} x \ \cos^4 x \ dx = \int (1-\cos^2 x)\cos^4 x \ \operatorname{sen} x \ dx \\
& \quad (\text{ Cambio: } \cos x = t \to -\operatorname{sen} x \ dx = dt) \\
\to I &= -\int (1-t^2)t^4 dt = -\int (t^4 - t^6)dt = -\frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + C \\
&= \frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^5 x}{5} + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 10.26 *Resolver* $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^5 x \quad dx$

El exponente del coseno es impar por lo que

$$\begin{aligned}
I &= \int \operatorname{sen}^2 x \quad \cos^4 x \cos x \ dx = \int \operatorname{sen}^2 x)(\cos^2 x)^2 \cos x \ dx \\
&= \int \operatorname{sen}^2 x(1-\operatorname{sen}^2 x)^2 \operatorname{sen} x \ dx \\
&= \int \operatorname{sen}^2 x(1 - 2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^4 x)\cos x \ dx \\
& \quad (\text{ Cambio: } \operatorname{sen} x = t \to \cos x \ dx = dt) \\
\to I &= \int t^2(1-2t^2+t^4)dt = \int (t^2 - 2t^4 + t^6)dt = \frac{t^3}{3} - 2\frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + C \\
&= \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} - 2\frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{sen}^7 x}{7} + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 10.27 *Hallar* $\int \operatorname{sen}^2 x \ \cos^4 x \ dx$

Ambos exponente son pares, por lo que

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{1-\cos(2x)}{2}\left(\frac{1+\cos(2x}{2}\right)^2 \, dx \\
&= \frac{1}{8}\int (1-\cos(2x))(1+2\cos(2x)+\cos^2(2x)) \, dx \\
&= \frac{1}{8}\int (1+\cos(2x)-\cos^2(2x)-\cos^3(2x)) \, dx \\
&= \frac{1}{8}(x+\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2}-I_1-I_2)+C \\
I_1 &= \int \cos^2(2x) \, dx = \int \frac{1+\cos(4x)}{2} \, dx = \frac{1}{2}(x+\frac{\operatorname{sen}(4x)}{4}) \\
I_2 &= \int \cos^3(2x) \, dx = \int \cos^2(2x)\cos(2x) \, dx \\
&= \int (1-\operatorname{sen}^2(2x))\cos(2x) \, dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)-\frac{1}{6}\operatorname{sen}^3(2x) \\
\to I &= \frac{1}{8}(x+\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2}-\frac{1}{2}(x+\frac{\operatorname{sen}(4x)}{4})-\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)-\frac{1}{6}\operatorname{sen}^3(2x))+C \\
&= \frac{x}{16}-\frac{\operatorname{sen}(4x)}{64}-\frac{\operatorname{sen}^3(2x)}{48}+C
\end{aligned}
$$

10.4.3. Funciones racionales de potencias de tangente

El cambio de variable $\tan x = t$ reduce el integrando a una función racional

Ejemplo 10.28 *Integrar* $\int \tan^3 x \, dx$

Haciendo el cambio de variable $\tan x = t \to x = \arctan t \to \; dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$ resulta:

$$
\begin{aligned}
I &= \int \tan^3 x \, dx = \int t^3 \frac{1}{t^2+1} dt = \int (t - \frac{t}{t^2+1}) dt \\
&= \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + C \\
\to I &= \frac{\tan^2 x}{2} - \frac{1}{2}\ln(\tan^2 x + 1) + C = \frac{\tan^2 x}{2} + \ln\cos x + C
\end{aligned}
$$

Nota: tener en cuenta que $\tan^2 x + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

10.4.4. Ejercicios resueltos

Integrar las siguientes funciones trigonométricas:

1. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(7x)\cos(2x)\ dx$

   Según las indicaciones de 1.1. es

   $$I = \frac{1}{2}\int (\operatorname{sen}(9x) + \operatorname{sen}(5x))\ dx = \frac{1}{2}(-\frac{\cos(9x)}{9} - \frac{\cos(5x)}{5}) + C$$

2. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(5x)\operatorname{sen}(2x)\ dx$

   Es el caso 1.2:

   $$I = -\frac{1}{2}\int (\cos(7x) + \cos(3x))\ dx = -\frac{1}{2}(\frac{\operatorname{sen}(7x)}{7} + \frac{\operatorname{sen}(3x)}{3}) + C$$

3. $\int \cos(8x)\cos x\ dx$

   Como se indicó en 1.3. es

   $$I = \frac{1}{2}\int (\cos(9x) + \cos(7x))\ dx = \frac{1}{2}(\frac{\operatorname{sen}(9x)}{9} + \frac{\operatorname{sen}(7x)}{7}) + C$$

4. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2(2x)\cos^3 x\ dx$

   Teniendo en cuenta que $\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$, y aplicando las indicaciones dadas en 2.2. resulta

   $$\begin{aligned} I &= \int 4\operatorname{sen}^2 x\cos^5 x\ dx = 4\int \operatorname{sen}^2 x(\cos^2 x)^2\cos x\ dx \\ &= 4\int \operatorname{sen}^2 x(1-\operatorname{sen}^2 x)^2\cos x\ dx \\ &\quad (\text{ Cambio: } \operatorname{sen} x = t \to \cos x\ dx = dt) \\ I &= 4\int t^2(1-t^2)^2 dt = 4\int t^2(1-2t^2+t^4)dt \\ &= 4\int (t^2 - 2t^4 + t^6)dt = 4(\frac{t^3}{3} - 2\frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7}) + C \\ &= \frac{4}{3}\operatorname{sen}^3 x - \frac{8}{5}\operatorname{sen}^5 x + \frac{4}{7}\operatorname{sen}^7 x + C \end{aligned}$$

5. $\displaystyle\int \tan^4 x \; dx$

Según la referencia 3, se hace el cambio $\tan x = t$ por lo que $x = \arctan t \rightarrow \; dx = \frac{1}{t^2+1} dt$, con lo que resulta

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{t^4}{t^2+1} dt = \int (t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1}) dt \\ &= \frac{t^3}{3} - t + \arctan t + C \\ &= \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + C \end{aligned}$$

6. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\sqrt[4]{\operatorname{sen}^3 x}} \; dx$

Teniendo en cuenta que $\operatorname{sen}(2\alpha) = 2 \operatorname{sen}\alpha \; \cos\alpha$ resulta

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2 \operatorname{sen} x \; \cos x}{\sqrt[4]{\operatorname{sen}^3 x}} \; dx \\ & \quad (\text{Cambio: } \operatorname{sen} x = t^4 \rightarrow \cos x \; dx = 4t^3 dt) \\ \rightarrow I &= \int \frac{2t^4 \cdot 4t^3}{t^3} dt = 8 \int t^4 dt = 8 \frac{t^5}{5} + C = \frac{8}{5} \sqrt[4]{\operatorname{sen}^5 x} + C \end{aligned}$$

7. Hallar $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 x \; dx$

$$\begin{aligned} I &= \int (\operatorname{sen}^2 x)^2 \; dx = \int \left(\frac{1 - \cos(2x)}{2} \right)^2 \; dx \\ &= \frac{1}{4} \int \big(1 - 2\cos(2x) + \cos^2(2x)\big) \; dx \\ &= \frac{1}{4} \int \left(1 - 2\cos(2x) + \frac{1 + \cos(4x)}{2}\right) \; dx \\ &= \frac{1}{4} \left(x - \operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{2}(x + \frac{1}{4} \operatorname{sen}(4x)) \right) + C \\ &= \frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{32} \operatorname{sen}(4x) + C \end{aligned}$$

8. Hallar $\int \cos^5 x\ dx$

$$\begin{aligned}
I &= \int \cos^5 x\ dx = \int \cos^4 x \cos x\ dx = \int (\cos^2 x)^2 \cos x\ dx \\
&= \int (1-\operatorname{sen}^2 x)^2 \cos x\ dx \\
&\quad (\text{ Cambio: } \operatorname{sen} x = t \to \cos x\ dx = dt) \\
\to I &= \int (1-t^2)^2 dt = \int (1-2t^2+t^4) dt \\
&= t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 + C \\
&= \operatorname{sen} x - \frac{2}{3}\operatorname{sen}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x + C
\end{aligned}$$

9. Hallar $\int \operatorname{sen}^7 x\ dx$

Como el exponente es impar:

$$\begin{aligned}
I &= \int \operatorname{sen}^7 x\ dx = \int \operatorname{sen}^6 x \operatorname{sen} x\ dx = \int (1-\cos^2 x)^3 \operatorname{sen} x\ dx \\
&\quad (\text{ Cambio: } \cos x = t \to -\operatorname{sen} x\ dx = dt) \\
I &= -\int (1-t^2)^3 dt = -\int (1-3t^2+3t^4-t^6) dt \\
&= -t + t^3 - 3\frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + C \\
&= -\cos x + \cos^3 x - \frac{3}{5}\cos^5 x + \frac{1}{7}\cos^7 x + C
\end{aligned}$$

10. Resolver la integral $\int \frac{40}{\tan^2 x - 2\tan x - 3}\ dx$

Cambio: $\tan x = t \to x = \arctan t \to \ dx = \frac{1}{t^2+1}dt$ por lo que la integral se transforma en $I = \int \frac{40}{t^2-2t-3}\frac{1}{t^2+1}dt$

El integrando es una función racional: $t^2-2t-3=0 \to t=-1,\ t=3$:

$$\frac{40}{(t^2-2t-3)(t^2+1)} = \frac{40}{(t+1)(t-3)(t^2+1)} = \frac{A}{t+1}+\frac{B}{t-3}+\frac{Ct+D}{t^2+1}$$

$$= \frac{A(t-3)(t^2+1) + B(t+1)(t^2+1) + (Ct+D)(t+1)(t-3)}{(t+1)(t-3)(t^2+1)}$$

$= A(t-3)(t^2+1) + B(t+1)(t^2+1) + (Ct+D)(t+1)(t-3) = 40$

Para $t = -1$: $-8A = 40 \to A = -5$

Para $t = 3$: $40B = 40 \to B = 1$

Para $t = 0$: $-3A + B - 3D = 40 \to D = -8$

Para $t = 1$: $-4A + 4B + 2C + 2D = 40 \to C = 16$

Por lo tanto:

$I = \displaystyle\int \left(\frac{-5}{t+1} + \frac{1}{t-3} + \frac{16t}{t^2+1} + \frac{-8}{t^2+1} \right) dt$

$= -5\ln(t+1) + \ln(t-3) + 8\ln(t^2+1) - 8\arctan t + K$

$= -5\ln(\tan x + 1) + \ln(\tan x - 3) - 16\ln\cos x - 8x + K$ puesto que

$\tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} \to \ln(\tan^2 x + 1) = \ln\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) = -2\ln(\cos x)$

10.5. INTEGRACIÓN DE FUNCIONES IRRACIONALES

Se trata de resolver integrales de funciones que contienen la expresión $\sqrt{ax^2 + Bx + C}$.

El método general consiste en eliminar el término lineal del polinomio de segundo grado con lo que la expresión anterior queda en la forma $\sqrt{a\left(x+\dfrac{B}{2a}\right)^2 + \left(C - \dfrac{B^2}{4a}\right)}$, o en forma más reducida $\sqrt{a(x+b)^2 + c}$ y, a partir de este punto, seguir como se indica a continuación.

Según los signos de a y c, estas integrales se pueden resolver de la siguiente forma:

- $a > 0$ y $c > 0$: cambio $x + b = \sqrt{\dfrac{c}{a}}\ \tan t$ y tener en cuenta que $\tan^2 t + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 t}$.

  También se puede hacer el cambio $x + b = \sqrt{\dfrac{c}{a}}\ \operatorname{senh} t$ y recordar que $\operatorname{senh}^2 t + 1 = \cosh^2 t$.

- $a > 0$ y $c < 0$: cambio $x + b = \sqrt{\dfrac{-c}{a}}\ \sec t$ teniendo en cuenta que $\sec^2 t - 1 = \tan^2 t$.

  También se puede hacer $x+b = \sqrt{\dfrac{-c}{a}}\ \cosh t$ siendo $\cosh^2 t - 1 = \operatorname{senh}^2 t$.

- $a < 0$ y $c > 0$: cambio $x + b = \sqrt{\dfrac{c}{-a}}\ \operatorname{sen} t$.

  También se puede hacer $x + b = \sqrt{\dfrac{c}{-a}}\ \cos t$ con $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$.

En caso de una integral de la forma $\dfrac{mx+n}{\sqrt{Ax^2 + Bx + C}}\,dx$, se puede resolver también de forma parecida a como se hizo en la integración de una función racional de la forma $\int \frac{mx+n}{Ax^2+Bx+C}\ dx$. En este caso, la descomposición del integrando conduce a dos integrales inmediatas la primera de las cuales es $a\sqrt{Ax^2+Bx+C}$, mientras que la segunda es un arco seno, argumento seno hiperbólico o argumento coseno hiperbólico, dependiendo de los signos de los coeficientes.

Ejemplo 10.29 $\int \sqrt{5-4x^2+8x}\ dx$

Hay que expresar el radicando como suma de cuadrados:
$-4x^2+8x+5 = -4(x+a)^2+b = -4x^2-8ax-4a^2+b$.
Igualando los coeficientes en ambos miembros se obtiene $-8a = 8 \rightarrow a = -1$; $-4a^2+b = 5 \rightarrow b = 9$. En consecuencia $I = \int \sqrt{9-4(x-1)^2}\ dx$. Hacemos el cambio de variable $x-1 = \frac{3}{2}\operatorname{sen} t \rightarrow\ dx = \frac{3}{2}\cos t dt$:

$$
\begin{aligned}
I &= \int \sqrt{9-9\operatorname{sen}^2 t}\ \frac{3}{2}\cos t dt = \frac{3}{2}\int \sqrt{9(1-\operatorname{sen}^2 t)}\cos t dt \\
&= \frac{9}{2}\int \cos^2 t dt = \frac{9}{2}\int \frac{1+\cos(2t)}{2} dt \\
&= \frac{9}{4}(t+\frac{\operatorname{sen}(2t)}{2})+C = \frac{9}{4}\left(\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{2(x-1)}{3}\right)+\operatorname{sen} t\cos t\right)+C \\
&= \frac{9}{4}\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{2(x-1)}{3}\right)+\frac{9}{4}\frac{2(x-1)}{3}\sqrt{1-\left(\frac{2(x-1)}{3}\right)^2}+C \\
&= \frac{9}{4}\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{2x-2}{3}\right)+\frac{2x-2}{4}\sqrt{5-4x^2+8x}+C
\end{aligned}
$$

Ejemplo 10.30 $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4x+13)^3}}$

Expresar el radicando como suma de cuadrados:
$x^2+4x+13 = (x+a)^2+b = x^2+2ax+a^2+b$. Igualando coeficientes en ambos miembros se obtiene $a = 2$ y $b = 9$ por lo que $I = \int \frac{dx}{\sqrt{((x+2)^2+9)^3}}$.

Mediante el cambio de variable $x + 2 = 3\tan t \rightarrow \quad dx = 3(1 + \tan^2 t)dt$ y teniendo en cuenta que $1 + \tan^2 a = \dfrac{1}{\cos^2 a}$, la integral se transforma en

$$\begin{aligned}
I \quad &= 3\int \frac{(1+\tan^2 t)dt}{27\sqrt{(1+\tan^2 t)^3}} = \frac{1}{9}\int \cos t dt \\
&= \frac{1}{9}\operatorname{sen} t + C = \frac{1}{9}\frac{\tan t}{\sqrt{1+\tan^2 t}} + C = \frac{1}{9}\frac{\frac{x+2}{3}}{\sqrt{1+\left(\frac{x+2}{3}\right)^2}} + C \\
&= \frac{1}{9}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+13}} + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 10.31 $\displaystyle\int \frac{2x+3}{\sqrt{4x-x^2}}\, dx$

Primera forma:

$-x^2 + 4x = -(x+a)^2 + b = -x^2 - 2ax - a^2 + b \rightarrow a = -2, \; b = 4$

$I = \displaystyle\int \frac{2x+3}{\sqrt{4-(x-2)^2}}\, dx$

Cambio: $x-2 = 2\operatorname{sen} t \rightarrow x = 2+2\operatorname{sen} t \rightarrow \; dx = 2\cos t dt, \; t = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x-2}{2}\right)$

por lo que

$I = \displaystyle\int \frac{4\operatorname{sen} t + 7}{\sqrt{4-4\operatorname{sen}^2 t}} 2\cos t dt = \int \frac{4\operatorname{sen} t + 7}{2\cos t} 2\cos t dt = -4\cos t + 7t + C.$

Teniendo en cuenta que $\cos^2 t = 1 - \operatorname{sen}^2 t = 1 - \left(\frac{x-2}{2}\right)$, resulta finalmente

$I = -2\sqrt{4x-x^2} + 7\operatorname{arc\,sen}\left(\dfrac{x-2}{2}\right) + C.$

Segunda forma:

$$
\begin{aligned}
I &= 2\int \frac{x}{\sqrt{4x-x^2}}dx + 3\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}} \\
&= \frac{2}{-2}\int \frac{-2x+4-4}{\sqrt{4x-x^2}}dx + 3I_1 = -\int \frac{-2x+4}{\sqrt{4x-x^2}}dx + 4I_1 + 3I_1 \\
&= -2\sqrt{4x-x^2} + 7I_1 \\
I_1 &: -x^2+4x = -(x+a)^2+b = -x^2-2ax-a^2+b \to a=-2,\ b=4 \to \\
I_1 &= \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-2)^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x-2}{2}\right)^2}} = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x-2}{2}\right) \\
I &= -2\sqrt{4x-x^2} + 7\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x-2}{2}\right) + C
\end{aligned}
$$

10.6. EJERCICIOS PROPUESTOS

Resolver las integrales que se proponen a continuación:

1. $\displaystyle\int (2x^3 - 7x^2 + 8x^{-3} + 5x^{-4/9})\ dx$

2. $\displaystyle\int (2x^4 - 3x^{-2} + 7x^{-1/3} + 5x^{2/9})\ dx$

3. $\displaystyle\int \left(2x^3 + \frac{5}{4x^2} - \frac{7}{\sqrt{x^3}} + \frac{2}{\sqrt[5]{3x^4}}\right)\ dx$

4. $\displaystyle\int \left(\frac{3x^2}{5\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{7x^3}}{\sqrt[3]{2x^4}}\right)\ dx$

5. $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x - 3}\ dx$

6. $\displaystyle\int \sqrt{x}(2x+1)\ dx$

7. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}\ dx$

8. $\displaystyle\int (x+3)\cos(2x-5)\ dx$

9. $\displaystyle\int \frac{3x^2 - 5x + 8}{x-2}\ dx$

10. $\displaystyle\int \frac{x+8}{x^2 + x - 2}\ dx$

11. $\displaystyle\int \frac{4x^2 + 3x + 3}{2x^2 + 5x - 12}\ dx$

12. $\displaystyle\int \frac{2x^2 + 15x - 7}{2x^2 + 3x - 2}\ dx$

13. $\displaystyle\int \frac{6x^3 + x^2 - 3x - 2}{3x^2 - x - 2}\ dx$

14. $\displaystyle\int \frac{x^2-2}{x^2-2x+1}\, dx$

15. $\displaystyle\int \frac{5x-7}{x^2+4x+4}\, dx$

16. $\displaystyle\int \frac{3x-5}{x^2+6x+13}\, dx$

17. $\displaystyle\int \frac{5x+7}{x^2-8x+41}\, dx$

18. $\displaystyle\int \frac{3-4x}{4x^2-4x+17}\, dx$

19. $\displaystyle\int \frac{3x-1}{4x^2+12x+35}\, dx$

20. $\displaystyle\int \frac{62-6x-x^2}{x^3+3x^2-10x-24}\, dx$

21. $\displaystyle\int \frac{4x^2-3x-26}{2x^3-x^2-4x+3}\, dx$

22. $\displaystyle\int \frac{197+31x-4x^2}{x^3-x^2+x+39}\, dx$

23. $\displaystyle\int \frac{x^2+5x-6}{x^3-x^2+3x+5}\, dx$

24. $\displaystyle\int \frac{84-23x-x^2}{x^3+4x^2+6x-36}\, dx$

25. $\displaystyle\int \frac{20x+34}{x^3+3x^2+9x-13}\, dx$

26. $\displaystyle\int \frac{5x^2-7x+66}{x^3-4x^2+22x+68}\, dx$

27. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^4 x}\, dx$

28. $\displaystyle\int \tan^2 x\, dx$

29. $\displaystyle\int \tan^6 x\ dx$

30. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos x}\ dx$

31. $\displaystyle\int x\tan^2 x\ dx$

32. $\displaystyle\int \sqrt{3+2x-x^2}\ dx$

33. $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{5-x^2}}\ dx$

34. $\displaystyle\int \frac{1-x}{\sqrt{5-x^2}}\ dx$

35. $\displaystyle\int \frac{1-3x}{\sqrt{4x^2-12x+13}}\ dx$

36. $\displaystyle\int \sqrt{12x-x^2-35}\ dx$

37. $\displaystyle\int \frac{x+2}{\sqrt{4+2x-x^2}}\ dx$

38. $\displaystyle\int \frac{3x-1}{\sqrt{5+2x+x^2}}\ dx$

RESPUESTAS:

1. $I = \frac{1}{2}x^4 - \frac{7}{3}x^3 - 4x^{-2} + 9x^{5/9} + C$

2. $I = \frac{2}{5}x^5 + 3x^{-1} + \frac{21}{2}x^{2/3} + \frac{45}{11}x^{11/9} + C$

3. $I = \frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{4}x^{-1} + 14x^{-1/2} + \frac{10}{\sqrt[5]{3}}x^{1/5} + C$

4. $I = \frac{6}{25}x^{5/2} - \frac{6\sqrt{7}}{7\sqrt[3]{2}}x^{7/6} + C$

5. $I = \ln(e^x - 3) + C$

6. $I = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$

7. $I = 2\sqrt{\operatorname{sen} x} + C$

8. $I = \frac{1}{2}(x+3)\operatorname{sen}(2x-5) + \frac{1}{4}\cos(2x-5) + C$

9. $I = \frac{3}{2}x^2 + x + 10\ln(x-2) + C$

10. $I = 3\ln(x-1) - 2\ln(x+2) + C$

11. $I = 2x + \frac{3}{2}\ln(2x-3) - 5\ln(x+4) + C$

12. $I = x + \frac{1}{5}\ln(2x-1) + \frac{29}{5}\ln(x+2) + C$

13. $I = x^2 + x + \frac{2}{5}\ln(x-1)\frac{4}{15}\ln(3x+2) + C$

14. $I = x + 2\ln(x-1) + 2\frac{1}{x-1} + C$

15. $I = 5\ln(x+2) + \frac{17}{x+2} + C$

16. $I = \frac{3}{2}\ln(x^2+6x+13) - 7\arctan(\frac{x+3}{2}) + C$

17. $I = \frac{5}{2}\ln(x^2-8x+41) + \frac{27}{6}\arctan(\frac{x+4}{5}) + C$

18. $I = -\frac{1}{2}\ln(4x^2-4x+17) + \frac{1}{8}\arctan(\frac{2x-1}{4}) + C$

19. $I = \dfrac{3}{8}\ln(4x^2+12x+35) - \dfrac{11}{16}\arctan\left(\dfrac{2x+3}{4}\right) + C$

20. $I = \ln(x-3) - 7\ln(x+2) + 5\ln(x+4) + C$

21. $I = 3\ln(x-1) + 5\frac{1}{x-1} - \ln(2x+3) + C$

22. $I = 2\ln(x+3) - 3\ln(x^2-4x+13) + 15\arctan\left(\frac{x-2}{3}\right) + C$

23. $I = -5\ln(x+1) + \frac{9}{2}\ln(x^2-2x+5) + 5\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + C$

24. $I = \ln(x-2) - \ln(x^2+6x+18) - 9\arctan\left(\dfrac{x+3}{3}\right) + C$

25. $I = 3\ln(x-1) - \dfrac{3}{2}\ln(x^2+4x+13) + \dfrac{11}{3}\arctan\left(\dfrac{x+2}{3}\right) + C$

26. $I = 2\ln(x+2) + \dfrac{3}{2}\ln(x^2-6x+34) + \dfrac{8}{5}\arctan\left(\dfrac{x-3}{5}\right) + C$

27. $I = \dfrac{1}{3\cos^3 x} - \dfrac{1}{\cos x} + C$

28. $I = \tan x - x + C$

29. $I = \dfrac{\tan^5 x}{5} - \dfrac{\tan^3 x}{3} + \tan x - x + C$

30. $I = x - \operatorname{sen} x + C$

31. $I = x\tan x + \ln\cos x - \frac{1}{2}x^2 + C$

32. $I = 2\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x-1}{2}\right) + \frac{x-1}{2}\sqrt{3+2x-x^2} + C$

33. $I = -\sqrt{5-x^2} + \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) + C$

34. $I = \sqrt{5-x^2} + \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) + C$

35. $I = -\frac{3}{4}\sqrt{13-12x+4x^2} + \frac{7}{4}\operatorname{arg\,senh}(\frac{1}{2}(3-2x)) + C$

36. $I = \frac{1}{2}(x-6)\sqrt{12x-x^2-35} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen}(x-6) + C$

37. $I=-\sqrt{4+2x-x^2}+3\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x-1}{\sqrt{5}}\right)+C$

38. $I=3\sqrt{5+2x+x^2}-4\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right)+C$

Capítulo 11

INTEGRAL DEFINIDA

Este capítulo está dedicado al concepto fundamental en Cálculo Infinitesimal de *Integral Definida*. Es ésta una de las partes de mayor aplicación práctica de la asignatura de Cálculo Matemtico con uso frecuente en Física, Electricidad, Mecánica, Estadística, Biología, etc.

Se empieza el capítulo estudiando el concepto de integral de Cauchy-Riemann, seguido de cierto número de propiedades de esta integral para pasar a continuación a las aplicaciones de la integral definida al cálculo de áreas y longitudes en el plano y de volúmenes de superficies de revolución.

11.1. INTEGRAL DEFINIDA

11.1.1. Concepto de integral de Cauchy-Riemann

Sea $y = f(x)$ una función continua en el intervalo $[a, b]$. Para simplificar los cálculos, supondremos que $f(x)$ es positiva para todo $x \in [a, b]$. Se efectúa una partición del intervalo $[a, b]$ en n subintervalos mediante los puntos $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ siendo la longitud de cada intervalo $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$ Es evidente que $\sum_{1}^{n} \Delta x_i = b - a$ es la longitud del intervalo $[a, b]$

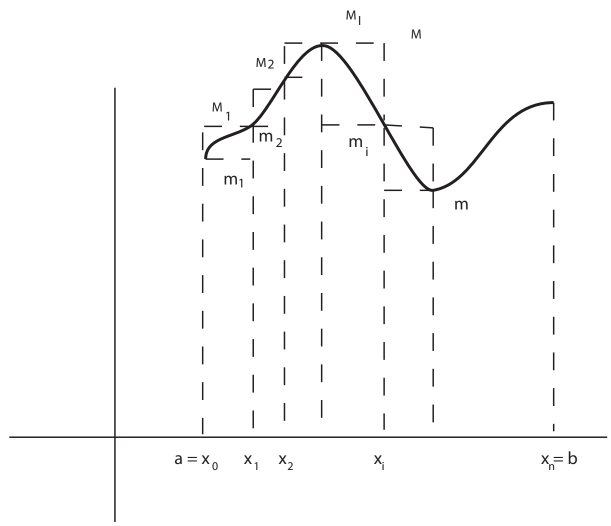


Figura 11.1: Integral de Cauchy-Riemann

Sean m_i y M_i el mínimo y el máximo respectivamente de la función en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ por lo que lógicamente cada m_i es menor o igual que el correspondiente M_i

En cada intervalo se pueden formar entonces dos rectángulos cuya base es la misma para ambos y de longitud Δx_i, sus alturas respectivas son m_i y M_i y cuyas áreas son $m_i \Delta x_i$ y $M_i \Delta x_i$ respectivamente.

Formemos entonces la suma de todas las áreas de los rectángulos pequeños

$$\underline{S}_n = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \cdots + m_n \Delta x_n = \sum_1^n m_i \Delta x_i$$

y la suma de las áreas de los rectángulos grandes

$$\overline{S}_n = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \cdots + M_n \Delta x_n = \sum_1^n M_i \Delta x_i$$

La primera suma, $\underline{S}_n$, se llama suma integral inferior y la segunda, $\overline{S}_n$, suma integral superior y verifican la propiedad de que $\underline{S}_n \leq \overline{S}_n$

Por otra parte, sean m y M el mínimo y el máximo respectivamente de la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$. Entonces, para todo valor de $i = 1, 2, \ldots, n$ es $m \leq m_i \leq M_i \leq M$ por lo que

a) $\underline{S}_n = \sum m_i \Delta x_i \geq \sum m \Delta x_i = m \sum \Delta x_i = m(b - a)$

b) $\overline{S}_n = \sum M_i \Delta x_i \leq \sum M \Delta x_i = M \sum \Delta x_i = M(b - a)$

Por lo tanto $m(b - a) \leq \underline{S}_n \leq \overline{S}_n \leq M(b - a)$

Geométricamente, estas desigualdades indican lo siguiente:

- $m(b - a)$ es el área del rectángulo interior de base el intervalo $[a, b]$ y altura el valor mínimo de la función en dicho intervalo $[a, b]$
- $\underline{S}_n$ es el área de la poligonal interior de bases Δx_i y alturas respectivas el mínimo valor de la función en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$
- $\overline{S}_n$ es el área de la poligonal exterior de bases Δx_i y alturas respectivas el valor máximo de la función en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$
- $M(b - a)$ es el área del rectángulo exterior de base el intervalo $[a, b]$ y altura el valor máximo de la función en $[a, b]$.

A continuación, en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i)$ elegimos un punto interior α_i de imagen $f(\alpha_i)$

Existe ahora un nuevo rectángulo en cada subintervalo cuya base es la misma que antes, Δx_i, y su altura $f(\alpha_i)$ por lo que su área es $f(\alpha_i)\Delta x_i$

Se obtiene así en cada subintervalo una figura parecida a la que se indica en 11.1.1:

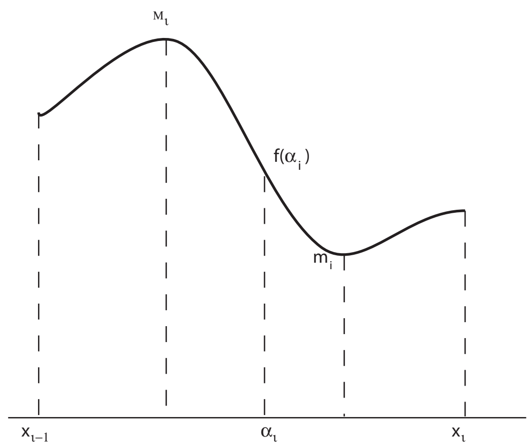


Figura 11.2: Alturas en la integral de Cauchy-Riemann

Como, evidentemente, es $m_i \leq f(\alpha_i) \leq M_i$ también es
$m_i \Delta x_i \leq f(\alpha_i)\Delta x_i \leq M_i \Delta x_i$ por lo que resulta que
$\sum m_i \Delta x_i \leq \sum f(\alpha_i)\Delta x_i \leq \sum M_i \Delta x_i$

Finalmente, si indicamos por $S_n = \sum f(\alpha_i)\Delta x_i$ se verificará que $\underline{S}_n \leq S_n \leq \overline{S}_n$. Es evidente que estas sumas dependen de la partición efectuada en el intervalo $[a, b]$, por lo que para otra partición diferente se obtienen sumas diferentes. Como la longitud de los subintervalos no es la misma para todos ellos, llamemos $\max \Delta x_i$ a la mayor longitud de los subintervalos considerados en cada partición del intervalo $[a, b]$. Consideremos entonces cualquier partición en un número infinito numerable de subintervalos tales que $\max \Delta x_i \to 0$. Lógicamente, mediante este proceso, la relación $\max \Delta x_i \to 0$ se verifica sólo si $n \to \infty$, y en tal caso, también $\lim(\overline{S}_n - \underline{S}_n) = 0$ y las tres sumas de áreas consideradas hasta el momento coinciden:

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \overline{S}_n$$

Se dice entonces que la función $f(x)$ es integrable en el sentido de Riemann en el intervalo $[a, b]$, si para cada partición del intervalo $[a, b]$ tal que $max \Delta x_i \to 0$ cualesquiera que sean los puntos $\alpha_i \in [x_{i-1}, x_i]$, la suma

$\sum_1^n f(\alpha_i)\Delta x_i = S_n$ tiende a un mismo límite I llamado *integral definida* de la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ y se indica por

$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{max\ \Delta x_i \to 0} \sum_1^n f(\alpha_i)\Delta x_i$$

Los números a y b se llaman, respectivamente, límite inferior y límite superior de la integral y el intervalo $[a, b]$ es el intervalo de integración.

Dada la construcción que se ha efectuado, es evidente que una integral definida representa el área encerrada por la curva $y = f(x)$, el eje de abscisas y las rectas verticales $x = a$, $x = b$.

11.1.2. Funciones integrables

A continuación indicamos qué tipo de funciones son siempre integrables, aunque hay otras funciones particulares que no constan en esta relación que también lo son aunque no en sentido general.
Son integrables en un intervalo cerrado

1. Toda función continua.
2. Toda función monótona y acotada.
3. Toda función acotada con un número finito (o infinito numerable) de discontinuidades de primera especie.

11.1.3. Propiedades de la integral definida

No son muy difíciles de demostrar las propiedades que indicamos a continuación:

1. *Inversión de los límites*

   Si se invierten los límites de una integral, ésta cambia de signo:

   $$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx \tag{11.1}$$

2. *Igualdad de los límites*

   Si los dos límites de una integral son iguales, la integral es nula:

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \tag{11.2}$$

3. *Propiedad lineal de la integral definida*

   La integral de una suma de funciones es la suma de las integrales y la integral de una constante por una función es igual a la constante por la integral de la función:

$$\int_a^b (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x))dx = c_1 \int_a^b f_1(x)dx + c_2 \int_a^b f_2(x)dx \tag{11.3}$$

4. *Conservación de la desigualdad*

   Si $f(x) \leq g(x),\ \forall x \in [a, b]$ entonces

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \tag{11.4}$$

5. *Acotación de la integral definida*

   Si m es el mínimo de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ y M es el máximo, entonces

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \tag{11.5}$$

6. *Teorema del valor medio para integrales*

   Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, existe un valor $x_0 \in]a, b[$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(x_0) \tag{11.6}$$

   El valor $f(x_0)$ se llama valor promedio de la integral de la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$.

7. *Propiedad aditiva del intervalo de integración*

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx \tag{11.7}$$

8. *Teorema fundamental del Cálculo Integral*

   Si la derivada de la función $F(x)$ es $f(x)$, entonces

$$\int_a^x f(x)dx = F(x) \tag{11.8}$$

9. *Regla de Barrow (o fórmula de Newton-Leibniz)*

   Si $F'(x) = f(x)$ entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{11.9}$$

10. *Derivada de la función integral*

$$\text{Si } F(x) = \int_a^{v(x)} f(t)dt \text{ entonces } F'(x) = f[v(x)] \cdot v'(x) \tag{11.10}$$

11. *Integración de funciones pares e impares*

    Si $f(x)$ es una función par en el intervalo $[-a, a]$ (la curva $y = f(x)$ es simétrica con respecto al eje vertical), entonces

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx \tag{11.11}$$

   Si $f(x)$ es una función impar en el intervalo $[-a, a]$ (la curva $y = f(x)$ es simétrica con respecto al origen), entonces

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0 \tag{11.12}$$

Por lo tanto, según las propiedades 5.8 y 5.9, para resolver una integral definida, se halla la primitiva de la función a integrar en la forma estudiada en el capítulo anterior, se sustituye la variable por el valor del límite superior, luego por el valor del límite inferior y finalmente se restan estos dos resultados en este orden.

Ejemplo 11.1 *Resolver la integral definida* $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x^2+10x+4}{x^3+x^2-4x-4}dx$

Aplicando el método de Ruffini se encuentra que las raíces del denomindaor son $x=-1$, $x=-2$ y $x=2$, simples. Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
& \frac{3x^2+10x+4}{x^3+x^2-4x-4} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x-2} \\
= \quad & \frac{A(x+2)(x-2)+B(x+1)(x-2)+C(x+1)(x+2)}{x^3+x^2-4x-4} \\
\to \quad & A(x+2)(x-2)+B(x+1)(x-2)+C(x+1)(x+2) \\
= \quad & 3x^2+10x+4 \\
\text{Para} \quad & x=-2 \to 4B=-4 \to B=-1 \\
& x=2 \to 12C=36 \to C=3 \\
& x=-1 \to -3A=-3 \to A=1 \\
I \quad = \quad & \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}-\frac{3}{2-x}\right)dx \\
= \quad & [\ln(x+1)-\ln(x+2)+3\ln(2-x)]_0^1 \\
= \quad & \ln 2-\ln 3+\ln 2-3\ln 2 = -\ln 3-\ln 2
\end{aligned}
$$

Con este ejemplo se muestra que al resolver una integral definida no es necesario añadir la constante de integración ya que ésta se anularía al restarla consigo misma tras aplicar la regla de Barrow.

Si en una integral definida se efectúa un cambio de variable, entonces se puede actuar de dos formas: o bien se resuelve la integral como si fuera indefinida y al terminar se aplica la regla de Barrow, o bien se va cambiando los límites de integración conforme se van haciendo cambios de variables.

Ejemplo 11.2 *Resolver la integral* $\displaystyle\int_{\frac{3}{4}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$

Cambio $x=t^2 \to dx=2tdt$

Además $t=\sqrt{x}$ por lo que los límites cambian de esta forma:

$x = 1 \to t = 1$
$x = \frac{3}{4} \to t = \frac{\sqrt{3}}{2}$
Por lo tanto, sustituyendo en la integral propuesta y teniendo en cuenta que los ángulos se deben expresar en radianes, resulta

$$I = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} \frac{2tdt}{t\sqrt{1-t^2}} = [2 \operatorname{arc\,sen} t]_{\sqrt{3}/2}^{1} = 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$$

11.1.4. Área encerrada por una curva plana

Hemos demostrado en la primera sección de este capítulo que si $f(x)$ es una función continua y positiva en el intervalo $[a, b]$, entonces la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ representa el área encerrada por la curva $y = f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = a$, $x = b$. Por otra parte, si la función cambia de signo dentro del intervalo de integración, esto significa que la curva ha pasado al otro lado del eje de abscisas por lo que el área cambiará de signo. Para evitar este problema, se efectúa el siguiente artificio: el intervalo de integración se divide en subintervalos en los que la función $f(x)$ mantiene constante el signo, para lo cual basta hallar las raíces de la ecuación $f(x) = 0$ y, tras calcular el valor de la integral en cada subintervalo, sumar los valores absolutos de estas áreas parciales.

Área de una curva plana en coordenadas

1. Cartesianas: Área $= \displaystyle\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$
2. Paramétricas: Área $= \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} y(t)x'(t)dt$
3. Polares: Área $= \displaystyle\frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1} \rho^2(\theta)d\theta$

Ejemplo 11.3 Cartesianas: *Hallar el área comprendida entre la curva* $f(x) = x^2 - 3x + 2$*, el eje de abscisas y las rectas* $x = 0$ *y* $x = 4$

Se resuelve la ecuación $f(x) = 0 \to x^2 - 3x + 2 = 0 \to x = 1,\ x = 2$, con lo que el intervalo original queda dividido en los subintervalos
$[0, 4] = [0, 1) \cup [1, 2) \cup [2, 4]$. Luego

$$\begin{aligned} A &= \int_0^4 f(x)dx = \left|\int_0^1 (x^2 - 3x + 2)dx\right| + \left|\int_1^2 (x^2 - 3x + 2)dx\right| \\ &+ \left|\int_2^4 (x^2 - 3x + 2)dx\right| = \\ &= \left|\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x\right]_0^1\right| + \left|\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x\right]_1^2\right| + \left|\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x\right]_2^4\right| \\ &= \frac{5}{6} - \frac{1}{6} + \frac{9}{2} = \frac{31}{6} \end{aligned}$$

Ejemplo 11.4 *Hallar el área encerrada entre la primera onda de la sinusoide y el eje horizontal.*

La sinusoide es la curva corresspondiente a la función $y = \operatorname{sen} x$ y la primera onda es la curva comprendida entre 0 y 2π según muestra la Figura 11.3.

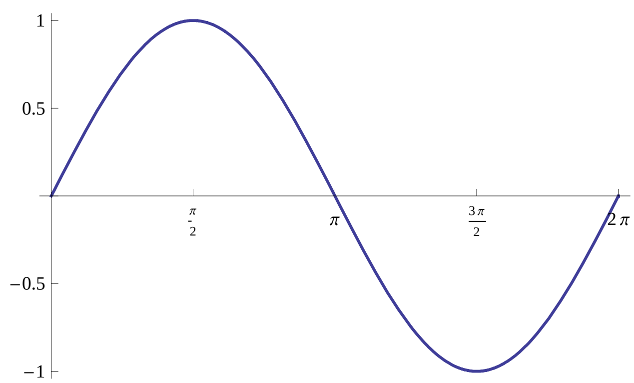


Figura 11.3: Sinusoide

$$\text{Área} = \left|\int_0^\pi \operatorname{sen} x dx\right| + \left|\int_\pi^{2\pi} \operatorname{sen} x dx\right| = \left|[-cosx]_0^\pi\right| + \left|[-cosx]_\pi^{2\pi}\right| = 2 + 2 = 4$$

Ejemplo 11.5 Paramétricas: *Hallar el área limitada por la curva* $\left(t^2 + 3t + 2, \dfrac{t^2 - 2t}{t + 1}\right)$ *y el eje de abscisas.*

Para hallar los puntos de corte de la curva con el eje X se resuelve la ecuación $y(t) = 0 \to \frac{t^2-2t}{t+1} = 0 \to t^2 - 2t = 0 \to t = 0,\ t = 2$ (Figura 11.4). Por lo tanto

$$\begin{aligned} I &= \int_{t_0}^{t_1} y \cdot dx = \int_0^2 \frac{t^2-2t}{t+1}(2t+3)dt = \int_0^2 \frac{2t^3-t^2-6t}{t+1}dt \\ &= \int_0^2 \left(2t^2 - 3t - 3 + \frac{3}{t+1}\right) dt = \left[2\frac{t^3}{3} - 3\frac{t^2}{2} - 3t + 3\ln(t+1)\right]_0^2 \\ &= \frac{16}{3} - 6 - 6 + 3\ln 3 \to \text{ Área } = 3{,}37 \end{aligned}$$

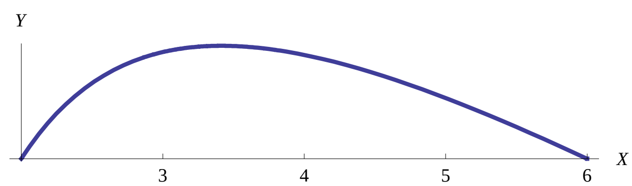


Figura 11.4: Área en una curva paramétrica

Ejemplo 11.6 Polares: *Hallar el área encerrada por un pétalo de la Rosa de* 4 *hojas* $\rho = 4\,\text{sen}(2\theta)$

La gráfica de esta función tiene la forma (Figura 11.5)

Los límites de θ para el primer bucle son: $4\,\text{sen}(2\theta) = 0 \to \theta = 0,\ \theta = \frac{\pi}{2}$ por lo que

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\,\text{sen}(2\theta))^2 d\theta = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^2(2\theta)d\theta \\ &= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(4\theta)}{2}d\theta = 4\left[\theta - \frac{\text{sen}(4\theta)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi \end{aligned}$$

Si la sección plana de la cual se quiere calcular el área está encerrada por dos curvas, basta hallar las áreas limitadas entre cada una de ellas y el eje de

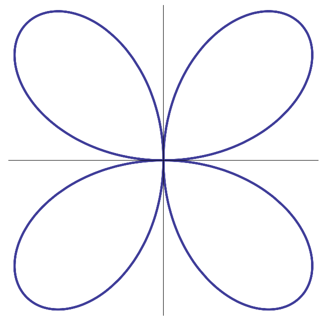


Figura 11.5: Rosa de 4 hojas

abscisas y restarlas, sin olvidar que la respuesta ha de ser siempre un número positivo, es decir:

$$\text{Área} = \left| \int_a^b f_1(x)dx - \int_a^b f_2(x)dx \right| = \left| \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx \right| \qquad (11.13)$$

Ejemplo 11.7 *Hallar el área encerrada entre las parábolas* $y = x^2$, $x = y^2$

Para hallar los puntos de intersección de las dos parábolas, se resuelve el sistema de ecuaciones $y = \sqrt{x},\ y = x^2$, de donde
$x^2 = \sqrt{x} \to x^4 = x \to x^4 - x = 0 \to x(x^3 - 1) = 0$ por lo que los límites de integración son $x = 0$ y $x = 1$ como muestra la Figura 11.6.

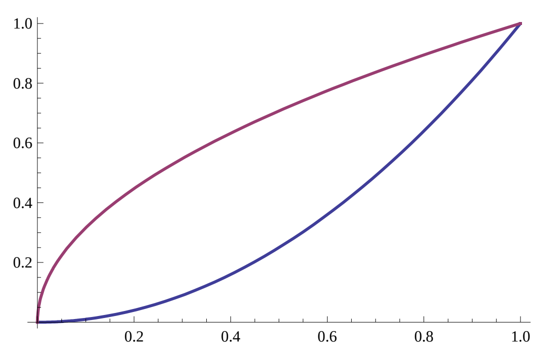


Figura 11.6: Área limitada por las parábolas $y = +\sqrt{x}$, $y = x^2$

Luego, $\text{Área} = \left| \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx \right| = \left| \left[\frac{1}{3/2} x^{3/2} - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 \right| = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

11.1.5. Longitud de un arco de curva

Se puede demostrar que la longitud de un arco de curva se puede hallar mediante la siguiente fórmula, según esté expresada la curva.

Longitud de un arco de curva definida en coordenadas

1. Cartesianas: Longitud $= \displaystyle\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx$
2. Paramétricas: Longitud $= \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x')^2+(y')^2}\, dt$
3. Polares: Longitud $= \displaystyle\frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{\rho^2+\rho'^2}\, d\theta$

Ejemplo 11.8 *Hallar la fórmula para el cálculo de la longitud de la circunferencia.*

En coordenadas cartesianas, la ecuación de la circunferencia es
$x^2+y^2=r^2 \to y=\sqrt{r^2-x^2} \to y'=\dfrac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}$ por lo que la longitud de la circunferencia es

$$\begin{aligned} L &= 4\int_0^r \sqrt{1+(f'(x))^2}dx = 4\int_0^r \sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}dx = 4\int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}dx \\ &= 4r\left[\operatorname{arc\,sen}(\frac{x}{r})\right]_0^r = 4r\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = 2\pi r \end{aligned}$$

Ejemplo 11.9 *Hallar la longitud de un arco de la cicloide $x(t)=a(t-\operatorname{sen} t)$, $y(t)=a(1-\cos t)$.*

Esta curva tiene la forma de la Figura 11.7
Puesto que $dx=a(1-\cos t)$, $dy=a\operatorname{sen} t$ es

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(a(1-\cos t))^2+(a\operatorname{sen} t)^2}dt = a\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos t)}dt \\ &= a\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos^2\frac{t}{2}+\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}}dt = a\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{2\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}}dt \\ &= 2a\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\frac{t}{2}dt = 4a\left[-\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 8a \end{aligned}$$

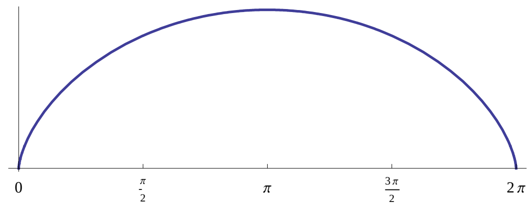


Figura 11.7: Cicloide

Ejemplo 11.10 *Hallar la longitud de la curva* $\rho = a\,\mathrm{sen}^3\left(\frac{\theta}{3}\right)$
La forma de esta curva es la Figura 11.8 y recibe el nombre de séxtica de Cayley.
La función se repite en el intervalo $[0, 3\pi]$ por lo que éstos serán los límites

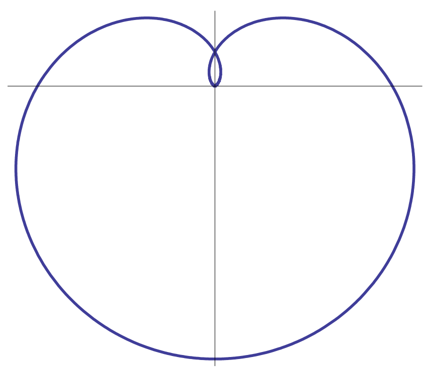


Figura 11.8: Séxtica de Cayley

de integración.

$$\begin{aligned}
\rho' &= 3a\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\theta}{3}\right)\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)\frac{1}{3} = a\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\theta}{3}\right)\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)\\
\rho^2+\rho'^2 &= a^2\,\mathrm{sen}^6\left(\frac{\theta}{3}\right) + a^2\,\mathrm{sen}^4\left(\frac{\theta}{3}\right)\cos^2\left(\frac{\theta}{3}\right) = a^2\,\mathrm{sen}^4\left(\frac{\theta}{3}\right)\\
L &= \int_0^{3\pi}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}d\theta = \int_0^{3\pi} a\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\theta}{3}\right)d\theta\\
&= \frac{a}{2}\int_0^{3\pi}\left(1-\cos\left(\frac{2\theta}{3}\right)\right)d\theta = \frac{a}{2}\left[\theta - \frac{3}{2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\theta}{3}\right)\right]_0^{3\pi} = \frac{3\pi}{2}a
\end{aligned}$$

11.1.6. Área y Volumen de un cuerpo de revolución

De forma semejante a como se hizo para el estudio de la integral definida de Cauchy, se puede hallar que si la curva $y = f(x)$ gira alrededor del eje de abscisas entre los puntos $x = a$ y $x = b$, entonces el área de la superficie de revolución está determinada por la fórmula

$$\text{Área } = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\ dx \tag{11.14}$$

y el volumen del cuerpo engendrado viene determinado por la fórmula

$$\text{Volumen} = \pi \int_a^b f^2(x)dx \tag{11.15}$$

Ejemplo 11.11 *Hallar el área de la superficie generada por la curva* $y = \sqrt{e^x + 1}$ *al girar alrededor del eje de abscisas entre los puntos* $x = 0$ *y* $x = 1$.

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{e^x+1} \to y' = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x+1}} \to 1 + y'^2 = 1 + \frac{e^{2x}}{4(e^x+1)} \\ &= \frac{e^{2x} + 4e^x + 4}{4(e^x+1)} = \frac{(e^x+2)^2}{4(e^x+1)} \\ \text{Área} &= 2\pi \int_0^1 \sqrt{e^x+1}\sqrt{\frac{(e^x+2)^2}{4(e^x+1)}}dx = \pi \int_0^1 (e^x+2)dx \\ &= \pi\left[e^x + 2x\right]_0^1 = \pi(e + 2 - 1) = \pi(e+1) \end{aligned}$$

Ejemplo 11.12 *Hallar el volumen del cuerpo engendrado por la elipse* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ *al girar alrededor del eje horizontal.*

La elipse genera una cuádrica llamada elipsoide de revolución el cual tiene la forma de la Figura 11.9

En primer lugar hallamos los puntos de corte de la elipse con el eje de abscisas: $y = 0 \to x^2 = a^2 \to x = \pm a$. A continuación despejamos y^2 de la ecuación de la elipse con lo que resulta $y^2 = \dfrac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$. Por lo tanto

$$\text{Vol} = \int_{-a}^a y^2dx = 2\pi \int_0^a \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)dx = 2\frac{\pi b^2}{a^2}\left[a^2x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^a = \frac{4}{3}\pi ab^2.$$

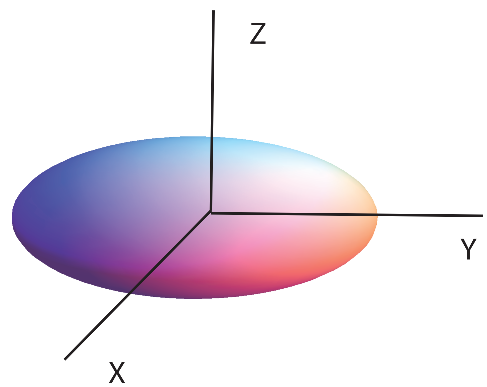


Figura 11.9: Elipsoide de revolución

Hemos tenido en cuenta que y^2 es una función par (simétrica respecto al eje de ordenadas), por lo que $\displaystyle\int_{-a}^{+a} = 2\int_{0}^{a}$ según la fórmula (11.11).

Las siguientes tablas muestran las fórmulas indicadas en este capítulo:

CURVA PLANA

COORDENADAS	**LONGITUD**	**ÁREA**
Cartesianas	$\mathrm{L} = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$	$\mathrm{A} = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx$
Paramétricas	$\mathrm{L} = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$	$\mathrm{A} = \int_{t_0}^{t_1} y(t) x'(t) dt$
Polares	$\mathrm{L} = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\theta$	$\mathrm{A} = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \rho^2 d\theta$

SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN

COORDENADAS	**ÁREA**	**VOLUMEN**
Cartesianas	$\mathrm{A} = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$	$\mathrm{V} = \pi \int_{x_0}^{x_1} f^2(x) dx$

11.1.7. Ejercicios resueltos

1. Resolver las siguientes integrales definidas:

   a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^x(x^2-3x+4)dx$
   Según vimos en la fórmula (10.4) del capítulo anterior, es

$$\begin{aligned} I &= \left[e^x((x^2-3x+4)-(2x-3)+2)\right]_{-1}^{1} \\ &= \left[e^x(x^2-5x+9)\right]_{-1}^{1} \\ &= e(1-5+9)-e^{-1}(1+5+9)=5e-\frac{15}{e} \end{aligned}$$

   b) $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$
   Expresamos el radicando como suma de cuadrados:
   $-x^2+4x=-(x+a)^2+b=-x^2-2ax-a^2+b$ de donde
   $-2a=4 \to a=-2$, $-a^2+b=0 \to b=4$ por lo que
   $4x-x^2=-(x-2)^2+4$. Luego
   $I=\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{dx}{\sqrt{4-(x-2)^2}}$.
   Cambio: $x-2=2\operatorname{sen} t \to dx=2\cos t dt$.
   Además, $t=\operatorname{arc\,sen}\frac{x-2}{2}$ por lo que
   $x=3 \to t=\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$
   $x=1 \to t=\operatorname{arc\,sen}(-\frac{1}{2})=-\frac{\pi}{6}$. Luego
   $I=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{2\cos t dt}{\sqrt{4-4\operatorname{sen}^2 t}}=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} dt=[t]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}=2\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$

   c) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{3x^2-2x^4}{\sqrt{(1-x^2)^3}}dx$
   Cambio: $x=\operatorname{sen} t \to dx=\cos t dt$.
   Por otra parte, $t=\operatorname{arc\,sen} x$ por lo que
   a) $x=\frac{1}{\sqrt{2}} \to t=\operatorname{arc\,sen}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$

b) $x = 0 \to t = \operatorname{arc\,sen} 0 = 0$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3\operatorname{sen}^2 t - 2\operatorname{sen}^4 t}{\sqrt{(\cos^2 t)^3}} \cos t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3(1-\cos^2 t) - 2(1-\cos^2 t)^2}{\cos^2 t} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (3 - 3\cos^2 t - 2 + 4\cos^2 t - 2\cos^4 t)\frac{1}{\cos^2 t} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\frac{1}{\cos^2 t} + 1 - 2\cos^2 t) dt \\ &= \left[\operatorname{tg} t + t - \frac{2}{2}(t + \frac{\operatorname{sen}(2t)}{2})\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Hemos hecho uso de la la fórmula $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos(2\alpha)}{2}$

d) $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

Es una función par, por lo que sólo hallamos la integral en el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$ y aplicamos la fórmula (11.11).

Hacemos el cambio de variable $x = \operatorname{sen} t \to dx = \cos t dt$.

Por otra parte, $x = \operatorname{sen} t \to t = \operatorname{arc\,sen} x \to$ si $x = \frac{1}{2} \to t = \frac{\pi}{6}$.

Luego

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos t dt}{\sqrt{(\cos^2 t)^3}} = 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{\cos^2 t} = 2\left[\operatorname{tg} t\right]_0^{\pi/6} = 2\frac{\sqrt{3}}{3}$$

e) $\displaystyle\int_1^{64} \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt[3]{x}-1} dx$

Cambio: $x = t^6 \to dx = 6t^5 dt$. Para $x = 64$ es $t = \sqrt[6]{64} = 2$ y para

$x = 1$ es $t = 1$. Entonces

$$\begin{aligned}
I &= \int_1^2 \frac{t^2-2}{t^2+1} 6t^5 dt = 6\int_1^2 \frac{t^8-2t^5}{t^2+1} dt \\
&= 6\int_1^2 \left(t^6 - t^4 - 2t^3 + t^2 + 2t - 1 - \frac{2t+1}{t^2+1}\right) dt \\
&= 6\left[\frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} - \frac{t^4}{2} + \frac{t^3}{3} + t^2 - t - \ln(t^2+1) - \operatorname{arc\,tg} t\right]_1^2 \\
&= 6\left(\frac{128}{7} - \frac{32}{5} - \frac{16}{2} + \frac{8}{3} + 4 - 2 - \ln 5 - \operatorname{arc\,tg} 2\right) \\
&\quad -6\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 1 - 1 - \ln 2 - \frac{\pi}{4}\right) = 45'23
\end{aligned}$$

2. Hallar el área encerrada entre la curva $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.

   Basta aplicar directamente la fórmula de la integral definida:

$$\begin{aligned}
\text{Área} &= \int_1^3 \frac{x-1}{x+1} dx = \int_1^3 \left(1 - \frac{2}{x+1}\right) dx = [x - 2\ln(x+1)]_1^3 \\
&= (3 - 2\ln 4) - (1 - 2\ln 2) = 2 - 2\ln 2
\end{aligned}$$

3. Hallar la fórmula del área del círculo.

   Sea la circunferencia de centro el origen y radio r cuya ecuación es $x^2 + y^2 = r^2$. Entonces el área del círculo es cuatro veces el área de un cuadrante, por lo que

$$\begin{aligned}
\text{Área} &= 4\int_0^r f(x)dx = 4\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}dx \\
& \quad \text{Cambio: } x = r\,\mathrm{sen}\,t \\
\rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} dx = r\cos t dt \\ t = \mathrm{arc\,sen}(\frac{x}{r}) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = r \rightarrow t = \mathrm{arc\,sen}\,1 = \frac{\pi}{2} \\ x = 0 \rightarrow t = \mathrm{arc\,sen}\,0 = 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \\
A &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2(1-\mathrm{sen}^2\,t)}\; r\cos t dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\cos^2 t dt \\
&= 4r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2}dt = 2r^2\left[t+\frac{\mathrm{sen}(2t)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 2r^2\frac{\pi}{2} = \pi r^2
\end{aligned}$$

4. Hallar la fórmula para calcular el volumen de la esfera.

   Una esfera puede ser generada por el giro de un circunferencia alrededor de uno de sus diámetros. Por lo tanto, como la ecuación reducida de la circunferencia es $x^2+y^2=r^2$, entonces $y^2=r^2-x^2$ por lo que

$$\mathrm{Vol} = 2\pi\int_0^r (r^2-x^2)dx = 2\left[r^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^r = 2\pi(r^3-\frac{r^3}{3}) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

5. Hallar el volumen del cuerpo generado al girar la curva $y = \mathrm{sen}\,x$ (sinusoide) alrededor del eje de abscisas entre los puntos 0 y π.

   Aplicando la fórmula del volumen (11.15) resulta
   $\mathrm{Vol} = \pi\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{sen}^2\,x dx = \pi\int_0^\pi \frac{1-\cos(2x)}{2}dx = \frac{\pi}{2}\left[x-\frac{\mathrm{sen}(2x)}{2}\right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}$

6. Hallar la derivada de la función integral $F(x) = \displaystyle\int_1^{x^2} \frac{1}{\cos(\sqrt{x})}dx$.

   Aplicando la fórmula (11.10) resulta $F'(x) = \dfrac{1}{\cos(\sqrt{x^2})}(x^2)' = \dfrac{1}{\cos x}2x$

7. Hallar la longitud de la astroide $x = a\cos^3 t,\ y = a\,\mathrm{sen}^3\, t$

   Teniendo en cuenta que la curva es simétrica con respecto a los dos ejes, la cuarta parte de la curva se encuentra en el primer cuadrante (ver Figura 11.10).

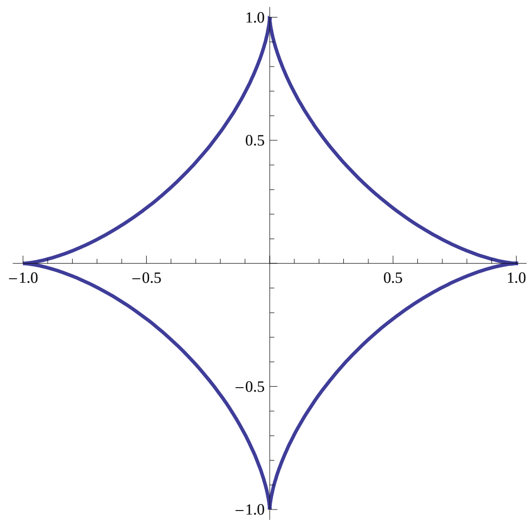


Figura 11.10: Astroide

   $\dfrac{dx}{dt} = -3a\cos^2 t\,\mathrm{sen}\, t,\ \dfrac{dy}{dt} = 3a\,\mathrm{sen}^2\, t\cos t$ por lo que $\sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{9a^2(\cos^4 t\,\mathrm{sen}^2\, t + \mathrm{sen}^4\, t\cos^2 t)} = 3a\,\mathrm{sen}\, t\cos t$.

   Por lo tanto, $L = 4\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a\,\mathrm{sen}\, t\cos t dt = \frac{12}{2}a[\mathrm{sen}^2\, t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a$

8. Hallar el área encerrada entre la curva $x(t) = t^2 - t + 1, y(t) = 3 - 5t - 2t^2$ y el eje de abscisas.

   Los puntos de corte con el eje horizontal corresponden a $y = 0$ por lo que $-2t^2 - 5t + 3 = 0 \to t = 1/2,\ t = -3$. Los límites de integración son $\frac{1}{2}$ y -3 en este orden porque los valores correspondientes de x son $x(1/2) = \frac{3}{4}$ y $x(-3) = 13$. Por otra parte, $dx = (2t - 1)dt$ y consecuentemente

$$\begin{aligned}
\text{Área} &= \int_{1/2}^{-3} (-2t^2 - 5t + 3)(2t - 1)dt \\
&= \int_{1/2}^{-3} (-4t^3 - 8t^2 + 11t - 3)dt \\
&= \left[-t^4 - \frac{8}{3}t^3 + \frac{11}{2}t^2 - 3t \right]_{1/2}^{-3} = \frac{2401}{48}
\end{aligned}$$

La gráfica de esta sección está indicado en la Figura 11.11.

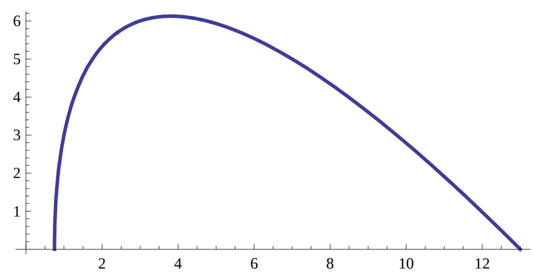


Figura 11.11: Gráfica de $x(t) = t^2 - t + 1, y(t) = 3 - 5t - 2t^2$

9. Hallar el área encerrada por la curva $x(t) = \cos^3 t$, $y(t) = \operatorname{sen} t$ y el eje de abscisas.

   El recinto indicado es el de la Figura 11.12.

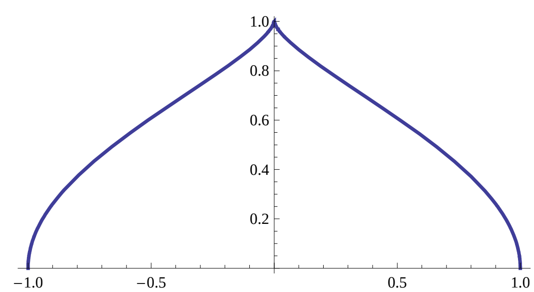


Figura 11.12: Gráfica de $x(t) = \cos^3 t$, $y(t) = \operatorname{sen} t$

Los puntos de corte con el eje horizontal corresponden a $y = 0$ por lo que $\operatorname{sen} t = 0 \to t = 0,\ t = \pi$ para los cuales $x(0) = 1,\ x(\pi) = -1$ por lo que los límites de integración son π y 0. Además, $dx = -3\cos^2 t \operatorname{sen} t dt$. Por tanto

$$\begin{aligned}
\text{Área} &= -3\int_{\pi}^{0} \operatorname{sen} t \cos^2 t \operatorname{sen} t dt = -3\int_{\pi}^{0} \operatorname{sen}^2 t \cos^2 t dt \\
&= -\frac{3}{4}\int_{\pi}^{0} \operatorname{sen}^2(2t) dt = -\frac{3}{4}\int_{\pi}^{0} \frac{1-\cos(4t)}{2} dt \\
&= -\frac{3}{8}\left[t - \frac{\operatorname{sen}(4t)}{4}\right]_{\pi}^{0} = \frac{3}{8}\pi
\end{aligned}$$

Hemos aplicado la fórmula $\operatorname{sen}(2t) = 2\operatorname{sen} t \cos t$.

10. Hallar el área limitada por la curva $\rho(\theta) = \sqrt{\operatorname{sen}^3\theta}$.

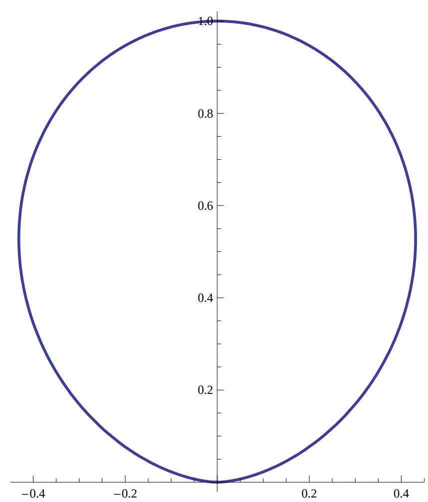


Figura 11.13: Recinto de $\rho(\theta) = \sqrt{\operatorname{sen}^3\theta}$

Puesto que $\operatorname{sen}\theta$ ha de ser positivo, necesariamente $0 \le \theta \le \pi$ por lo que

$$\begin{aligned}
\text{Área} &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \rho^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3\theta d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}\theta d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (1-\cos^2\theta)\operatorname{sen}\theta d\theta
\end{aligned}$$

Cambio: $\cos\theta = t \to -\operatorname{sen}\theta d\theta = dt$ por lo que los límites de integración son para $\theta = 0 \to t = 1$ y para $\theta = \pi \to t = -1$. Por tanto
$\text{Área} = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^{-1}(1-t^2)dt = -\dfrac{1}{2}\left[t - \dfrac{t^3}{3}\right]_1^{-1} = \dfrac{2}{3}$

11. Hallar la longitud de la cardioide $\rho(\theta) = 1 + \cos\theta$

    Puesto que $\rho' = -\operatorname{sen}\theta$ y como $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$, es

$$\begin{aligned}
\sqrt{\rho^2 + \rho'^2} &= \sqrt{1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{1 + 2\cos\theta + 1} \\
&= \sqrt{2(1+\cos\theta)} = \sqrt{4\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)
\end{aligned}$$

    Por otra parte, $\rho(2\pi - \theta) = 1 + \cos(2\pi - \theta) = 1 + \cos\theta = \rho(\theta)$ lo que indica que esta cardioide es simétrica con respecto al eje horizontal. Por tanto:
    $\mathrm{L} = 2\displaystyle\int_0^{\pi} 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta = 8\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]_0^{\pi} = 8$

12. Hallar la longitud del arco de parábola $y = x^2/2$ entre los puntos $(0,0)$ y $(1,1/2)$

    Puesto que $y' = x$ la longitud es $L = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\, dx$. Hallemos primero la integral indefinida:

$$
\begin{aligned}
L &= \int \sqrt{1+x^2}\,dx = \int \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx + \int x\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \text{ (Por partes)} \\
&= \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2}\,dx \\
&= \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + x\sqrt{1+x^2} - L \\
&\to L = \frac{1}{2}\left[\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + x\sqrt{1+x^2}\right]
\end{aligned}
$$

Por lo tanto
$L = \left[\dfrac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + x\sqrt{1+x^2}}{2}\right]_0^1 = \dfrac{\ln(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}}{2} = 1'15$

Algunas fórmulas trigonométricas

1. $\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$

2. $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b$

3. $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

4. $\operatorname{sen}(2a) = 2 \operatorname{sen} a \cos a$

5. $\cos(2a) = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$

6. $\operatorname{sen}^2 a = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$

7. $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$

8. $1 + \operatorname{tg}^2 a = \dfrac{1}{\cos^2 a}$

9. $\operatorname{sen} a \cos b = \dfrac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)\right)$

10. $\cos a \cos b = \dfrac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$

11. $\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b = -\dfrac{1}{2}\left(\cos(a+b) - \cos(a-b)\right)$

11.2. EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Resolver las siguientes integrales definidas:

   a) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}dx$

   b) $\displaystyle\int_3^4 \frac{3x^2-14x-8}{x^3-4x}dx$

   c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2-2x-5}{x^3+3x^2+4x+2}dx$

   d) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{3x-1}{(x+2)^2}dx$

   e) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}^3 x}{1+\cos x}dx$

   f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{5+8x-4x^2}}dx$

   g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}+\sqrt[6]{x^5}}{\sqrt[3]{x}}dx$

2. Hallar el área comprendida entre la curva $f(x) = x^2 - 3x - 10$ y el eje de abscisas.

3. Hallar el área comprendida entre la curva $f(x) = -x^2 + 4x + 5$ y la recta $g(x) = 2x + 2$.

4. Hallar el área del recinto del primer cuadrante limitado por las curvas $y = x^2$, $y = 3x^2$, $y = 2 - x$.

5. Hallar el área comprendida entre las curvas $f(x) = x^2$ y $g(x) = \frac{2}{x^2+1}$.

6. Hallar el área del sector circular de la curva $\rho(\theta) = \sqrt{\operatorname{tg}\theta}$ entre los ángulos $\theta = 0$ y $\theta = \frac{\pi}{4}$.

7. Hallar el área comprendida entre la curva $x(t) = \sqrt{t^2-3t+2}$, $y(t) = \dfrac{t}{\sqrt{t^2-3t+2}}$, el eje de abscisas y las rectas $x(3)$, $x(4)$.

8. Hallar el área de la región limitada por la lemniscata $\rho^2 = 3\cos(2\theta)$.

9. Hallar la longitud del arco de la curva $y^2 = x^3$ (parábola semicúbica) comprendido entre el origen y el punto P(5,5$\sqrt{5}$).

10. Hallar la longitud de la catenaria entre el origen y el punto correspondiente a $x = 1$.

11. Hallar la longitud de la primera espira de la espiral de Arquímedes ($\rho = \theta$).

12. Hallar el volumen generado por la curva $f(x) = x^2 - x + 2$ al girar alrededor del eje X entre los puntos $x = -2$ y $x = 3$.

13. Hallar el volumen del cuerpo generado por la región limitada por las curvas $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{2}$, $y = 2x$ al girar alrededor del eje OX.

14. Hallar el volumen del cuerpo generado por el segmento de recta que une los puntos $(h, 0)$, $(0, r)$ al girar alrededor del eje horizontal.

15. Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar la curva $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ alrededor del eje de abscisas entre los puntos $x = -1$ y $x = 1$.

16. Hallar el área de la superficie generada la girar la parábola $y^2 = 2x - 1$ alrededor del eje X entre los puntos 1 y 4.

17. Hallar el área y el volumen del toro generado al girar la circunferencia $x^2 + (y - 3)^2 = 1$ alrededor del eje X.

RESPUESTAS:

1.
    a) $I = \ln 2$
    b) $I = 5\ln 2 + 2\ln 3 - 4\ln 5$
    c) $I = \frac{3}{2}\ln 5 - \frac{7}{2}\ln 2 - \frac{9}{4}(\operatorname{arc\,tg} 2 - \frac{\pi}{4})$
    d) $I = 3\ln 2 - \frac{7}{2}$
    e) $I = \frac{3}{2}$
    f) $I = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen}(\frac{2}{3})$
    g) $I = \frac{32}{21}$
2. Área $= \frac{125}{3}$
3. Área $= \frac{32}{3}$
4. Área $= \frac{89}{162}$
5. Área $= \pi - \frac{2}{3}$
6. Área $= \frac{\ln 2}{4}$
7. Área $= 1 + \frac{\ln 6}{2}$
8. Área $= 3$
9. Longitud $= \frac{335}{27}$
10. Longitud $= \frac{e^2-1}{2e}$
11. Longitud $= 21{,}26$
12. Área $= \frac{545\pi}{6}$
13. Volumen $= \frac{448}{15}\pi$

14. Es un cono de Volumen $= \dfrac{\pi r^2 h}{3}$

15. $I = \pi(2 - \frac{\pi}{2})$

16. Área $= \frac{28\pi\sqrt{2}}{3}$

17. Área $= 8\pi$, Volumen $= 6\pi^2$

Capítulo 12

LA INTEGRAL DOBLE Y SUS APLICACIONES

Una integral múltiple no es más que una integral en el espacio $\mathcal{R}^n$ cuando $n > 1$. En este capítulo se estudia las integrales dobles en particular y su conocimiento posibilitará posteriormente el estudio de integrales de orden superior, en particular, las integrales triples. A continuación se estudian los campos escalares y vectoriales con los conceptos de Gradiente, Divergencia y Rotacional. Y finalmente se estudian las integrales de línea y de superficie y algunos de los teoremas que hacen uso de ellas.

12.1. LA INTEGRAL DOBLE

En la primera sección se estudian las integrales dobles desde su concepción hasta las aplicaciones de la misma, pasando antes por el cálculo de la integral doble, bien directamente, bien tras un doble cambio de variables.

Para ello recordaremos previamente, aunque de manera sucinta, el concepto de integral de Cauchy-Riemann estudiado en el capítulo anterior.

Para hallar el área de un recinto limitado por una curva plana $y = f(x)$

continua en un intervalo $[a, b]$, las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje de abscisas, se divide el intervalo $[a, b]$ mediante una partición en subintervalos con los cuales generamos unos rectángulos de base Δx_i y alturas respectivas $f(\alpha_i)$; haciendo que la mayor de las longitudes de estos intervalos tienda a cero, la suma de las áreas de estos rectángulos conduce al concepto de integral definida de Cauchy-Riemann como

$$\lim_{max\ \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{\infty} f(\alpha_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

12.1.1. Concepto de integral doble de Cauchy-Riemann

De forma semejante se comienza el estudio de la integral doble. Sea $f(x, y)$ una función continua positiva en un dominio cerrado $D \subset \mathcal{R}^2$. Se efectúa una partición del dominio D en n subdominios de áreas respectivas ΔS_i de forma tal que $\sum S_i =$ área de D.

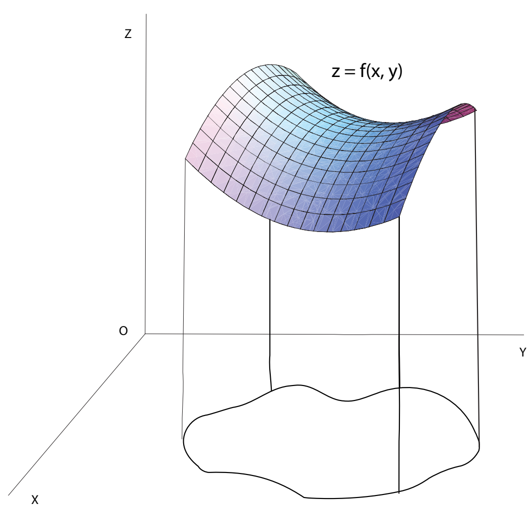


Figura 12.1: Concepto de Integral Doble

En cada subdominio, la función $f(x, y)$ alcanza su valor máximo M_i y su mínimo m_i de forma tal que $\sum m_i \Delta S_i \leq \sum M_i \Delta S_i$. Sea $\underline{S}$ la primera de estas sumas y $\overline{S}$ la segunda. Si tomamos en cada subdominio un punto cualquiera (x_i, y_i), es evidente que $m_i \leq f(x_i, y_i) \leq M_i$ por lo que

$$\sum_{1}^{n} m_i \Delta S_i \leq \sum_{1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta S_i \leq \sum_{1}^{n} M_i \Delta S_i \rightarrow \underline{S} \leq S \leq \overline{S}$$

Evidentemente, cada sumando de las primeras desigualdades representa el volumen de un cilindro cuya base es de área ΔS_i y alturas $m_i,\ f(x_i, y_i),\ M_i$, respectivamente.

Si hacemos una partición de D de forma tal que máx $\Delta S_i \rightarrow 0$, las tres sumas anteriores coinciden y representan el volumen de un cilindro de base inferior plana D y base superior la superficie $z = f(x, y)$ y se representa en la forma

$$\lim_{max\ \Delta S_i \rightarrow 0} \sum_{1}^{\infty} f(x_i, y_i) \Delta S_i = \iint_D f(x, y) dx dy \qquad (12.1)$$

siendo D el recinto de integración de la integral doble.

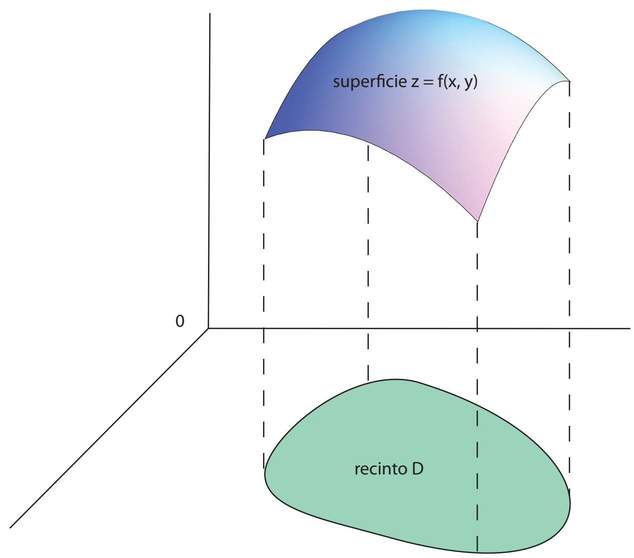


Figura 12.2: Recinto en una integral doble

De hecho, el recinto de integración D no es más que la proyección sobre el plano XOY de la superficie espacial $z = f(x, y)$

12.1.2. Propiedades de la integral doble

De forma parecida a como se hace en las integrales simples, se demuestran también las siguientes propiedades:

1. Propiedad lineal
$$\iint_D (af(x,y) + bg(x,y))dxdy = a\iint_D f(x,y)dxdy + b\iint_D g(x,y)dxdy$$
2. Propiedad aditiva del dominio de integración
Si D es la unión de los dominios disjuntos D_1 y D_2 y $f(x,y)$ es continua en D, entonces
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy$$

3. Acotación de la integral doble

   Si $M = max\ f(x,y)$ en D y A es el área del dominio D, entonces

$$\left|\iint_D f(x,y)dxdy\right| \leq \iint_D |f(x,y)|dxdy \leq MA$$

4. Teorema de la media

   Si $m = min\ f(x,y)$ en D entonces $\exists(\alpha,\beta) \in D$ tal que

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \mu A$$

   siendo $\mu = f(\alpha,\beta)$el valor medio de la integral de la función $f(x,y)$ en el recinto D: $m \leq \mu \leq M$

Definición 12.1 *Un recinto D es regular en la dirección del eje Y si toda recta vertical $x = x_0$ corta a la frontera del mismo a lo sumo en dos puntos. y es regular en la dirección del eje X si lo hace toda recta horizontal $y = y_0$.*

Finalmente, un recinto D es regular o convexo si toda recta corta a la frontera del mismo en dos puntos a lo sumo. También se dice que un recinto es regular si toda recta que lo corte lo divide en dos partes.

Recibe el nombre de convexo porque, visto desde el exterior, la frontera del recinto es convexa en todos sus puntos.

Evidentemente, un recinto convexo es regular en la dirección del eje OX y en la dirección del eje OY.

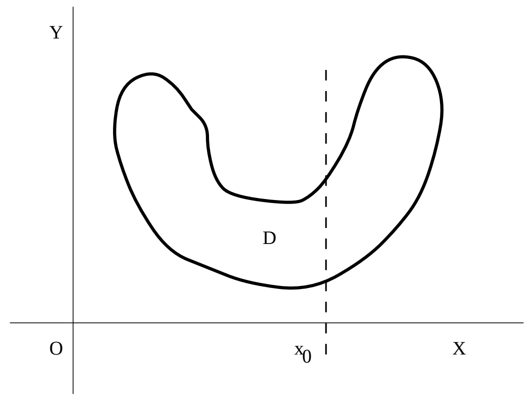


Figura 12.3: Recinto regular en dirección vertical pero no en horizontal

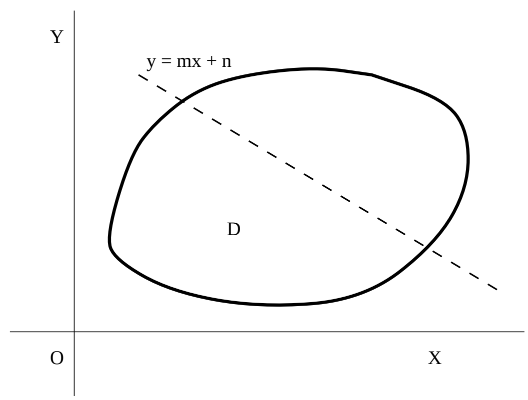


Figura 12.4: Recinto convexo

12.1.3. Cálculo de la integral doble

La integral doble de una función continua $f(x, y)$ extendida a un dominio regular D en dirección del eje Y es

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right] dx$$

donde a y b son los límites de la variable x e $y_1(x),\ y_2(x)$ son las ecuaciones de las fronteras inferior y superior de D respectivamente.

Si el recinto D es regular en la dirección del eje X la integral sería

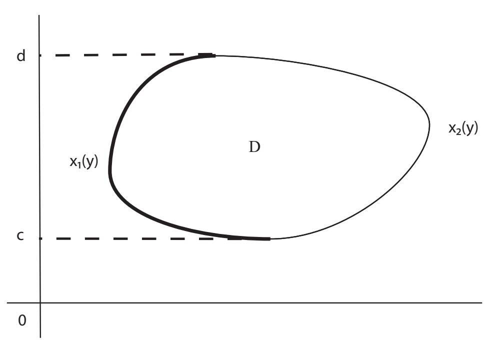
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \right] dy$$

siendo c y d los valores extremos de y mientras que $x_1(y)$, $x_2(y)$ son las ecuaciones de las fronteras izquierda y derecha de D, respectivamente.

Finalmente, si D es un dominio convexo, entonces el *teorema de Fubini* establece que

$$\int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \right] dy \qquad (12.2)$$

Debido a su construcción, es evidente que una integral doble representa el volumen del cilindro cuya cara superior es la superficie $z = f(x,y)$ mientras que la cara inferior es el dominio D obtenido mediante la proyección de la superficie $z = f(x,y)$ sobre el plano XOY.



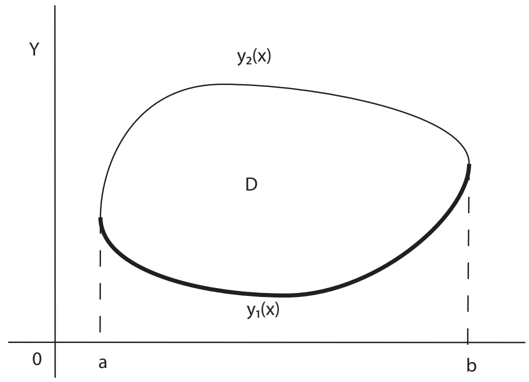


Figura 12.5: Teorema de Fubini

En la práctica, para resolver la integral $\displaystyle\int\int_D f(x,y)dxdy$ es muy conveniente representar en el plano XY el recinto de integración D. Los límites de integración para la variable x son los valores mínimo (x_0) y máximo (x_1) de la misma (¡siempre son constantes!), mientras que los límites de integración de la variable y son los correspondientes a la curva inferior ($y_0(x)$) y a la curva superior ($y_1(x)$), los cuales son variables (salvo que las «curvas» sean rectas horizontales en cuyo caso los límites de integración de y también son constantes). Resulta así la integral $\displaystyle\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{y_0(x)}^{y_1(x)} f(x,y)dy\right]dx$

Por lo tanto, si para resolver una integral doble se integra primero con respecto a la variable y y luego con respecto a x, los límites de integración de la variable x son siempre definidos (constantes) mientras que los de y son variables, salvo que el recinto de integración sea un rectángulo.

En general, el recinto de integración se encuentra en el plano $z = 0$ por lo que para hallar los límites de variación de y se hace $z = 0$ mientras que para los de x se ha de hacer $z = 0$, $y = 0$ y resolver la ecuación resultante.

Ejemplo 12.1 *Dado el plano $z = 6 - 2x - 3y$ en el primer octante:*

1. *Representarlo.*

2. Representar su proyección sobre el plano XOY (recinto D).

3. Hallar los límites de x (constantes) y los de y (variables) en este recinto.

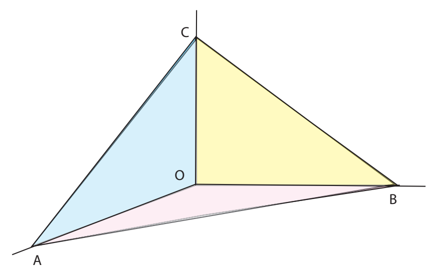
1. Para representar un plano sólo se necesitan 3 puntos. Los más simples son:

   Para $y = 0,\ z = 0,\ \to x = 3 \to A(3, 0, 0)$

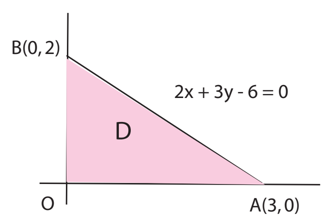
   Para $x = 0,\ z = 0,\ \to y = 2 \to B(0, 2, 0)$

   Para $x = 0,\ y = 0,\ \to z = 6 \to C(0, 0, 6)$

   La figura obtenida es un tetraedro (un prisma de 4 caras).



2. Su proyección sobre el plano XOY ($z = 0$) es el triángulo de la figura.

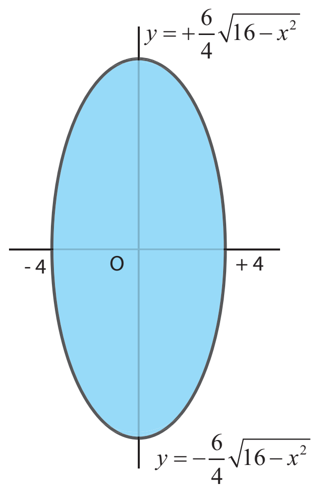


3. La recta AB está determinada por el punto $(3, 0)$ y el vector $\vec{u} = (3, -2)$ por lo que su ecuación es $\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y}{-2} \to 2x + 3y - 6 = 0.$

   En consecuencia, $D : \left\{ \begin{array}{l} 0 \le x \le 3 \\ 0 \le y \le \dfrac{6-2x}{3} \end{array} \right\}$

Ejemplo 12.2 *Proyectar sobre el plano XOY la intersección de la superficie* $z = 10 - \left(\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}\right)$ *con el plano* $z = 6$ *y hallar los límites de* x *(constantes) e* y *(variables) en este recinto.*

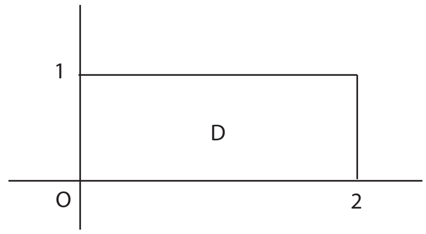
Para hallar la curva intersección de ambas superficies se iguala ambas ecuaciones: $10 - \left(\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}\right) = 6 \rightarrow 4 = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} \rightarrow \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{36} = 1$ lo que indica que se trata de una elipse.



Los límites de variación de x (constantes) se calculan haciendo $y = 0 \rightarrow -4 \leq x \leq 4$, mientras que los de y se obtienen sin más que despejar y en la ecuación de la elipse: $-\dfrac{6}{4}\sqrt{16 - x^2} \leq y \leq +\dfrac{6}{4}\sqrt{16 - x^2}$

Ejemplo 12.3 *Hallar* $\displaystyle\int\int_D \frac{x^2 + xy}{y^2 + 1}\, dxdy$ *siendo el recinto de integración* D *el rectángulo de la figura*

Si el recinto de integración es un rectángulo, los límites de integración son



constantes: en este caso, $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 1$ por lo que

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \left[\int_0^1 \frac{x^2+xy}{y^2+1}dy\right]dx = \int_0^2 \left[\int_0^1 \left(\frac{x^2}{y^2+1} + x\frac{y}{y^2+1}\right)\right]dx \\ &= \int_0^2 \left[x^2 \arctan y + \frac{x}{2}\ln(y^2+1)\right]_0^1 dx \\ &= \int_0^2 \left(\frac{\pi}{4}x^2 + \frac{x}{2}\ln 2\right)dx = \left[\frac{\pi}{4}\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4}\ln 2\right]_0^2 = \frac{2\pi}{3} + \ln 2 \end{aligned}$$

Ejemplo 12.4 *Hallar* $\displaystyle\int\int_D \frac{1}{(x^2+1)(y^2+4)}$ $dxdy$ *siendo* D *el primer cuadrante del sistema de coordenadas.*

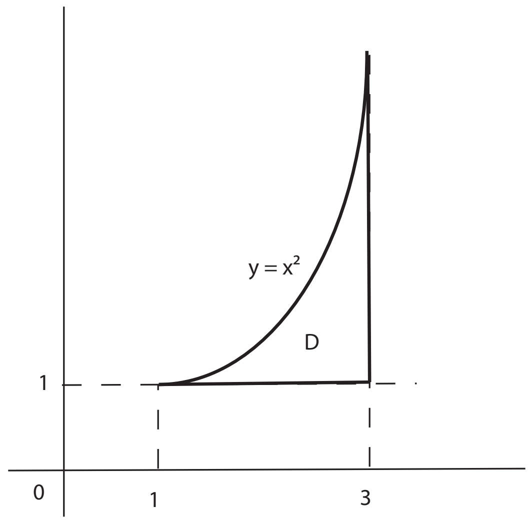
También en este caso los límites de integración son constantes: $0 \leq x \leq \infty$, $0 \leq y \leq \infty$, por lo que

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\left[\int_0^\infty \frac{1}{y^2+4}dy\right]dx = \int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\left[\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}\right]_0^\infty dx \\ &= \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\left[\arctan x\right]_0^\infty = \frac{\pi^2}{8} \end{aligned}$$

Ejemplo 12.5 *Hallar el volumen limitado por la superficie* $z = x^2 + y^2$ *y el dominio del plano* XOY *comprendido entre la parábola* $y = x^2$ *y las rectas* $x = 3$, $y = 1$.

Falta un límite de integración de la variable x. Resolviendo el sistema $y = x^2$, $y = 1$ se obtiene el punto intersección de la parábola y la recta horizontal: $x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$. El punto que forma parte del recinto es el $(1, 1)$.

El recinto de integración es $D = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 3,\ 1 \leq y \leq x^2\}$.



Como es un recinto convexo, se puede integrar primero con respecto a y y luego con respecto a x (o viceversa):

$$\begin{aligned}
V &= \int\int_D f(x,y)dxdy = \int_1^3 \left[\int_1^{x^2} (x^2+y^2)dy\right] dx \\
&= \int_1^3 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_1^{x^2} dx = \int_1^3 (x^4 + \frac{x^6}{3} - x^2 - \frac{1}{3})dx \\
&= \left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{21} - \frac{x^3}{3} - \frac{x}{3}\right]_1^3 = \frac{15032}{105}
\end{aligned}$$

Ejemplo 12.6 *Hallar* $\int\int_D (x-2y)dxdy$ *siendo el D el recinto comprendido entre la parábola* $y = 3 - x^2$ *y la recta* $y = 2x$.

Se halla la intersección de ambas curvas para hallar los límites de variación de x: $3 - x^2 = 2x \to x = -3,\ x = 1$ por lo que

$$\begin{aligned} I &= \int_{-3}^{1} \left[\int_{2x}^{3-x^2} (x-2y)dy \right] dx = \int_{-3}^{1} \left[xy - y^2 \right]_{2x}^{3-x^2} \\ &= \int_{-3}^{1} \left(x(3-x^2-2x) - (3-x^2)^2 + (2x)^2 \right) dx \\ &= \int_{-3}^{1} (-x^4 - x^3 + 8x^2 + 3x - 9)dx = -\frac{32}{15} \end{aligned}$$

12.1.4. Cálculo de áreas planas mediante integrales dobles

Si en la fórmula que permite hallar el volumen $V = \int\int_D f(x,y)dxdy$ se hace $f(x,y) = 1$, se obtiene el volumen de un cilindro de base D y altura 1, lo cual no es más que el área del recinto D. Por lo tanto, el área de un recinto plano D viene dada por la fórmula Área $= \int\int_D dxdy$

Ejemplo 12.7 *Hallar el área comprendida entre las parábolas* $y = x^2$, $y = 8 - x^2$

Para hallar los límites de integración de la variable x, se resuelve el sistema formado por las ecuaciones de las dos parábolas:
$8 - x^2 = x^2 \to 2x^2 = 8 \to x = \pm 2$. Por lo tanto, el recinto de integración es $D = \{(x,y) : -2 \leq x \leq 2,\ x^2 \leq y \leq 8 - x^2\}$.

Luego

$$\begin{aligned} A &= \int\int_D dxdy = \int_{-2}^{2} \left[\int_{x^2}^{8-x^2} dy \right] dx = \int_{-2}^{2} [y]_{x^2}^{8-x^2} dx \\ &= \int_{-2}^{2} (8 - 2x^2)dx = \left[8x - \frac{2x^3}{3} \right]_{-2}^{2} = \frac{64}{3} \end{aligned}$$

12.1.5. Cambio de variables en una integral doble

Sea la función $f(x,y)$ continua en un dominio D del plano XOY y consideremos el cambio de variables de (x,y) a (u,v) mediante la transformación continua $x = x(u,v),\ \ y = y(u,v)$.

Mediante esta tranformación continua, no sólo el recinto D del plano XOY se transforma en un nuevo recinto D' del plano UOV sino que todo punto interior de D se transforma en un punto de D'.

Entonces se puede demostrar que

$$\int\!\!\int_D f(x,y)dxdy = \int\!\!\int_{D'} f(x(u,v),y(u,v))|J|dudv \tag{12.3}$$

siendo $|J|$ el valor absoluto del jacobiano de las funciones x e y con respecto a las variables u y v. Es decir: $J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$

Ejemplo 12.8 *Hallar el jacobiano de la transformación* $x = \dfrac{u}{v},\ \ y = u + v^2$

En este caso es

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{v} & -\dfrac{u}{v^2} \\ 1 & 2v \end{vmatrix} = 2 + \frac{u}{v^2}$$

Ejemplo 12.9 *Hallar el jacobiano de la transformación* $x = \operatorname{sen} u \cos v$, $y = \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$

Entonces

$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos u \cos v & -\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \\ \cos u \operatorname{sen} v & \operatorname{sen} u \cos v \end{vmatrix} \\ &= \operatorname{sen} u \cos u \cos^2 v + \operatorname{sen} u \cos u \operatorname{sen}^2 v = \operatorname{sen} u \cos u \end{aligned}$$

12.1.6. Coordenadas polares

En caso de que la frontera del recinto de integración de una integral doble sea una elipse, generalmente suele ser aconsejable el cambio a *coordenadas polares modificadas o elípticas*, tal y como se indica a continuación.

Sea la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. El cambio a coordenadas elípticas $x=a\rho\cos t,\ \ y=b\rho\operatorname{sen} t$, transforma el interior de la elipse en el interior del rectángulo de lados $0\le\rho\le 1,\ \ 0\le t\le 2\pi$, siendo el jacobiano de la transformación

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a\cos t & -a\rho\operatorname{sen} t\\ b\operatorname{sen} t & b\rho\cos t\end{vmatrix}=ab\rho$$

Si $a=r$ y $b=r$, la elipse se transforma en una circunferencia y el cambio a coordenadas polares es $x=r\rho\cos t,\ \ y=r\rho\operatorname{sen} t$, siendo el jacobiano $|J|=r^2\rho$.

Ejemplo 12.10 *Hallar* $\int\int_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy$ *siendo* D *el círculo* $x^2+y^2=r^2$

Como el recinto es $\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}=1$, esto nos sugiere el cambio de variables a las coordenadas elípticas: $x=r\rho\cos\alpha,\ \ y=r\rho\operatorname{sen}\alpha$ por lo que $x^2+y^2=r^2\rho^2\cos^2\alpha+r^2\rho^2\operatorname{sen}^2\alpha=r^2\rho^2$. Mediante este cambio a coordenadas polares, el círculo D se transforma en el rectángulo $D'=\{(\rho,\alpha):0\le\rho\le 1,\ 0\le\alpha\le 2\pi\}$ y el valor del jacobiano, como ya hemos visto, es $J=r^2\rho$.

Por lo tanto

$$I=\int_0^1\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2\rho^2}r^2\rho d\rho d\alpha=\int_0^1 r^3\rho^2\left[\int_0^{2\pi}d\alpha\right]d\rho=[\alpha]_0^{2\pi}\left[r^3\frac{\rho^3}{3}\right]_0^r=\frac{2}{3}\pi r^3$$

Ejemplo 12.11 *Dado un recinto plano* D *de densidad uniforme* $\nu=1$, *se puede demostrar que el centro de gravedad de este recinto es el punto* $G(G_x,G_y)$ *tal que* $G_x=\frac{\int\int_D xdxdy}{\int\int_D dxdy}$, $G_y=\frac{\int\int_D ydxdy}{\int\int_D dxdy}$.

Hallar el centro de gravedad del recinto limitado por el eje X y la mitad superior de la circunferencia $x^2+y^2=r^2$ (suponiendo la densidad constante e igual a 1)

Evidentemente, debido a la simetría, es $G_x=0$.
En cuanto a la segunda coordenada, tras un cambio a coordenadas polares $x=r\rho\cos t$, $y=r\rho\operatorname{sen} t$, $|J|=r^2\rho$, $0\le\rho\le 1$, $0\le t\le\pi$, resulta:
$N_y=\int\int_D ydxdy=\int_0^\pi\left[\int_0^1 r\,r^2\rho^2 d\rho\right]\operatorname{sen} tdt=\dfrac{2}{3}r^3.$

Y como el denominador de la fórmula inicial representa el área del recinto que en este caso es la mitad del círculo ($M=\frac{1}{2}\pi r^2$),

$$G_y=\frac{\frac{2r^3}{3}}{\frac{\pi r^2}{2}}=\frac{4r}{3\pi}.$$

Ejemplo 12.12 *Hallar el centro de gravedad del recinto del primer cuadrante limitado por la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ si la densidad es constante e igual a 1.*

Cambio a coordenadas elípticas: $x=a\rho\cos t$, $y=b\rho\operatorname{sen} t$,
$|J|=ab\rho$, $0\le\rho\le 1$, $0\le t\le\frac{\pi}{2}$ por lo que

$$N_x=\int\int_D xdxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^1 ab\rho^2 d\rho\right]a\cos tdt=a^2b\frac{1}{3}$$

$$N_y=\int\int_D ydxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^1 ab\rho^2 d\rho\right]b\operatorname{sen} tdt=ab^2\frac{1}{3}$$

Y como el denominador es la cuarta parte del área limitada por una elipse ($M=\frac{1}{4}\pi ab$), el centro de gravedad es el punto $\left(\dfrac{4a}{3\pi},\dfrac{4b}{3\pi}\right)$

12.1.7. Coordenadas esféricas

Sea el punto $X(x,y,z)\in\mathcal{R}^3$. El módulo del vector $\overrightarrow{OX}$ se representa por ρ. El ángulo que forma este vector con su proyección r sobre el plano XOY lo representamos por β siendo α el ángulo que forma esta proyección con el eje X. Estas coordenadas ρ, α, β reciben el nombre de coordenadas esféricas o coordenadas polares en el espacio.

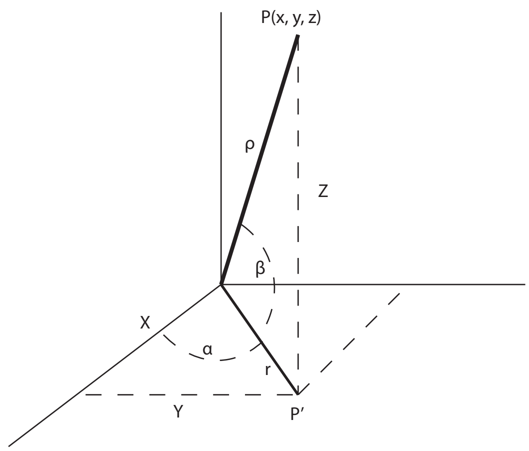


Figura 12.6: Coordenadas esféricas

La proyección del radio vector ρ sobre el plano XOY origina el triángulo rectángulo

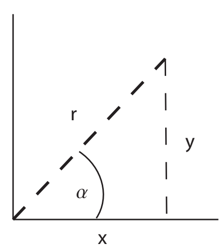
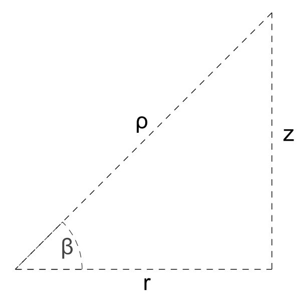


Figura 12.7: Proyección sobre el plano XOY

En este triángulo, es fácil ver que $x = r\cos\alpha$ e $y = r\,\mathrm{sen}\,\alpha$. Por otra parte, existe un triángulo rectángulo en el espacio que es el

en el cual es $r = \rho\cos\beta$, $z = \rho\,\mathrm{sen}\,\beta$.



En consecuencia, sustituyendo el valor de r en las expresiones anteriores, resultan finalmente las equivalencias entre las cocordenadas cartesianas y las esféricas:

$x = \rho \cos \alpha \cos \beta,\ \ y = \rho \operatorname{sen} \alpha \cos \beta,\ \ z = \rho \operatorname{sen} \beta.$

Mediante este cambio, la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ se transforma en el ortoedro de aristas $0 \leq \rho \leq R,\ \ 0 \leq \alpha \leq 2\pi,\ \ -\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq +\frac{\pi}{2}$.

En el caso de una integral triple extendida sobre un elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, las coordenadas anteriores se modifican multiplicándolas, respectivamente, por a, b y c, y se puede comprobar fácilmente que el jacobiano de esta transformación es $|J| = abc\rho^2 \cos \beta$. Estas coordenadas esféricas modificadas también reciben el nombre de coordenadas elípticas en el espacio.

En resumen: en un cambio a coordenadas elípticas en el espacio, resulta

1. $\left\{ \begin{array}{l} x = a\rho \cos \alpha \cos \beta \\ y = b\rho \operatorname{sen} \alpha \cos \beta \\ z = c\rho \operatorname{sen} \beta \end{array} \right\}$

2. Jacobiano: $J = a\, b\, c\, \rho^2 \cos \beta$

3. Límites de integración: $\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \alpha \leq 2\pi \\ 0 \leq \beta \leq \pi \end{array} \right\}$

Algo a tener en cuenta en una integral es que, así como en una integral simple el cambio de variable obedece a la necesidad de simplificar la función a integrar, en una integral múltiple el cambio de variables puede obedecer tanto a una necesidad de simplificar la función a integrar como a la posibilidad de transformar el recinto de integración en otro más sencillo.

Por ejemplo: el cambio de variables cartesianas a coordenadas elípticas en el plano es conveniente hacerlo tanto si la función a integrar posee la expresión $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ como si el recinto de integración es la región del plano limitada por una elipse. En el primer caso, a continuación habría que cambiar los límites de integración de la integral interior si no son constantes, mientras que en el segundo caso habría que cambiar las variables de la función a integrar por las nuevas variables.

Interpretación física de la integral triple

Si la densidad de un cuerpo no es constante sino que depende de la posición cada punto del mismo en la forma densidad $= f(x,y,z)$, entonces una integral triple de la forma $\int\int\int_V f(x,y,z)dxdydz$ representa la masa de dicho cuerpo.

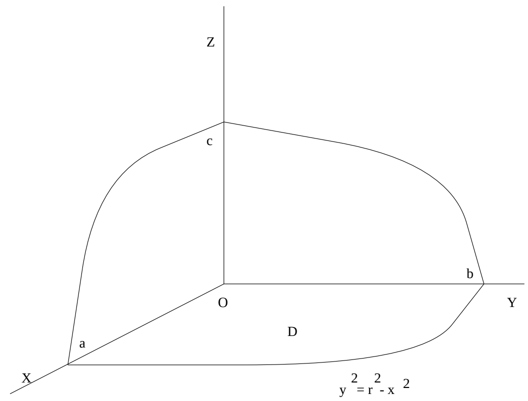
Ejemplo 12.13 *Hallar el volumen del elipsoide* $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

Este elipsoide es una cuádrica simétrica respecto a los tres planos coordenados por lo que sólo hallamos el volumen de su primer octante.

Hallaremos el volumen mediante una integral doble o una triple:

1. Mediante una integral doble:

$$V = 8\int\int_D z(x,y)dxdy = 8\int\int_D c\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}dxdy$$



Cambio a coordenadas elípticas:

$$\left\{\begin{array}{l} x = a\rho\cos t \\ y = b\rho\operatorname{sen} t \end{array}\right\} \qquad \left\{\begin{array}{l} 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \qquad J = a \cdot b \cdot \rho$$

Luego, el volumen del elipsoide viene dado por la fórmula
$V = 8c\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\rho^2}ab\rho d\rho dt = 8abc[t]_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{1}{2}(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\frac{2}{3}\right]_0^1 = \frac{4}{3}\pi abc$

2. Mediante una integral triple:

$$V = \int\int\int_V dxdydz$$

Tras un cambio a coordenadas elípticas en el espacio es

$$V = 8\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} abc\rho^2\cos\beta d\rho d\alpha d\beta = 8abc\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^1[\alpha]_0^{\frac{\pi}{2}}[\operatorname{sen}\beta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3}\pi abc$$

Ejemplo 12.14 *El área de la superficie $z = f(x,y)$ limitada al recinto D del plano XOY se puede calcular mediante la fórmula*
$A = \int\int_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy.$
Hallar el área del paraboloide $z = 9-(x^2+y^2)$, $z \geq 0$.

El valor del integrando es $\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+(4x^2+4y^2)}$.
El recinto de integración es el círculo $x^2+y^2=9$ lo que sugiere un cambio a coordenadas elípticas:

$$\left\{\begin{array}{l} x=3\rho\cos t \\ y=3\rho\,\mathrm{sen}\, t \end{array}\right\} \qquad \left\{\begin{array}{l} 0\le\rho\le 1 \\ 0\le t\le 2\pi \end{array}\right\} \qquad J=a\cdot b\cdot\rho=9\rho$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} A &= \int\int_{D'}\sqrt{1+4\rho^2}\;9\rho d\rho dt=\frac{9}{8}\int_0^{2\pi}\left[\int_0^1\sqrt{1+4\rho^2}8\rho d\rho\right]dt \\ &= \frac{9}{8}\int_0^{2\pi}\left[\frac{(1+4\rho^2)^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 dt=\frac{3}{4}\int_0^{2\pi}\left(5\sqrt{5}-1\right)dt=\frac{3}{2}(5\sqrt{5}-1)\pi \end{aligned}$$

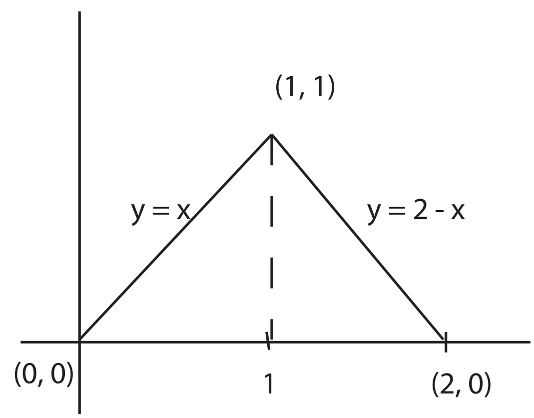
12.1.8. Ejercicios resueltos

1. *Hallar* $\int\int_D (x^2+y^2)dxdy$ *siendo* D *el recinto del primer cuadrante comprendido entre las circunferencias* $x^2+y^2=1,\;\; x^2+y^2=4$

   La función $z=x^2+y^2$ nos indica el cambio a coordenadas polares:
   $I=\int\int_D (x^2+y^2)dxdy=\int_1^2\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\right]\rho^3 d\rho=\dfrac{15\pi}{8}$

2. *Hallar el volumen del cilindro recto limitado por la superficie* $f(x,y)=4xye^{x^2-y^2}$ *y el triángulo de vértices* $(0,0)$, $(2,0)$ *y* $(1,1)$ *en el plano XOY*

   La fórmula para hallar este volumen es $V=\int\int_D f(x,y)dxdy$ siendo en este caso el recinto de integración Por lo tanto, la integral se descom-



pone en dos sumandos, de acuerdo con los recintos:

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^1 \left[\int_0^x 4xye^{x^2-y^2}dy\right]dx + \int_1^2 \left[\int_0^{2-x} 4xye^{x^2-y^2}dy\right]dx \\
&= \int_0^1 2x\left[-e^{x^2-y^2}\right]_0^x dx + \int_1^2 2x\left[-e^{x^2-y^2}\right]_0^{2-x} dx \\
&= \int_0^1 2x\left(-1+e^{x^2}\right)dx + \int_1^2 2x\left(-e^{4x-4}+e^{x^2}\right)dx \\
&= \left[-x^2+e^{x^2}\right]_0^1 + \left[-\frac{e^{4x-4}}{4}(2x-\frac{1}{2})+e^{x^2}\right]_1^2 \\
&= -1+e-1-\frac{e^4}{4}\frac{7}{2}+e^4+\frac{1}{4}\frac{3}{2}-e = \frac{e^4}{8}-\frac{13}{8}
\end{aligned}$$

Para hallar la integral $\int 2xe^{4x-4}dx$, se hace el cambio de variable $4x-4=t$ y luego se resuelve por partes.

Pero este ejercicio habría resultado más sencillo integrando primero con respecto a x y luego con respecto a y, pues sólo habría un recinto de integración:

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^1 \left[\int_y^{2-y} 4xye^{x^2-y^2}dx\right]dy = \int_0^1 2y\left[e^{x^2-y^2}\right]_y^{2-y} dy \\
&= \int_0^1 2y(e^{4-4y}-1)dy = \left[\frac{e^{4-4y}}{-4}(2y+\frac{2}{4})-y^2\right]_0^1 \\
&= -\frac{1}{4}\frac{5}{2}+\frac{e^4}{8}-1 = \frac{e^4}{8}-\frac{13}{8}
\end{aligned}$$

3. *Hallar el volumen comprendido entre el cono* $x^2+y^2-z^2=0$ *y los planos* $z=0$, $z=r$

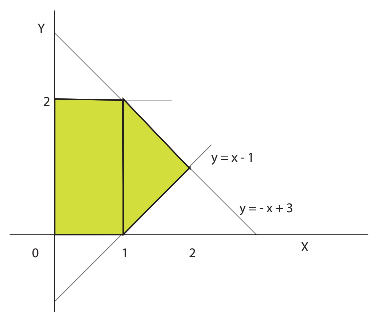
   Para hallar el dominio de integración, se proyecta el cono sobre el plano XOY $(z=0)$, obteniéndose el círculo $x^2+y^2\le r^2$. El cambio a coordenadas elípticas $x=r\rho\cos t$, $y=r\rho\operatorname{sen} t$, hace que la ecuación de la circunferencia sea

$\rho^2 = 1 \rightarrow \rho = 1$ por lo que la nueva región de integración es el rectángulo $0 \leq \rho \leq 1, \ \ 0 \leq \alpha \leq 2\pi$ siendo el jacobiano $|J| = r^2\rho$, y en consecuencia

$$V = \iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\rho^2 d\rho d\alpha = \frac{2}{3}\pi r^3$$

4. *Hallar* $\int\int_D ydxdy$ *siendo* D *el recinto del primer cuadrante definido por* $x+y-3 \leq 0, \ -x+y+1 \geq 0, \ y \leq 2$

Dibujando el recinto de integración se comprueba fácilmente que está dividido en dos partes que son un rectángulo y un triángulo.



Por lo tanto, la integral también se descompone en dos sumandos:

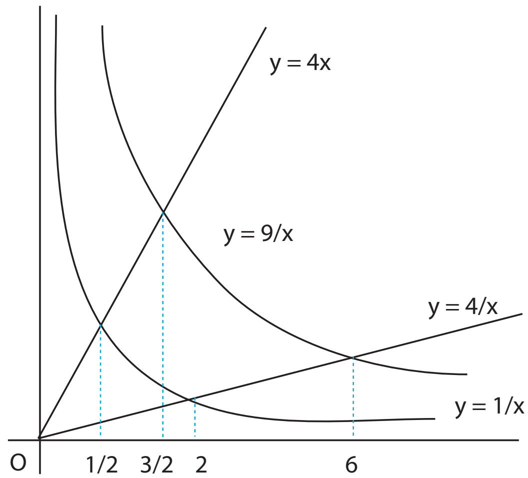
$$I = \int_0^1 \left[\int_0^2 ydy\right] dx + \int_1^2 \left[\int_{x-1}^{-x+3} ydy\right] dx = \frac{17}{6}$$

5. *Calcular la integral* $\int\int_D xy^2dxdy$ *siendo* D *el triángulo de vértices* $(1,1), (2,1), \ (2,2)$

Dibujando este triángulo rectángulo se comprueba que cuando x varía entre 1 y 2, la variable y lo hace entre 1 y x.
Por tanto: $I = \int_1^2 \left[\int_1^x y^2dy\right] dx = \frac{1}{3}\int_1^2 x(x^3-1)dx = \frac{47}{30}$

6. *Hallar* $\displaystyle\int\int_D xydxdy$ *si D es el recinto limitado por las rectas* $y = \frac{x}{4}$, $y = 4x$ *y las hipérbolas* $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{9}{x}$

El recinto de integración se muestra en la siguiente figura:



Por lo tanto es :

$$
\begin{aligned}
V &= \int\int_D xydxdy = \int_{1/2}^{3/2} x\left[\int_{1/x}^{4x} ydy\right]dx + \int_{3/2}^{2} x\left[\int_{1/x}^{9/x} ydy\right]dx \\
&\quad + \int_{2}^{6} x\left[\int_{x/4}^{9/x} ydy\right]dx \\
&= \int_{1/2}^{3/2} \frac{x}{2}\left((4x)^2 - (\frac{1}{x})^2\right)dx + \int_{3/2}^{2} \frac{x}{2}\left((\frac{9}{x})^2 - (\frac{1}{x})^2\right)dx \\
&\quad + \int_{2}^{6} \frac{x}{2}\left((\frac{9}{x})^2 - (\frac{x}{4})^2\right)dx \\
&= \left[2x^4 - \frac{1}{2}\ln x\right]_{1/2}^{3/2} + [40\ln x]_{3/2}^{2} + \frac{1}{2}\left[81\ln x - \frac{x^4}{16}\right]_{2}^{6} \\
&= \frac{225}{32} + 80\ln 2 = 63{,}42
\end{aligned}
$$

7. *Calcular el área encerrada por la cardioide $\rho = 1 + \cos\theta$ de dos formas distintas*

a) Mediante una integral simple:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1} \rho^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1+\cos\theta)^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1+2\cos\theta + \frac{1}{2}(1+\cos(2\theta))d\theta = \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

b) Mediante una integral doble. Tras el cambio a coordenadas polares resulta:

$$\begin{aligned} A &= \int\int_D dxdy = \int\int_{D'} \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{1+\cos\theta} \rho d\rho\right] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^{1+\cos\theta} d\rho = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1+2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta = \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

8. *Hallar el volumen comprendido entre los paraboloides* $z = 4 - \left(\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}\right)$, $z = x^2 + y^2$

En este caso el volumen resultante es el generado por el primer paraboloide menos el generado por el segundo (también se puede hallar mediante la integral triple: $V = \int\int\int_V dxdydz = \int\int_D \left[\int_{x^2+y^2}^{4-\left(\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}\right)}\right] dxdy$)

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} V_1 &= \int\int_D \left[4 - \left(\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}\right)\right] dxdy \\ V_2 &= \int\int_D (x^2+y^2)dxdy \end{aligned}$$

El recinto D es la proyección sobre el plano XOY de la intersección de ambas superficies:

$$\begin{aligned} & 4 - \left(\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}\right) = x^2+y^2 \to 4 - \left(\frac{26x^2}{25}+\frac{10y^2}{9}\right) = 0 \\ \to\ & \frac{x^2}{100/26} + \frac{y^2}{36/10} = 1 \end{aligned}$$

por lo que se trata de una elipse de semiejes $a = \dfrac{10}{\sqrt{26}}$, $b = \dfrac{6}{\sqrt{10}}$.

Por tanto, el cambio a coordenadas elípticas $x = \dfrac{5}{\sqrt{13}}\rho\cos t$, $y = \dfrac{3}{\sqrt{5}}\rho \operatorname{sen} t$ transforma el recinto anterior en el rectángulo D' de lados $0 \le \rho \le 1$, $0 \le t \le 2\pi$, siendo el jacobiano de la transformación $J = ab\rho = \dfrac{5}{\sqrt{13}}\dfrac{3}{\sqrt{5}}\rho \to J = \sqrt{\dfrac{45}{13}}\rho$.

Por otra parte:
$4 - \left(\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9}\right) = 4 - \dfrac{1}{13}\rho^2$ mientras que
$x^2 + y^2 = \dfrac{1}{13}(25\rho^2\cos^2 t + 9\rho^2 \operatorname{sen}^2 t)$.
En consecuencia

$$\begin{aligned}
V_1 &= \iint_{D'} \left(4 - \frac{1}{13}\rho^2\right)\sqrt{\frac{45}{13}}\rho d\rho dt \\
&= \sqrt{\frac{45}{13}}\int_0^{2\pi}\left[2\rho^2 - \frac{1}{13}\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 dt \\
&= \sqrt{\frac{45}{13}}\frac{103}{52}2\pi = \frac{103}{26}\sqrt{\frac{45}{13}}\pi \\
V_2 &= \iint_{D'}\left(\frac{1}{13}(25\rho^2\cos^2 t + 9\rho^2\operatorname{sen}^2 t)\right)\sqrt{\frac{45}{13}}\rho d\rho dt \\
&= \frac{1}{13}\sqrt{\frac{45}{13}}\int_0^1 \rho^2\left[\int_0^{2\pi}\left(25\cos^2 t + 9\operatorname{sen}^2 t\right)dt\right]d\rho \\
&= \frac{1}{13}\sqrt{\frac{45}{13}}34\pi\int_0^1 \rho^2 d\rho = \frac{1}{39}\sqrt{\frac{45}{13}}34\pi \\
V &= V_1 + V_2 = \frac{103}{26}\sqrt{\frac{45}{13}}\pi + \frac{1}{39}\sqrt{\frac{45}{13}}34\pi
\end{aligned}$$

Capítulo 13

TEORÍA VECTORIAL DE CAMPOS

Dado que tanto las integrales de línea como las de superficie están íntimamente ligadas con los campos escalares y los campos vectoriales, estos conceptos se engloban en este capítulo en tres secciones diferenciadas.

En esta sección se estudian los campos escalares y los campos vectoriales y cómo se transforman unos en otros mediante la aplicación de ciertos tipos de operadores.

13.1. Campos escalares y vectoriales

Sea $D \subset \mathcal{R}^3$.

Una función $f(x, y, z)$ es un campo escalar si está definida en todo punto de D de forma que a todo punto de D le corresponde un único valor numérico.

Una función $\vec{F}(x, y, z)$ es un campo vectorial si está definida en todo punto de D de forma que a cada punto de D le corresponde un vector numérico. Por tanto, el campo vectorial $\vec{F}$ está definido en la forma $\vec{F} = F_1(x, y, z)\vec{i} + F_2(x, y, z)\vec{j} + F_3(x, y, z)\vec{k}$ que puede expresarse también como

$\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$. Es decir: de la misma forma que un vector es un conjunto de escalares, una función vectorial es un conjunto de funciones escalares. Si la función vectorial está definida en R^3, entonces tendrá tres componentes y cada una de estas tres componentes es una función de tres variables.
Por ejemplo, $\vec{F} = \left(\dfrac{x+y}{x-z}, e^{y+2z}(2x-y-z), \cos(x^2-2yz)\right)$ es un campo vectorial en R^3

Ejemplos de campos escalares son la temperatura y el peso mientras que son campos vectoriales la velocidad y la fuerza.

Se llama operador nabla de Hamilton al operador vectorial simbólico $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$.

Este operador puede ser manejado como un vector de forma que

- ∇f significa que hay que aplicar el operador nabla al campo escalar f
- $\nabla \times \vec{F}$ expresa que hay que multiplicar vectorialmente los vectores ∇ y $\vec{F}$
- $\nabla\vec{F}$ indica que hay que multiplicar escalarmente el operador ∇ por la función vectorial $\vec{F}$

Podemos decir entonces que ∇ es un "vector" que se aplica (o que "multiplica") a una función escalar o vectorial.

13.2. Gradiente de un campo escalar

Sea $f = f(x,y,z)$ un campo escalar en un dominio $D \subset \mathcal{R}^3$.

Se llama gradiente de la función f en un punto de D al vector, calculado en dicho punto,

$$\overrightarrow{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

Haciendo uso del operador ∇, el gradiente de una función escalar se puede indicar en la forma $\overrightarrow{grad}(f) = \nabla f$, entendiendo que el vector ∇ es simbólico y no tiene sentido por sí sólo.

Dado que ∇ está formado por derivadas parciales, también verifica algunas de las propiedades de la derivada. En particular, ∇ es un operador lineal: $\nabla(af(x,y,z) + bg(x,y,z)) = a\nabla f + b\nabla g$.

Una interpretación geométrica del vector gradiente puede ser la siguiente. Sea $\vec{r} = (x,y,z)$ el vector de posición de un punto $P \in D$.
Entonces $d\vec{r} = dx\ \vec{i} + dy\ \vec{j} + dz\ \vec{k}$ por lo que el producto escalar del gradiente de U por el elemento $d\vec{r}$ es $\nabla f \cdot d\vec{r} = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy + \dfrac{\partial f}{\partial z}dz$ que no es otra cosa que la diferencial de f, es decir, $\nabla f \cdot d\vec{r} = df$.

Por lo tanto, si $U(x,y,z)$ representa la ecuación de una curva de nivel, entonces U es constante, por lo que $dU = 0$ y, en consecuencia, $\nabla U \cdot d\vec{r} = 0$ lo que indica que los vectores ∇U y $d\vec{r}$ son ortogonales. Podemos decir, por tanto, que el vector gradiente de una función en un punto es perpendicular a la curva de nivel que pasa por él.

El gradiente de una función en un punto representa la dirección en la que la función varía más rápidamente y el módulo de ese gradiente indica a qué velocidad varía.

Ejemplo 13.1 *Hallar el gradiente de la función* $f = x^2y - 2y^2z + 3z^2x$ *en el punto* $P(1,-2,2)$

Las derivadas parciales de la función f son
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 3z^2 \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(P) = 8 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 4yz \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(P) = 17 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = -2y^2 + 6xz \rightarrow \frac{\partial f}{\partial z}(P) = 4 \end{cases}$$
Por tanto, $(\overrightarrow{grad}(f))_P = 8\vec{i} + 17\vec{j} + 4\vec{k}$

Ejemplo 13.2 *Hallar un vector unitario normal a la superficie*
$x^2y - 2xy^2z + 3z^2 + 6 = 0$ *en el punto* $P(1,-2,2)$

El gradiente de una función representa un vector normal a la superficie indicada: $\nabla f = (2xy-2y^2z, x^2-4xyz, -2xy^2+6z) \to (\nabla f)_P = (-20,17,4)$ cuyo módulo es $|\overrightarrow{grad} f| = \sqrt{20^2+17^2+4^2} = \sqrt{705}$ por lo que el vector unitario normal a la superficie es el $\vec{u} = \dfrac{1}{\sqrt{705}}(-20,17,4)$

13.3. Rotacional de un campo vectorial

Se define el rotacional de un campo vectorial $\vec{F}$ como el producto vectorial de ∇ por $\vec{F}$, es decir, $rot(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F}$ y teniendo en cuenta la expresión de un producto vectorial, el rotacional de un vector se puede indicar simbólicamente como el desarrollo del determinante $rot(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$
Teniendo en cuenta que el producto vectorial es distributivo, se deduce que el rotacional es un operador lineal: $rot(a\vec{F}+b\vec{G}) = a\ rot(\vec{F}) + b\ rot(\vec{G})$

Físicamente, el rotacional es un operador vectorial que muestra la tendencia de un campo vectorial a girar alrededor de un punto.

Ejemplo 13.3 *Hallar el rotacional del campo vectorial*
$\vec{F} = (2xy-y^2)\vec{i} + (3yz-2z^2)\vec{j} + 3xy^2z^3\vec{k}$ *en el punto* $P(3,-2,-1)$

Aplicando la expresión anterior es:

$$\begin{aligned} rot(\vec{F}) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy-y^2 & 3yz-2z^2 & 3xy^2z^3 \end{vmatrix} \\ &= (6xyz^3-3y+4z)\vec{i} + (0-3y^2z^3)\vec{j} + (0-2x+2y)\vec{k} \end{aligned}$$

por lo que $(rot(\vec{F}))_P = 38\vec{i} + 12\vec{j} - 10\vec{k}$

Teorema 13.1 *El rotacional del gradiente de una función escalar es nulo.*

Demostración. Sea la función escalar $f(x, y, z)$. Entonces:

$$rot(grad\ f) = rot\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = \vec{0}$$

sin más que tener en cuenta el teorema de Schwarz sobre la igualdad de las segundas derivadas parciales.

13.4. Divergencia de un campo vectorial

Sea el campo vectorial $\vec{F} = (X, Y, Z)$ cuyas componentes F_1, F_2, F_3, son funciones uniformes y derivables en cada punto de $V \subset \mathcal{R}^3$. El producto escalar de los vectores ∇ y $\vec{F}$ toma la forma
$\nabla\vec{F} = (\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k})(F_1\vec{i} + F_2\vec{j} + F_3\vec{k}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$ y recibe el nombre de divergencia del campo vectorial $\vec{F}$, es decir, $div(\vec{F}) = \nabla\vec{F}$.

Si se considera $\vec{F}$ como un fluído que entra en un espacio, la divergencia de $\vec{F}$ representa la diferencia de fluído entre el punto de entrada y el de salida, aunque en un espacio infinitesimal.

La divergencia es un operador lineal: $\nabla(a\vec{F} + b\vec{G}) = a\nabla\vec{F} + b\vec{G}$ sin más que tener en cuenta que el producto escalar es distributivo.

Ejemplo 13.4 *Hallar la divergencia del campo vectorial*
$\vec{F} = x^2\vec{i} + (y^2x - 3yz^2)\vec{j} + (z^2 - 2xy)\vec{k}$ *en el punto* $(3, -2, 1)$

Las derivadas parciales son

$$\begin{cases} F_1 = x^2 & \to \frac{\partial F_1}{\partial x} = 2x \to (\frac{\partial F_1}{\partial x})_P = 6 \\ F_2 = y^2x - 3yz^2 & \to \frac{\partial F_2}{\partial y} = 2xy - 3z^2 \to (\frac{\partial F_2}{\partial y})_P = -15 \\ F_3 = z^2 - 2xy & \to \frac{\partial F_3}{\partial z} = 2z \to (\frac{\partial Z}{\partial F_3})_P = 2 \end{cases}$$

Por tanto, $(div(\vec{F}))_P = -7$

Teorema 13.2 *La divergencia del rotacional de una función vectorial es nula.*

Demostración. Sea la función vectorial $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$. Entonces,

$$\begin{aligned} div(rot\vec{F}) &= div\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) \\ &= \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial z \partial x} = 0 \end{aligned}$$

Los tres conceptos anteriores se pueden resumir como sigue:

- El gradiente de una función escalar $f(x, y, z)$ es una función vectorial:

$$\overrightarrow{grad}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

- El rotacional de una función vectorial $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ es una función vectorial:

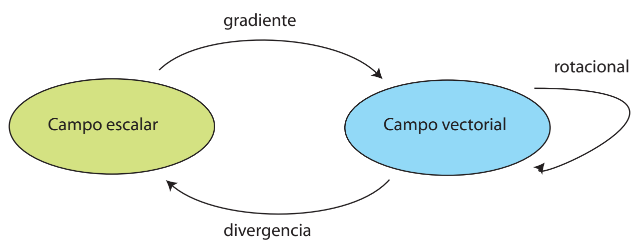
$$\overrightarrow{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x}\right)$$

- La divergencia de una función vectorial $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ es una función escalar:

$$div(\vec{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

13.5. Campos conservativos

Se dice que un campo vectorial $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ es conservativo si se obtiene como el gradiente de una función escalar $U(x, y, z)$, es decir, si
$\vec{F} = \overrightarrow{grad}(U)$



La función $U(x, y, z)$ se llama función potencial del campo vectorial $\vec{F}$ si verifica que

$\vec{F} = \dfrac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial U}{\partial z}\vec{k} = F_1\vec{i} + F_2\vec{j} + F_3\vec{k}$

Pero según el teorema anterior 13.1 es $rot(grad\ U) = 0$ por lo que se deduce que un campo vectorial $\vec{F}$ es conservativo si $rot(\vec{F}) = 0$, lo que exige que se verifique la igualdad de las derivadas cruzadas:

$$\vec{F} \text{ es conservativo} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\partial F_1}{\partial y} = \dfrac{\partial F_2}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial z} = \dfrac{\partial F_3}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial z} = \dfrac{\partial F_3}{\partial y} \end{array} \right\}$$

Esta condición se puede expresar en forma reducida mediante el *Lema de Poincaré*: el campo vectorial $\vec{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$ es conservativo si $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial F_j}{\partial x_i}$ para $i \neq j$.

13.5.1. Cálculo de la función potencial

Sea U una función potencial tal que $\dfrac{\partial U}{\partial x} = F_1$, $\dfrac{\partial U}{\partial y} = F_2$, $\dfrac{\partial U}{\partial z} = F_3$. De la primera de estas ecuaciones se deduce que $U = \displaystyle\int_{x_0}^{x} F_1(x, y, z)dx + \phi(y, z)$. Derivando con respecto a y e igualando con la segunda ecuación anterior se obtiene $\dfrac{\partial U}{\partial y} = \displaystyle\int_{x_0}^{x} \dfrac{\partial F_1}{\partial y} dy + \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = F_2$.

Pero como $\dfrac{\partial F_1}{\partial y} = \dfrac{\partial F_2}{\partial x}$ resulta que $\dfrac{\partial U}{\partial y} = \displaystyle\int_{x_0}^{x} \dfrac{\partial F_2}{\partial x} dx + \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = F_2$ y por tanto

$$[F_2]_{x_0}^{x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} = F_2 \to F_2(x,y,z) - F_2(x_0,y,z) + \frac{\partial \phi}{\partial y} = F_2(x,y,z)$$

$$\to \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = F_2(x_0,y,z) \to \phi = \int_{y_0}^{y} F_2(x_0,y,z)dy + \psi(z)$$

Derivando con respecto a z e igualando con la tercera ecuación anterior se obtiene $\dfrac{\partial U}{\partial z} = \displaystyle\int_{y_0}^{y} \dfrac{\partial F_2}{\partial z} dy + \dfrac{\partial \psi}{\partial z} = F_3$.

Pero como $\dfrac{\partial F_2}{\partial z} = \dfrac{\partial F_3}{\partial y}$ queda $\displaystyle\int_{y_0}^{y} \dfrac{\partial F_3}{\partial y} dy + \dfrac{\partial \psi}{\partial z} = F_3$ y por tanto

$$[F_3]_{y_0}^{y} + \frac{\partial \psi}{\partial z} = F_3 \to F_3(x,y,z) - F_3(x,y_0,z) + \frac{\partial \psi}{\partial z} = F_3(x,y,z)$$

$$\to \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = F_3(x,y_0,z) \to \psi = \int_{z_0}^{z} F_3(x,y_0,z)dz + C$$

Luego, la función potencial es

$$U = \int_{x_0}^{x} F_1(x,y,z)dx + \int_{y_0}^{y} F_2(x_0,y,z)dy + \int_{z_0}^{z} F_3(x_0,y_0,z)dz + C$$

En la práctica, para hallar la función potencial se integra una componente con respecto a su variable y se le suma la integral de todos los sumandos de otra componente que no posean la variable anterior y se acaba sumando la integral de todos los sumandos de la tercera componente que no posean ninguna de las dos variables anteriores.

Ejemplo 13.5 *Comprobar que* $\vec{F} = (4xyz^3 - 3y^2, 2x^2z^3 - 6xy + z^2, 6x^2yz^2 + 2yz - 4)$ *es un campo vectorial conservativo y hallar su función potencial.*

$\vec{F}$ es conservativo si se verifica la igualdad de las derivadas cruzadas:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 4xz^3 - 6y = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = 12xyz^2 = \frac{\partial F_3}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial z} = 6x^2z^2 + 2z = \frac{\partial F_3}{\partial y}$$

Su función potencial es

$$U = \int (4xyz^3 - 3y^2)dx + \int z^2 dy + \int (-4)dz = 2x^2yz^3 - 3xy^2 + yz^2 - 4z + C$$

Ejemplo 13.6 *Comprobar que el campo vectorial* $\vec{F} = \left(\frac{2y}{z^2} - \frac{3z}{y^2} + \frac{8yz}{x^3}, \frac{2x}{z^2} + \frac{6xz}{y^3} - \frac{4z}{x^2}, -\frac{4xy}{z^3} - \frac{3x}{y^2} - \frac{4y}{x^2} \right)$ *es conservativo y hallar su función potencial.*

Se ha de verificar la igualdad de las derivadas cruzadas:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{2}{z^2} + \frac{6z}{y^3} + \frac{8z}{x^3} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$
$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = -\frac{4y}{z^3} - \frac{3}{y^2} + \frac{8y}{x^3} = \frac{\partial F_3}{\partial x}$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial z} = -\frac{4x}{z^3} + \frac{6x}{y^3} - \frac{4}{x^2} = \frac{\partial F_3}{\partial y}$$

Su función potencial es

$$U = \int \left(\frac{2y}{z^2} - \frac{3z}{y^2} + \frac{8yz}{x^3} \right) dx = \frac{2xy}{z^2} - \frac{3xz}{y^2} - \frac{4yz}{x^2} + C$$

13.6. Campos irrotacionales

Se dice que un campo vectorial $\vec{F}$ es irrotacional si su rotacional es nulo. Pero entonces, según acabamos de ver, el campo $\vec{F}$ es potencial, por lo que podemos reducir esta propiedad indicando que *todo campo vectorial potencial es irrotacional y viceversa.*

El que el rotacional de un campo alrededor de un punto sea distinto de cero no implica que las líneas de campo giren alrededor de ese punto. Por ejemplo, el campo de velocidades de un fluido que circula por una tubería posee un rotacional no nulo en todas partes, salvo el eje central, pese a que la corriente fluye en línea recta.

Ejemplo 13.7 *Comprobar que el campo vectorial* $\left(\frac{2x}{y}, \frac{-x^2}{y^2} - \frac{2y}{z}, \frac{y^2}{z^2} + 2z\right)$ *es irrotacional y hallar su función potencial.*

Basta comprobar que se verifica la igualdad de las derivadas cruzadas:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -\frac{2x}{y^2} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = 0 = \frac{\partial F_3}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{2y}{z^2} = \frac{\partial F_3}{\partial y}$$

Su función potencial es

$$U = \int \frac{2x}{y}dx + \int \frac{-2y}{z}dy + \int 2zdz = \frac{x^2}{y} - \frac{y^2}{z} + z^2 + C$$

13.7. Campos solenoidales

Un campo vectorial es solenoidal si su divergencia es nula. En tal caso, se dice que un campo vectorial no tiene fuentes ni sumideros.

Un campo vectorial $\vec{G}$ es solenoidal si es el rotacional de un campo vectorial $\vec{F}$. Es decir, si $\vec{G} = rot(\vec{F})$ entonces $div(rot(\vec{F})) = 0$. Ahora, bien, según el teorema (13.2), la divergencia del rotacional de un campo vectorial es nula por lo que se puede asegurar que un campo vectorial es solenoidal si es el rotacional de un campo vectorial.

En consecuencia, si un campo vectorial es solenoidal el mismo fluído que entra en el campo es el que sale de él, lo que se interpreta diciendo que no hay fuentes ni sumideros en todo punto del campo vectorial.

Ejemplo 13.8 *Comprobar que* $(3xy(x - z^2), 3xy(z^2 - y), z^3(y - x))$ *es un campo vectorial solenoidal.*

Su divergencia ha de ser nula:

$$\begin{aligned} div\vec{F} &= \frac{\partial(3x^2y - 3xyz^2)}{\partial x} + \frac{\partial(3xyz^2 - 3xy^2)}{\partial y} + \frac{\partial(yz^3 - xz^3)}{\partial z} \\ &= 6xy - 3yz^2 + 3xz^2 - 6xy + 3yz^2 - 3xz^2 = 0 \end{aligned}$$

13.8. Ejercicios resueltos

1. *Comprobar si* $\vec{F} = \left(\dfrac{x}{y^2} - \dfrac{z^2}{x^3}, -\dfrac{x^2}{y^3} - \dfrac{y}{z^2}, \dfrac{y^2}{z^3} + \dfrac{z}{x^2}\right)$ *es conservativo. En caso afirmativo, hallar su función potencial.*

   Un campo vectorial $\vec{F}$ es conservativo si se verifica la igualdad de las derivadas cruzadas:

   $$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{-2x}{y^3} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$
   $$\frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{-2z}{x^3} = \frac{\partial F_3}{\partial x}$$
   $$\frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{2y}{z^3} = \frac{\partial F_3}{\partial y}$$

   Por lo tanto, el campo vectorial dado es conservativo. Su función potencial es

   $$U = \int \left(\frac{x}{y^2} - \frac{z^2}{x^3}\right) dx + \int -\frac{y}{z^2} dy + \int 0 dz = \frac{x^2}{2y^2} + \frac{z^2}{2x^2} - \frac{y^2}{2z^2} + C$$

2. *Comprobar que* $\vec{F} = \left(x^2(y^2 - z^2), \dfrac{2}{3}x^3y + 4z, -\dfrac{2}{3}x^3z + 4y\right)$ *es irrotacional y hallar su función potencial.*

   Un campo vectorial $\vec{F}$ es irrotacional si es conservativo y, por tanto, si se verifica la igualdad de las derivadas cruzadas:

   $$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2x^2y = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$
   $$\frac{\partial F_1}{\partial z} = -2x^2z = \frac{\partial F_3}{\partial x}$$
   $$\frac{\partial F_2}{\partial z} = 4 = \frac{\partial F_3}{\partial y}$$

   Por lo tanto, el campo vectorial dado es conservativo. Su función potencial es

   $$U = \int \left(x^2(y^2 - z^2)\right) dx + \int 4z dy + \int 0 dz = \frac{x^3}{3}(y^2 - z^2) + 4yz + C$$

3. *Comprobar que* $\vec{F} = (2x(y-z), 2y(z-x), 2z(x-y))$ *es solenoidal.*

   Un campo vectorial es solenoidal si su divergencia es nula:

$$\begin{aligned} div(\vec{F}) &= \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) \\ &= 2(y-z) + 2(z-x) + 2(x-y) = 0 \end{aligned}$$

4. *Hallar* $a,\ b,\ c$ *para que* $\vec{F} = (6x + 2y + 3z, ax + 2y - 4z, bx + cy + 5z)$ *sea irrotacional. En ese caso, hallar su función potencial.*

   $\vec{F}$ es irrotacional si se verifica la igualdad de las derivadas cruzadas:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial F_1}{\partial y} = 2 \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} = a \end{array}\right\} \rightarrow a = 2$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial F_1}{\partial z} = 3 \\ \dfrac{\partial F_3}{\partial x} = b \end{array}\right\} \rightarrow b = 3$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial F_2}{\partial z} = -4 \\ \dfrac{\partial F_3}{\partial y} = c \end{array}\right\} \rightarrow c = -4$$

   Por lo tanto, el campo vectorial
   $\vec{F} = (6x + 2y + 3z, 2x + 2y - 4z, 3x - 4y + 5z$ es conservativo y su función potencial es
   $U = \displaystyle\int (6x + 2y + 3z)dx + \int (2y - 4z)dy + \int 5zdz$, es decir,
   $U = 3x^2 + 2xy + 3xz + y^2 - 4yz + \dfrac{5}{2}z^2 + C$

5. *Hallar la divergencia del gradiente de un campo escalar* $f(x, y, z)$

   Dado que $\overrightarrow{grad\, f} = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}\right)$, es

$$div(grad\ f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \Delta f$$

El operador vectorial $\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$ recibe el nombre de *laplaciana* y tiene gran interés en el estudio de la transmisión del calor.

Capítulo 14

INTEGRAL DE LÍNEA

En un capítulo anterior se ha estudiado el concepto de integral definida de Cauchy-Riemann como la suma de las áreas de infinitos rectángulos comprendidos entre una curva $y = f(x)$ y el eje de abscisas, siendo el resultado final el área encerrada por dicha curva, el eje de abscisas y dos rectas verticales.

Posteriormente se estudió el concepto de integral doble de forma parecida al anterior, resultando el volumen del cilindro limitado por la superficie $z = f(x, y)$, el plano XOY y paredes verticales sobre un recinto plano $R \in XOY$.

En este capítulo se estudia un nuevo concepto de integral, cual es el de integral de línea, la cual indica el trabajo efectuado por una fuerza vectorial a lo largo de una curva entre dos puntos de ésta. Como consecuencia, la integral de línea depende no sólo de la función $\vec{F}$ y de los puntos inicial A y final B, sino también del camino γ sobre el cual se aplica dicha función vectorial.

14.1. Concepto de integral de línea

Sea γ una curva del plano XOY entre los puntos (a, b) y (a', b').
Efectuamos una partición de la curva γ mediante los puntos
$(x_0, y_0) = (a, b), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n) = (a', b')$.
Sea además $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
En γ escogemos los puntos (α_i, β_i) situados entre (x_{i-1}, y_{i-1}) y (x_i, y_i).
Por último, sean las funciones $X(x, y)$ e $Y(x, y)$ definidas y continuas en todo punto de la curva γ.

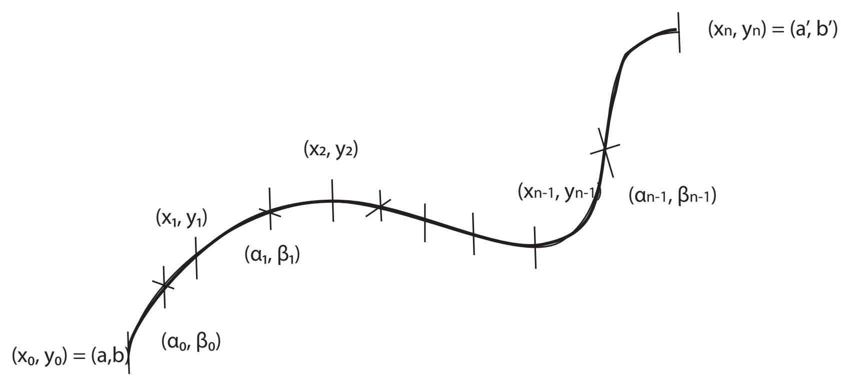


Figura 14.1: Concepto de Integral de línea

Con estos preliminares, vamos a definir un nuevo tipo de integral. Para ello, formemos la suma $\sum_{i=1}^{n} [X(\alpha_i, \beta_i)\Delta x_i + Y(\alpha_i, \beta_i)\Delta y_i]$. Si existe el límite de esta suma cuando $\text{máx}\, \Delta x_i \to 0$ y $\text{máx}\, \Delta y_i \to 0$, se llama *Integral de línea* a lo largo de la curva γ y se indica como

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [X(\alpha_i, \beta_i)\Delta x_i + Y(\alpha_i, \beta_i)\Delta y_i] = \int_\gamma X(x, y)dx + Y(x, y)dy$$

De forma parecida se define la integral de línea en el espacio como

$$\int_\gamma X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz$$

14.2. Interpretaciones de la integral de línea

Vectorialmente, una integral de línea puede indicarse de la siguiente forma. Sea $P(x, y)$ un punto genérico de la curva γ. Se llama radio vector de P al vector $\vec{r} = \overrightarrow{OP} = (x, y)$, siendo $d\vec{r} = (dx, dy)$.

Sea la función vectorial $\vec{F} = (X(x, y), Y(x, y))$. Entonces, la integral de línea representa *la integral del producto escalar* de los vectores $\vec{F}$ y $d\vec{r}$, es decir:

$$\int_{\gamma} X(x, y)dx + Y(x, y)dy = \int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} \tag{14.1}$$

Una interpretación física de la integral de línea es que representa *el trabajo* realizado por la fuerza $\vec{F}$ a lo largo de la línea γ entre los puntos $A,\ B \in \gamma$.

Si γ es una línea cerrada, la integral de línea se indica en la forma $\oint_{\gamma} X dx + Y dy$. En este caso, la fórmula (14.1) representa la *circulación* del vector $\vec{F}$ a lo largo de la línea cerrada γ y la integral se la conoce como *integral de contorno*, aunque a veces ambas reciben el mismo nombre de integral curvilínea. Para fijar el signo de una integral de contorno indicaremos que éste es positivo si al recorrer la línea cerrada, el recinto que encierra queda a la izquierda del recorrido y es negativo en caso contrario.

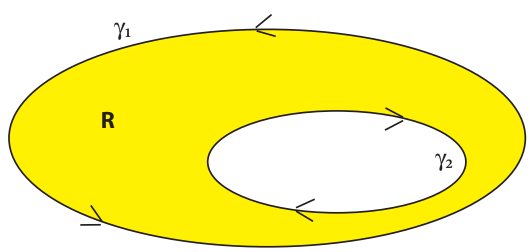


Figura 14.2: Recorrido positivo en una integral de contorno

14.3. Propiedades de la integral de línea

Las integrales de línea tienen propiedades parecidas a las de las integrales definidas. Y así, por ejemplo:

- *Propiedad aditiva del camino:*
  Si $A, B, C \in \gamma$, $\int_{AB} \vec{F} d\vec{r} = \int_{AC} \vec{F} d\vec{r} + \int_{CB} \vec{F} d\vec{r}$
- *Inversión de los límites:*
  $\int_A^B \vec{F} d\vec{r} = -\int_B^A \vec{F} d\vec{r}$

14.4. Cálculo de la integral de línea

Sea la integral de línea $\int_\gamma X dx + Y dy$ siendo γ una línea que une los puntos $A(x_0, y_0)$ y $B(x_1, y_1)$. Para resolver esta integral de línea, usaremos alguno de los métodos que se indican a continuación.

1. Si γ está expresada en forma explícita $y = y(x)$, se sustituye tanto la función $y(x)$ como su diferencial $dy = y'(x)dx$ en la integral propuesta (siempre que $A \neq B$), entre los valores x_0 y x_1 resultando la integral
   $\int_{x_0}^{x_1} [X(x, y(x)) + Y(x, y(x))y'(x)]\, dx$
   En caso de que A coincida con B, la integral no siempre será nula como veremos más adelante. Pero seguramente la curva γ se podrá descomponer en dos curvas mediante las funciones $y = y_1(x)$ desde A hasta un punto C de la curva e $y = y_2(x)$ desde C hasta B, con lo que la integral de línea se descompone en dos integrales definidas:
   $\int_{x_A}^{x_B} y(x)dx = \int_{x_A}^{x_C} y_1(x)dx + \int_{x_C}^{x_B} y_2(x)dx.$

   Ejemplo 14.1 *Hallar la integral de línea* $\int_\gamma (x^2 - 2y + 1)dx + \frac{y-1}{y+x}dy$ *entre los puntos* $(0, 0)$ *y* $(-1, 1)$ *a lo largo de la parábola* $y = x^2$

Sustituyendo tanto $y = x^2$ como $dy = 2xdx$ en la integral de línea se obtiene la integral definida entre $x_0 = 0$ y $x_1 = -1$:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{-1} \left(-x^2 + 1 + \frac{x^2-1}{x(x+1)} 2x \right) dx = \int_0^{-1} (-x^2 + 2x - 1) dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 - x \right]_0^{-1} = \frac{1}{3} + 1 + 1 = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

Ejemplo 14.2 *Hallar la integral de línea* $\int_{AB} xydx + 3y^2dy$ *si A(0,1) y B(1,e) son dos puntos de la curva* $y = e^x$

Sustituyendo $y = e^x \wedge dy = e^x dx$ en la integral propuesta, resulta la integral definida

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 xe^x dx + 3e^{2x} e^x dx = \int_0^1 (xe^x + 3e^{3x}) dx \\ &= \left[e^x(x-1) + e^{3x} \right]_0^1 = e^3 + 1 - 1 = e^3 \end{aligned}$$

2. Si la curva γ está expresada en forma paramétrica $x = x(t)$, $y = y(t)$, basta sustituir estas expresiones en la integral propuesta, teniendo en cuenta que $dx = x'(t)dt$, $dy = y'(t)dt$, siendo $x'(t)$ e $y'(t)$ las derivadas con respecto a t de las funciones $x(t)$ e $y(t)$, respectivamente. La función resultante se integra como una integral definida entre los puntos t_0 y t_1 correspondientes a A y B:
   $I = \int_{t_0}^{t_1} [X(x(t), y(t))x'(t) + Y(x(t), y(t))y'(t)]dt$

Ejemplo 14.3 *Hallar* $\int_\gamma \frac{x-1}{y+2} dx + (2x - 3y - 10)dy$ *a lo largo de la curva* $x(t) = t^2 - 2t + 1, \;\; y(t) = 2t - 6$ *entre los puntos* $A(4, -8)$ *y* $B(0, -4)$.

El punto A corresponde a $t=-1$ y el B a $t=1$. Sustituyendo las expresiones de $x(t)$ e $y(t)$ en la integral indicada, se obtiene la integral definida

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^{1} \frac{t^2-2t+1-1}{2t-6}(2t-2)dt + (2t^2-4t+2-6t+18+10)2dt \\
&= \int_{-1}^{1} (t^2-t+4t^2-20t+20)dt = \left[\frac{5t^3}{3} - \frac{21t^2}{2} + 20t\right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{130}{3}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 14.4 *Hallar la circulación del campo vectorial $\vec{F}=(-y,x)$ a lo largo de la astroide $x(t)=2\cos^3 t$, $y(t)=2\operatorname{sen}^3 t$.*

La circulación de campo vectorial es la integral de contorno

$$
\begin{aligned}
I &= \oint_\gamma \vec{F}d\vec{r} = \oint_\gamma -ydx+xdy \\
&= \int_0^{2\pi} 2\operatorname{sen}^3 t\cdot 2\cdot 3\cos^2 t\operatorname{sen} tdt + 2\cos^3 t\cdot 2\cdot 3\operatorname{sen}^2 t\cos tdt \\
&= 12\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t\cos^2 t(\cos^2 t+\operatorname{sen}^2 t)dt = \frac{12}{4}\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^2(2t)dt \\
&= 3\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos(4t)}{2}dt = \frac{3}{2}\left[t-\frac{\operatorname{sen}(4t)}{4}\right]_0^{2\pi} = 3\pi
\end{aligned}
$$

3. Si γ está expresada en forma implícita, es conveniente expresarla en forma paramétrica y continuar como en el caso anterior.

Ejemplo 14.5 *Hallar* $\int_\gamma \frac{x}{y}dx - \frac{3y}{x}dy$ *entre los puntos* $(0,1)$ *y* $(2,5)$ *sobre la curva* $x^4+x^2-y^2+y=0$

Hacemos $x=t$ y se obtiene la ecuación de segundo grado
$t^4+t^2-y^2+y=0 \to y^2-y-(t^4+t^2)=0$ cuyas soluciones son $y=t^2$,

$y = t^2 + 1$. Si $x = 0$ e $y = 1$ es $t = 0$ en la ecuación $y = t^2 + 1$ por lo que es ésta la que hay que escoger. Para $x = 2$ e $y = 5$ es $t = 2$. En consecuencia, las ecuaciones paramétricas de la curva son $x = t$ e $y = t^2 + 1$ que se sustituyen en la integral indicada:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \frac{t}{t^2+1}dt - \frac{3t^2+3}{t}2tdt = \int_0^2 \left(\frac{t}{t^2+1} - 6t^2 - 6\right) dt \\ &= \left[\frac{1}{2}\ln(t^2+1) - 2t^3 - 6t\right]_0^2 = \frac{1}{2}\ln 5 - 28 \end{aligned}$$

Ejemplo 14.6 *Hallar* $\int_{AB} (x-1)dx + (y+1)dy$ *siendo* $A(3,-2)$ *y* $B(1,1)$ *dos puntos de la elipse* $9(x-1)^2 + 4(y+2)^2 = 36$

Hacemos el cambio a coordenadas elípticas $x = 1 + 2\cos t$, $y = -2 + 3\operatorname{sen} t$ con lo que el punto A(3, -2) corresponde al valor $t = 0$ mientras que a B(1, 1) le corresponde $t = \frac{\pi}{2}$.
Por otra parte, $dx = -2\operatorname{sen} tdt$, $dy = 3\cos tdt$. Por tanto:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t(-2\operatorname{sen} t)dt + (-1 + 3\operatorname{sen} t)3\cos tdt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (5\operatorname{sen} t\cos t - 3\cos t)dt = \left[5\frac{\operatorname{sen}^2 t}{2} - 3\operatorname{sen} t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

4. Una integral de contorno también puede resolverse transformándola en una integral doble como se indica a continuación.

14.5. Teorema de Green en el plano

El teorema de Greeen en el plano establece una relación entre una integral de línea extendida sobre una línea cerrada y la integral doble extendida al recinto interior encerrado por dicha línea.

Sea R un dominio regular en el plano XOY, interior al rectángulo $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, siendo γ la curva cerrada frontera de R.

Sean A y B los extremos horizontales de la curva y a y b sus respectivas abscisas. Sea $y = y_2(x)$ la curva superior comprendida entre estos puntos e $y = y_1(x)$ la curva inferior (ver Figura(14.3)).

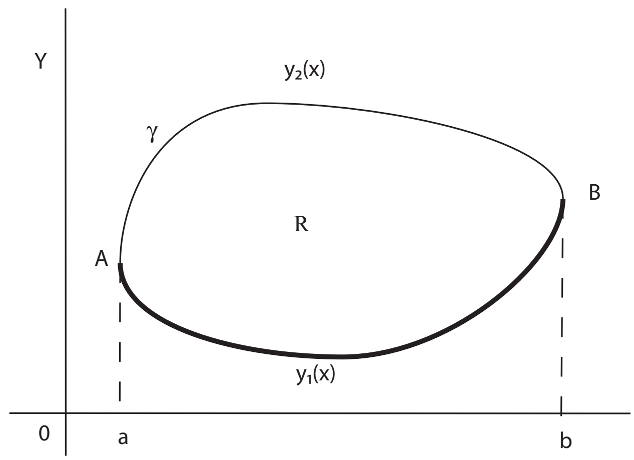


Figura 14.3: Teorema de Green: primera parte

Si $X(x, y)$ e $Y(x, y)$ son dos funciones continuas con derivadas parciales continuas en el dominio R, entonces

$$\begin{aligned}
\int\int_R \frac{\partial X}{\partial y} dxdy &= \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial X}{\partial y}\, dy \right) dx = \int_a^b [X]_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx \\
&= \int_a^b \left[X(x, y_2(x)) - X(x, y_1(x)) \right] dx \\
&= -\int_b^a X(x, y_2(x)) dx - \int_a^b X(x, y_1(x)) dx \\
&= -\oint_\gamma X(x, y)\, dx
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\oint_\gamma X(x,y)dx = -\int\int_R \frac{\partial X}{\partial y}dxdy \tag{14.2}$$

Sean C y D los extremos verticales de la curva y c y d sus respectivas ordenadas, $x = x_2(y)$ la parte derecha de la curva comprendida entre estos puntos y $x = x_1(x)$ la parte izquierda (ver Figura(14.4)).

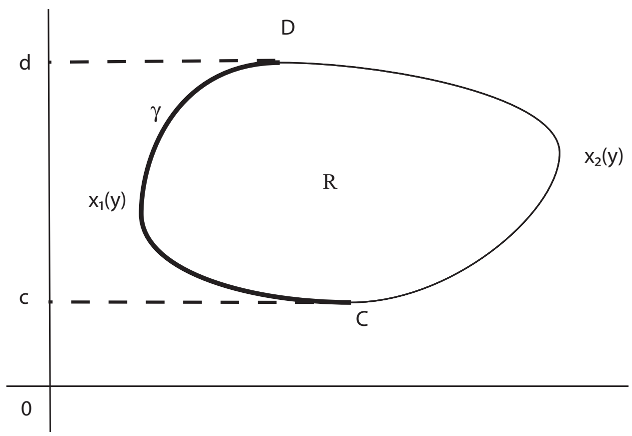


Figura 14.4: Teorema de Green: segunda parte

Entonces

$$\begin{aligned}
\int\int_R \frac{\partial Y}{\partial x}dxdy &= \int_c^d \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Y}{\partial x}\,dx\right)dy = \int_c^d [Y]_{x_1(y)}^{x_2(y)}\,dy \\
&= \int_c^d [Y(x_2(y),y) - Y(x_1(y),y)]\,dy \\
&= \int_c^d Y(x_2(y),y)dy + \int_D^C Y(x_1(y),y)dx \\
&= \oint_\gamma Y(x,y)\,dy
\end{aligned}$$

En consecuencia, $\oint_\gamma Y(x,y)dx = \int\int_R \frac{\partial Y}{\partial x}dxdy$

Sumando esta igualdad con la (14.2) se obtiene la fórmula de Green en el plano:

$$\oint_{\gamma} X(x,y)dx + Y(x,y)dy = \int\int_{R} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dxdy \tag{14.3}$$

Mediante esta fórmula, una integral de contorno a lo largo de una línea cerrada se transforma en una integral doble sobre el recinto que la curva encierra.

Ejemplo 14.7 *Hallar la circulación del campo vectorial* $\vec{F} = (x^2 + x\,y)\vec{i} + (-x + y^2)\vec{j}$ *a lo largo de la línea cerrada limitada por las curvas* $y = 3x - 1, \;\; y = x^2 + 1$

Hallemos en primer lugar los puntos de intersección de ambas curvas: $x^2 + 1 = 3x - 1 \rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow x = 1, \;\; x = 2$. El contorno solicitado así como el recinto que contiene se indican en la Figura(14.5)

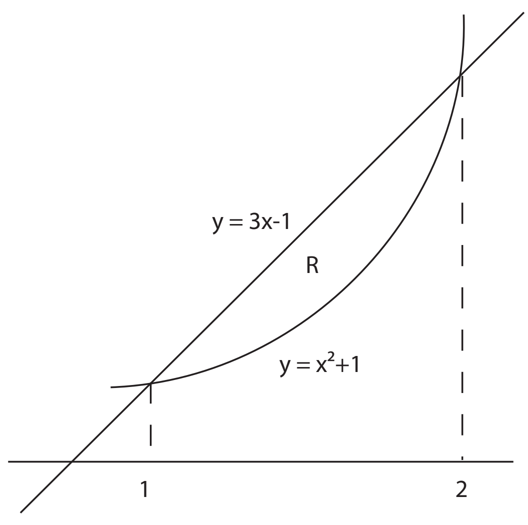


Figura 14.5: Aplicación del teorema de Green

Puesto que según el teorema de Green es

$$\oint_\gamma \vec{F}d\vec{r} = \oint_\gamma X(x,y)dx + Y(x,y)dy = \int\int_R \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dxdy, \text{ entonces}$$

$$\begin{aligned}
I &= \oint_\gamma (x^2 + x\,y)dx + (-x + y^2)dy = \int\int_R (-1 - x)dxdy \\
&= -\int_1^2 \left(\int_{x^2+1}^{3x-1} dy\right)(1+x)dx = -\int_1^2 (3x - 2 - x^2)(1+x)dx \\
&= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{x}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_1^2 = -\frac{5}{12}
\end{aligned}$$

Ejemplo 14.8 *Hallar la circulación del vector* $\vec{F} = (x^2 + y^2, x^2 - y^2 + 1)$ *a lo largo de la circunferencia* $x^2 + (y-1)^2 = 9$

La circulación de un vector $\vec{F}$ a lo largo de una línea cerrada γ es la integral de contorno $\oint_\gamma \vec{F}d\vec{r}$.
Por ser una línea cerrada se puede aplicar el teorema de Green:
$\displaystyle\oint_\gamma Xdx + Ydy = \int\int_R \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dxdy$ por lo que
$\displaystyle\oint_\gamma (x^2 + y^2)d + (x^2 - y^2 + 1)dy = \int\int_R (2x - 2y)dxdy.$

El cambio a coordenadas elípticas $x = \rho\cos t$, $y = 1 + \rho\,\mathrm{sen}\,t$ hace que el valor del jacobiano sea $J = \rho$ y la integral se transforme en
$$\int_0^{2\pi}\left[\int_0^3 (2\rho\cos t - 2 - 2\rho\,\mathrm{sen}\,t)d\rho\right]dt = \int_0^{2\pi}(9\cos t - 6 - 9\,\mathrm{sen}\,t)dt = -12\pi$$

Estos ejemplos nos han servido para comprobar que la integral de línea a lo largo de una curva cerrada (integral de contorno) no necesariamente ha de ser nula, aunque sí hay casos en los que puede serlo.

Y a veces, el trabajo efectuado por una función a lo largo de una línea entre dos puntos de la misma, no depende necesariamente del camino recorrido sino tan sólo de los puntos inicial y final.

A continuación se indica la condición que ha de verificar la función vectorial $\vec{F}$ para que su trabajo no dependa del camino recorrido.

14.6. Independencia de la integral de contorno del camino de integración

Sean $X(x,y)$ e $Y(x,y)$ dos funciones continuas con derivadas parciales continuas en un dominio D de contorno γ.

Condición necesaria y suficiente para que la integral de contorno $\oint_\gamma X dx + Y dy$ sea nula es que se verifique la igualdad de las derivadas cruzadas $\dfrac{\partial Y}{\partial x} = \dfrac{\partial X}{\partial y}$.

Demostración.

- Condición suficiente: Supongamos que $\dfrac{\partial Y}{\partial x} = \dfrac{\partial X}{\partial y}$. Sustituyendo en la fórmula de Green resulta
  $\oint_\gamma X(x,y)dx + Y(x,y)dy = \int\int_D \left(\dfrac{\partial Y}{\partial x} - \dfrac{\partial X}{\partial y} \right) dxdy = 0.$

- Condición necesaria: Supongamos que $\oint_\gamma X(x,y)dx + Y(x,y)dy = 0$ en cualquier curva cerrada de γ siendo $\dfrac{\partial Y}{\partial x} - \dfrac{\partial X}{\partial y} \neq 0$ en algún punto de D.

  Sea por ejemplo $\dfrac{\partial Y}{\partial x} - \dfrac{\partial X}{\partial y} > 0$ en el punto (x_0, y_0). Por ser X, Y, $\dfrac{\partial X}{\partial y}$ y $\dfrac{\partial Y}{\partial x}$ funciones continuas en D, también lo serán en un subdominio $D' \subset D$ al que pertenece el punto (x_0, y_0). Sea r' el contorno de D'. Según el teorema de Green es $\oint_{r'} X(x,y)dx = \int\int_{D'} \left(\dfrac{\partial Y}{\partial x} - \dfrac{\partial X}{\partial y} \right) dxdy > 0$ lo que iría en contradicción con la hipótesis de que $\oint X dx + Y dy = 0$ en toda curva cerrada de D. De la misma forma se demuestra que $\dfrac{\partial Y}{\partial x} - \dfrac{\partial X}{\partial y}$ no puede ser negativa. En consecuencia, ha de ser necesariamente
  $\dfrac{\partial Y}{\partial x} - \dfrac{\partial X}{\partial y} = 0$

con lo que queda demostrado el teorema.

Como consecuencia, si se verifica la igualdad de las derivadas cruzadas $\dfrac{\partial Y}{\partial x} = \dfrac{\partial X}{\partial y}$, la integral de línea $\int_{AB} Xdx + Ydy$ no depende del camino escogido para ir del punto A al B sino tan sólo de la posición de éstos.

Ejemplo 14.9 *Hallar* $\displaystyle\oint_{\gamma}(e^x + x^2y - 1)dx + (\frac{1}{3}x^3 - \operatorname{sen} y + 2)dy$ *a lo largo de la circunferencia* $x^2 + y^2 - 3x + 7y - 5 = 0$

Puesto que $\dfrac{\partial Y}{\partial x} = x^2 = \dfrac{\partial X}{\partial y}$, aplicando el teorema anterior, la integral sobre cualquier contorno es nula.

Ejemplo 14.10 *Hallar* $\int_{\gamma}(x^2 - y + 1)dx + (\frac{1}{y^2+1} - x + e^y)dy$ *entre los puntos* $(0,0)$ *y* $(1,1)$ *de la curva* $\gamma: \; x^3y^3 - 2x^2 + y^2 - x + y = 0$

Puesto que $\dfrac{\partial Y}{\partial x} = -1 = \dfrac{\partial X}{\partial y}$, la integral no depende del camino elegido, por lo que podemos cambiar la curva γ por la recta $y = x$ que une los puntos dados. Por tanto:

$$I = \int_0^1 (x^2 - x + 1 + \frac{1}{x^2+1} - x + e^x)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + \operatorname{arc\,tg} x + e^x\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} + e - \frac{1}{6}$$

En la práctica, para resolver una integral de línea es conveniente hallar en primer lugar las derivadas parciales $\dfrac{\partial Y}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial X}{\partial y}$ y puede suceder uno de los casos siguientes:

1. Se verifica la igualdad de las derivadas cruzadas $\dfrac{\partial Y}{\partial x} = \dfrac{\partial X}{\partial y}$:

   a) Si el camino es cerrado, la integral de contorno es nula.

   b) Si el camino es abierto, la integral de línea no depende del camino sino tan sólo de los puntos inicial y final. En este caso se puede seguir un camino sencillo para ir del primer punto al segundo o bien se halla la función potencial y se sustituyen los valores final e inicial, restando ambos resultados.

2. No se verifica la igualdad de las derivadas cruzadas $\dfrac{\partial Y}{\partial x} \neq \dfrac{\partial X}{\partial y}$:

   a) Si la línea es cerrada, se transforma la integral de contorno en una integral doble según el teorema de Green.

   b) Si la curva no es cerrada se cierra mediante una línea recta entre los puntos inicial, se aplica el teorema de Green y se resta la integral a lo largo de la recta.

   c) Se expresa la curva en forma paramétrica y se sustituyen los valores de las variables en $\int_\gamma \vec{F} d\vec{r}$.

14.7. Ejercicios sobre integrales de línea

1. *Hallar la circulación del campo vectorial* $\vec{F} = (x\, y^2, x^2 y + 3x)$ *sobre la elipse* $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ *de dos formas distintas.*

   La circulación del vector es $\oint_\gamma \vec{F} d\vec{r} = \oint_\gamma xy^2 dx + (x^2 + 3x)dy$.

   a) Directamente. El cambio de variables a coordenadas elípticas $x = 2\cos t$, $y = \operatorname{sen} t$ transforma la integral de contorno en la integral definida

$$\begin{aligned} T &= \int_0^{2\pi} [2\cos t \operatorname{sen}^2 t(-2\operatorname{sen} t) + (4\cos^2 t \operatorname{sen} t + 6\cos t)\cos t] dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-4\cos t \operatorname{sen}^3 t + 4\cos^3 t \operatorname{sen} t + 6\cos^2 t) dt \\ &= \left[-\operatorname{sen}^4 t - \cos^4 t + 3\left(t + \frac{sin(2t)}{2} \right) \right]_0^{2\pi} = 6\pi \end{aligned}$$

   b)Aplicando el teorema de Green:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial Y}{\partial x} = 2x\, y + 3 \\ \frac{\partial X}{\partial y} = 2x\, y \end{array} \right\} \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 3 \rightarrow T = \int\int_R 3dxdy$$

Pero esta integral, $\int\int_D dxdy$, es el área del recinto limitado por la elipse, $A = \pi ab = \pi \cdot 2 \cdot 1 = 2\pi$ por lo que finalmente $T = 6\pi$.

2. *Hallar la circulación del campo vectorial* $x^2y - 3x + 2, x\,y^2 + 2x - 1$ *sobre la curva intersección de las parábolas* $y = x^2$, $y = 2 - x^2$.

   Igualando ambas ecuaciones se obtienen los puntos de intersección $(-1, 1)$, $(1, 1)$.

   Comprobamos que no se verifica la igualdad de las derivadas cruzadas puesto que $\begin{cases} \frac{\partial Y}{\partial x} = y^2 + 2 \\ \frac{\partial X}{\partial y} = x^2 \end{cases}$ por lo que aplicamos la fórmula de Green:

$$\begin{aligned} T &= \oint_\gamma (x^2y - 3x + 2)dx + (x\,y^2 + 2x - 1)dy \\ &= \int\int_D \left(\frac{\partial(x\,y^2 + 2x - 1)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2y - 3x + 2)}{\partial y} \right) dxdy \\ &= \int_{-1}^{1} \left[\int_{x^2}^{2-x^2} (y^2 + 2 - x^2)dy \right] dx \\ &= \int_{-1}^{1} \left[\frac{y^3}{3} + 2y - x^2y \right]_{x^2}^{2-x^2} dx \\ &= \frac{1}{3} \int_{-1}^{1} (-2x^6 + 12x^4 - 30x^2 + 20)dx = \frac{848}{105} \end{aligned}$$

3. *Hallar la integral de línea* $\displaystyle\int_{AB} xydx - \frac{x+1}{y}dy$ *a lo largo de la curva* $x = t - 1$, $y = \dfrac{1}{t^2 + 1}$ *entre los puntos* $A(0, \frac{1}{2})$, $B(1, \frac{1}{5})$

   Los valores de t correspondientes a A y B son, respectivamente, $t = 1$ y $t = 2$. Por otra parte, $dx = dt$ y $dy = -\frac{2t}{(t^2+1)^2}$. Si sustituimos estos valores en la integral dada resulta:

$$\begin{aligned} T &= \int_1^2 \frac{t-1}{t^2+1}dt - (t-1+1)(t^2+1)\frac{-2t}{(t^2+1)^2}dt \\ &= \int_1^2 \frac{2t^2+t-1}{t^2+1}dt = \int_1^2 \left(2+\frac{t-3}{t^2+1}\right)dt \\ &= \left[2t+\frac{1}{2}\ln(t^2+1) - 3\operatorname{arc\,tg} t\right]_1^2 \\ &= 2+\frac{1}{2}\ln\frac{5}{2} - 3(\operatorname{arc\,tg} 2 - \frac{\pi}{4}) = 1{,}49 \end{aligned}$$

4. *Sea la región* $D = \mathcal{R} \setminus \{(0,0)\}$ *y sean las funciones* $X(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2}$, $Y(x,y) = \dfrac{-x}{x^2+y^2}$ *definidas en* D.

   Calcular $\oint_\gamma X dx + Y dy$ siendo γ

   a) Una curva cerrada regular plana que no contenga el origen en su interior.

   b) La circunferencia de centro el origen y radio 1.

   c) Una curva cerrada regular que contiene a la circunferencia anterior.

   Las funciones X e Y son continuas en $R^2 \setminus \{(0,0)\}$ siendo sus derivadas cruzadas

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial Y}{\partial x}$$

   a) Aplicando el teorema de Green, $I = 0$.

   b) Las funciones $X(x,y)$ e $Y(x,y)$ no son continuas en el origen que es un punto interior al contorno, por lo que no se les puede aplicar el teorema de Green. En consecuencia, sustituímos las ecuaciones de la circunferencia en coordenadas paramétricas, $x = \cos t,\ y = \operatorname{sen} t$

en la integral propuesta, resultando:
$\displaystyle\int_0^{2\pi} (\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t)dt = [t]_0^{2\pi} = 2\pi$

c) El valor de la integral a lo largo de cualquier curva cerrada que aísle al origen es el mismo por lo que también es $I = 2\pi$. También se puede comprobar, hallando la integral a lo largo del cuadrado de lados unidad y centro el origen.

Capítulo 15

INTEGRALES DE SUPERFICIE

Así como el concepto de integral de línea es una generalización del concepto de integral de Riemann, la integral de superficie es una generalización del concepto de integral doble estudiado con anterioridad. Es también una generalización del concepto de integral de línea al campo $\mathcal{R}^3$.

El proceso a seguir es, por tanto, semejante al seguido en la integral de línea pero en una dimensión más. Sean $X(x, y, z),\ Y(x, y, z),\ Z(x, y, z)$ funciones continuas en una superficie regular R la cual se divide en subdominios de áreas ΔS_i. Sea el vector $\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$ y formemos la suma $\sum \vec{F}(P_i)\Delta\vec{S_i} = \sum \vec{F}(P_i)\vec{n}(P_i)\Delta S_i$ siendo $\vec{n}(P_i)$ el vector unitario en dirección perpendicular al elemento de área en el punto $P_i \in \Delta S_i$. El límite de esta suma extendida a la superficie S cuando el $\max \Delta S_i \to 0$ se llama integral de superficie de la función vectorial $\vec{F}$ extendida a la superficie S y se representa como $\displaystyle\int\!\!\int_S \vec{F} \cdot \overrightarrow{dS}$

Una interpretación física de la integral de superficie es la siguiente: si $\vec{F}$ representa el vector velocidad de un fluído que atraviesa la superficie S, entonces la integral de superficie representa el volumen de fluído que atraviesa dicha superficie en la unidad de tiempo. Por esta razón, la integral de superficie también recibe el nombre de *flujo* del vector $\vec{F}$ a través de la superficie S.

El vector $\overrightarrow{dS}$ también puede indicarse en la forma $\vec{n}dS$, siendo $\vec{n}$ un vector unitario ortogonal a la superficie S.

Recordemos que el producto vectorial de dos vectores es otro vector ortogonal al plano formado por ambos y sentido el que va del primero al segundo vector según la regla del sacacorchos.
Además, el vector $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ es el coeficiente angular de la recta tangente a la curva en la dirección del eje X, mientras que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ es el coeficiente angular de la recta tangente en la dirección del eje y.

Por lo tanto, si $\vec{r} = (x, y, z(x, y))$ es el el vector de posición de un punto cualquiera de la superficie S (de ecuación cartesiana $z = z(x, y)$), entonces $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial y}$ es un vector ortogonal a la superficie S por lo que podemos escribir $\overrightarrow{dS} = \left(\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial y}\right) dxdy$. En consecuencia,

$$\int\int_S \vec{F} \cdot \overrightarrow{dS} = \int\int_D \vec{F} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y}\right) dxdy$$

siendo D la proyección sobre el plano XOY de la superficie tridimensional S.

Además, si S es la proyección de la superficie R sobre el plano XOY, entonces $dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dxdy$. Como consecuencia, si $z = f(x, y)$ es la ecuación de la superficie, entonces, si $F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$, se verifica que $\vec{n}\, dS\overrightarrow{grad(F)}dxdy$

Ejemplo 15.1 *Hallar el flujo del campo vectorial* $\vec{F} = (2x, y - x, 1 + 2x^2)$ *a través de la sección del plano* $2x + 3y - z = 6$ *comprendido entre los tres planos coordenados.*

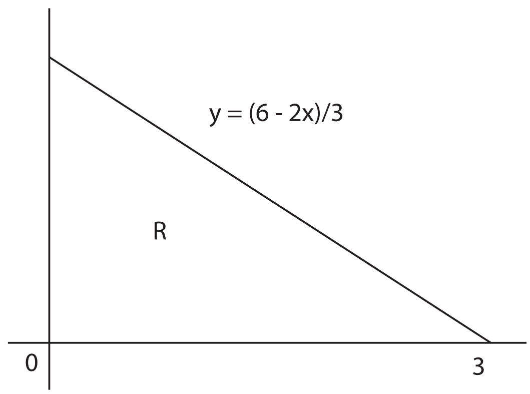
$$\text{Flujo} = \int\int_D \vec{F} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y}\right) dxdy$$

Como la ecuación del plano es $z = 2x + 3y - 6$ entonces el vector genérico de la superficie es $\vec{r} = (x, y, 2x + 3y - 6)$ por lo que

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = (1,0,2) \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = (0,1,3) \end{array}\right\} \rightarrow \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = (-2,-3,1) \rightarrow$$

$$\vec{F} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y}\right) = -4x - 3y + 3x + 1 + 2x^2$$

El recinto de integración D es el interior del triángulo



Por lo tanto, el flujo solicitado es

$$\text{Flujo} = \int_0^3 \left[\int_0^{\frac{6-2x}{3}} (-x + 2x^2 + 1 - 3y)dy\right] dx$$

$$= \int_0^3 \left[(2x^2 - x + 1)y - \frac{3}{2}y^2\right]_0^{\frac{6-2x}{3}} dx$$

$$= \int_0^3 \frac{4}{3}(-x^3 + 3x^2 + x - 3)dx = \frac{4}{3}\left[-\frac{x^4}{4} + x^3 + \frac{x^2}{2} - 3x\right]_0^3 = 3$$

Ejemplo 15.2 *Hallar el flujo del campo vectorial* $\vec{F} = (xz, yz, 2)$ *a través del casquete esférico* $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$

$$\text{Flujo} = \int\int_D \vec{F} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y}\right) dxdy$$

El vector generador de la superficie es $\vec{r} = (x, y, \sqrt{4 - x^2 - y^2})$ por lo que

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = (1, 0, \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}) \qquad \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = (0, 1, \frac{-y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}) \rightarrow$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = (\frac{x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}, 1) \rightarrow$$

$$\vec{F} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \right) = \frac{x^2 z}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} + \frac{y^2 z}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} + 2$$

$$= (x^2 + y^2) \frac{z}{\sqrt{4 - (x^2 + y^2)}} + 2 = x^2 + y^2 + 2$$

Por lo tanto, Flujo $= \int\int_D (x^2 + y^2 + 2) dx dy$, siendo D el semicírculo $x^2 + y^2 = 4$. Mediante el cambio a coordenadas elípticas $x = 2\rho \cos t$, $y = 2\rho \operatorname{sen} t$, es $|J| = 4\rho$, siendo $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq t \leq 2\pi$ y, en consecuencia,
Flujo $= \int\int_{D'} (\rho^2 + 2) 4\rho d\rho dt = 4 \int_0^{2\pi} dt \int_0^1 (\rho^3 + 2\rho) d\rho = 10\pi$

15.1. Fórmula de Gauss-Ostrogradski

También llamada *fórmula de Green en el espacio* o *teorema de la divergencia*, permite transformar una integral de superficie sobre una superficie cerrada en una integral triple sobre el sólido que encierra.

Sea un cuerpo V limitado por una superficie cerrada S cuya proyección sobre el plano XOY es el dominio regular D_z. Puesto que S es regular, se puede dividir en dos superficies, una superior y otra inferior de ecuaciones $z_2 = f_2(x, y)$ y $z_1 = f_1(x, y)$, respectivamente. Sea el vector $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ el vector unitario normal a la superficie S y $\vec{F} = (X, Y, Z)$, siendo X, Y, Z

funciones continuas en V. Entonces:

$$\int\int\int_V \frac{\partial Z(x,y,z)}{\partial z} dxdydz = \int\int_{D_z}\left[\int_{f_1}^{f_2}\frac{\partial Z}{\partial z}dz\right]dxdy$$

$$= \int\int_{D_z}\left[Z(x,y,f_2(x,y)) - Z(x,y,f_1(x,y))\right]dxdy$$

$$= \int\int_{D_z} Z(x,y,f_2(x,y))n_z dS + \int\int_{D_z} Z(x,y,f_1(x,y))n_z dS$$

donde la segunda integral ha cambiado de signo debido a la dirección del vector $\vec{n}$ ortogonal a la superficie S.

Pero la suma del segundo miembro de esta ecuación no es más que la integral extendida a toda la superficie S por lo que

$$\int\int\int_V \frac{\partial Z}{\partial z} dxdydz = \int\int_S Zn_z dS.$$

Fórmulas parecidas se obtienen para las proyecciones sobre los planos YOZ y XOZ y sumando las tres ecuaciones se obtiene la fórmula de Gauss-Ostrogradski o teorema de la divergencia:

$$\int\int_S \vec{F}\vec{n}dS = \int\int\int_V div\vec{F}dxdydz \tag{15.1}$$

Esta fórmula indica que el flujo de un vector a través de una superficie cerrada S coincide con la integral de la divergencia de dicho vector sobre el cuerpo que limita la superficie S. Esta fórmula también puede expresarse en la forma más práctica:

$$\int\int_S Xdydz + Ydxdz + Zdxdy = \int\int\int_V \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) dxdydz \tag{15.2}$$

Ejemplo 15.3 *Hallar el flujo del vector $\vec{F} = (x, 2y, 3z)$ a través del elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.*

Puesto que la superficie es cerrada se puede aplicar el teorema de la divergencia:

$$Flujo = \int\int\int_V \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) dxdydz = 6\int\int\int_V dxdydz$$

Pero esta integral triple representa el volumen del elipsoide de semiejes a, b y c por lo que $Flujo = 6\frac{4}{3}\pi abc = 8\pi abc$

Ejemplo 15.4 *Hallar el flujo del vector $\vec{F} = (xz, 2xy, -3yz)$ a través de la superficie limitada por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y los planos $z = 0$ y $z = 3$.*

El flujo de la función vectorial viene dado por la fórmula de Gauss

$$Flujo = \int\int_S \vec{F}\vec{n}dS = \int\int\int_V div\vec{F}dv$$

La divergencia es $div\vec{F} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = z + 2x - 3y$ por lo que

$$\begin{aligned} Flujo &= \int\int\int_V (2x - 3y + z)dxdydz = \int\int_S \left[2xz - 3yz + \frac{z^2}{2}\right]_0^3 dxdy \\ &= \int\int_S \left(6x - 9y + \frac{9}{2}\right) dxdy \end{aligned}$$

La ecuación del cilindro nos sugiere el cambio a coordenadas polares: $x = \rho\cos t$, $y = \rho\operatorname{sen} t$ por lo que el jacobiano es $J = \rho$ y la integral se transforma en

$$\begin{aligned} Flujo &= \int_0^2 \left[\int_0^{2\pi} \left(6\rho\cos t - 9\rho\operatorname{sen} t + \frac{9}{2}\right) dt\right] \rho d\rho \\ &= \int_0^2 \left[6\rho\operatorname{sen} t + 9\rho\cos t + \frac{9}{2}t\right]_0^{2\pi} \rho d\rho \\ &= \int_0^2 9\pi\rho d\rho = \left[9\pi\frac{\rho^2}{2}\right]_0^2 = 18\pi \end{aligned}$$

Ejemplo 15.5 *Hallar el flujo del vector $\vec{F} = (xz^2 + y, x^2y - z^2, 2xy + y^2z)$ a través de la superficie de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$.*

Dado que la superficie no es cerrada no se puede aplicar el teorema de la divergencia. Pero se puede cerrar la superficie mediante el plano $z = 0$ teniendo en cuenta que posteriormente hay que restar el flujo a través de este plano. Por lo tanto:

$$Flujo = \int\int_S \vec{F}\vec{n}dS = \int\int\int_V div\vec{F}dxdydz = \int\int\int_V (z^2+x^2+y^2)dxdydz$$

Cambio a coordenadas esféricas $x = \rho\cos\alpha\cos\beta$, $y = \rho\operatorname{sen}\alpha\cos\beta$, $z = \rho\operatorname{sen}\beta$ por lo que el jacobiano es $J = \rho^2\cos\beta$ y la integral se transforma en

$$Flujo = \int_0^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2\rho^2\cos\beta d\rho d\alpha d\beta = \frac{1}{5}\left[\rho^5\right]_0^2 [\operatorname{sen}\beta]_0^{\frac{\pi}{2}} [\alpha]_0^{2\pi} = \frac{64\pi}{5}$$

Un vector ortonormal al plano $z = 0$ en dirección hacia el semieje $Z < 0$ es el $(0,0,-1)$ por lo que $\vec{F}\cdot\vec{n} = -2xy - y^2z = -2xy$. En consecuencia, el flujo a través de este plano es $\int\int_S(-2xy)dxdy$. El cambio a coordenadas polares transforma esta integral en

$$\begin{aligned} Flujo &= \int\int_D -2\rho\cos t\rho\operatorname{sen}t\rho d\rho dt = -\int_0^2 \rho^3 d\rho\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}(2t)dt \\ &= \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^2\left[\frac{\cos(2t)}{2}\right]_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

Finalmente, el flujo pedido es $Flujo = \dfrac{64\pi}{5} - 0 = \dfrac{64}{5}\pi$

Ejemplo 15.6 *Hallar el flujo de $\vec{F} = (z^2 - x, -xy + 2, 3z + x)$ a través de la superficie limitada por el paraboloide $z = 4 - y^2$ y los planos $x = 3$, YOZ, XOY.*

Como la superficie es cerrada se puede aplicar el teorema de la divergencia:

$$\begin{aligned} Flujo &= \int_0^3\int_{-2}^2\int_0^{4-y^2} (-1 - x + 3)dzdydx \\ &= \int_0^3 (2-x)dx\int_2^2 (4-y^2)dy = \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_0^3\left[4y - \frac{y^3}{3}\right]_{-2}^2 \\ &= (6 - \frac{9}{2})(8 - \frac{8}{3})2 = 16 \end{aligned}$$

En caso de que la integral de contorno estudiada en la primera sección haya que calcularla sobre una curva alabeada cerrada, el teorema de Green no es aplicable y se debe hacer uso del teorema de Stokes, el cual hace uso de la integral de superficie.

15.2. Teorema de Stokes

Sea S una superficie alabeada regular, de contorno cerrado γ y de ecuación $z = z(x, y)$. Sean las funciones continuas $X(x, y, z),\ Y(x, y, z),\ Z(x, y, z)$ con derivadas parciales continuas en S y consideremos la integral de contorno $\oint_\gamma X dx + Y dy + Z dz$.

Si la curva γ se proyecta sobre el plano XOY según una curva cerrada regular C (sin puntos múltiples) que encierra un recinto D, entonces $\oint_\gamma X(x, y, z)dx = \oint_C X(x, y, z(x, y))dx$ por lo que se le puede aplicar el teorema de Green en el plano:

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma X(x, y, z(x, y))dx &= -\int\int_D \frac{\partial X(x, y, z(x, y))}{\partial y} dxdy \\
&= -\int\int_D \left[\frac{\partial X(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial X(x, y, z)}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}\right] dxdy \\
&= -\int\int_S \frac{\partial X}{\partial y} n_z dS - \int\int_S \frac{\partial X}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} n_z dS
\end{aligned}$$

puesto que $d\vec{S} = (dydz, dxdz, dxdy)$.
Por otra parte, teniendo en cuenta que $\frac{\partial z}{\partial y} n_z = -n_y$, se tiene que
$\oint_\gamma X(x, y, z)dx = -\int\int_S \frac{\partial X}{\partial y} n_z dS + \int\int_S \frac{\partial X}{\partial z} n_y dS.$
Repitiendo el proceso se obtendría de forma parecida que
$\oint_\gamma Y(x, y, z)dx = -\int\int_S \frac{\partial Y}{\partial z} n_x dS + \int\int_S \frac{\partial Y}{\partial x} n_z dS$ y
$\oint_\gamma Z(x, y, z)dx = -\int\int_S \frac{\partial Z}{\partial x} n_y dS + \int\int_S \frac{\partial Z}{\partial y} n_x dS.$

Sumando estas tres igualdades se obtiene la *Fórmula de Stokes*:

$$\oint_\gamma Xdx + Ydy + Zdz =$$

$$\int\int_S \left[\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) n_x + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) n_y + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) n_z\right] dS$$

Esta fórmula establece una conexión entre una integral de contorno sobre una curva alabeada γ y la integral de superficie correspondiente.

Supongamos que $X,\ Y,\ Z$ son las componentes de un vector $\vec{F}$. Entonces la fórmula de Stokes puede expresarse en forma reducida como

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int\int_S r\vec{o}t\vec{F} \cdot \vec{n} \cdot dS$$

Físicamente, la fórmula de Stokes indica que la circulación de un vector a lo largo de una línea cerrada γ coincide con el flujo del rotacional de dicho vector a través de la superficie que limita dicha curva.

El teorema de Green puede considerarse como un caso particular del teorema de Stokes en el cual z es constante. Por esta razón, el teorema de Stokes también se conoce con el nombre de teorema de Green en el espacio. Evidentemente, para que la integral de contorno no dependa del camino de integración es necesario y suficiente que $r\vec{o}t\vec{F} = \vec{0}$, o lo que es lo mismo, que se verifique la igualdad de todas las derivadas cruzadas.

Por último, si S_x, S_y y S_z son las proyecciones del recinto alabeado S sobre los respectivos planos coordenados YOZ, XOZ y XOY, entonces la fórmula de Stokes puede escribirse como

$$\oint_\gamma Xdx + Ydy + Zdz =$$

$$\int\int_{S_x} \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) dydz + \int\int_{S_y} \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) dxdz + \int\int_{S_z} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dxdy$$

En consecuencia, condición necesaria y suficiente para que la integral de contorno $\oint_\gamma \vec{F}d\vec{r}$ sea nula es que $rot\vec{F} = \vec{0}$.

Ejemplo 15.7 *Hallar la circulación del vector* $\vec{F} = (x - y, yz + 3, xz^2 - z)$ *a lo largo del contorno de la superficie del cono* $z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$ *limitado por el plano* $z = 0$

Para aplicar el teorema de Stokes, seguiremos los pasos indicados anteriormente.

1. Rotacional de $\vec{F}$:
$$\overrightarrow{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x - y & yz + 3 & xz^2 - z \end{vmatrix} = (-y, -z^2, 1)$$
2. Vector unitario ortogonal a S:
La ecuación de la superficie S es $x^2 + y^2 - (4 - z)^2 = 0$ por lo que su gradiente es $\overrightarrow{grad}\ S = (2x, 2y, 2(4 - z))$ y el vector unitario ortogonal a S es $\vec{n} = \dfrac{\overrightarrow{grad}\ S}{|\overrightarrow{grad}\ S|} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (4 - z)^2}}(x, y, 4 - z)$.
3. Elemento de superficie: $dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\ dxdy = \sqrt{2}dxdy$

Por lo tanto, la circulación es

$$\begin{aligned} C &= \int\int_S \overrightarrow{rot}\vec{F}\,\vec{n}\,dS = \int\int_{S_z} \frac{-xy - yz^2 + 4 - z}{\sqrt{x^2 + y^2 + (4 - z)^2}}\sqrt{2}dxdy \\ &= \int\int_{S_z} \frac{-xy - y(4 - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{2(x^2 + y^2)}}\sqrt{2}dxdy \end{aligned}$$

siendo S_z el círculo $x^2 + y^2 = 16$. Cambio a coordenadas polares siendo $0 \leq \rho \leq 4$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$ por lo que

$$\begin{aligned} C &= \int_0^4 \int_0^{2\pi} \frac{-\rho^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta - \rho\cos\theta(4 - \rho)^2 + \rho}{\sqrt{2}\rho} d\rho d\theta \\ &= \int_0^4 \left[-\rho^2 \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2} - \rho(4 - \rho)^2 \operatorname{sen}\theta + \rho\theta\right]_0^{2\pi} d\rho \\ &= 2\pi \int_0^4 \rho d\rho = 16\pi \end{aligned}$$

Ejemplo 15.8 *Hallar la circulación del vector* $\vec{F} = (2y, 3x, 1-z^2)$ *a lo largo de la circunferencia* $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $z = 0$

Resolveremos este problema de dos formas diferentes.

1. Directamente. La frontera de la proyección de la semiesfera sobre el plano $z = 0$ es la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ lo que sugiere el cambio a coordenadas polares: $x = 3\cos t$, $y = 3\,\text{sen}\, t$, donde $0 \leq t \leq 2\pi$. en consecuencia, la circulación es:

$$\begin{aligned} C &= \oint_\gamma \vec{F} d\vec{r} = \oint_\gamma 2ydx + 3xdy + (1-z^2)dz \\ &= \int_0^{2\pi} (2 \cdot 3\,\text{sen}\, t(-3\,\text{sen}\, t) + 3 \cdot 3\cos t(3\cos t))dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-18\,\text{sen}^2 t + 27\cos^2 t)dt \\ &= \left[-9(t - \frac{1}{2}\text{sen}(2t)) + \frac{27}{2}(t + \frac{1}{2}\text{sen}(2t))\right]_0^{2\pi} = 9\pi \end{aligned}$$

2. Mediante el teorema de Stokes.

   a) Rotacional de $\vec{F}$:
   $\overrightarrow{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2y & 3x & 1-z^2 \end{vmatrix} = (0, 0, 1)$

   b) Vector unitario ortogonal a S:
   $\overrightarrow{grad}\ S = (2x, 2y, 2z) \to \vec{n} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x, y, z)$

   c) Elemento de superficie:
   $dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}dxdy.$
   Teniendo en cuenta que $z = \sqrt{9 - (x^2+y^2)}$ resulta que
   $dS = \dfrac{3}{\sqrt{9-(x^2+y^2)}}dxdy$

Por lo tanto, la circulación es:

$$\begin{aligned}
C &= \int\int_{D_z} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\frac{3}{\sqrt{9-(x^2+y^2)}}dxdy \\
&= \int\int_{D_z} \frac{\sqrt{9-(x^2+y^2)}}{\sqrt{x^2+y^2+9-(x^2+y^2}}\frac{3}{\sqrt{9-(x^2+y^2)}}dxdy \\
&= \int\int_{D_z} dxdy = 9\pi
\end{aligned}$$

pues la última integral representa el área del círculo $x^2+y^2=9$.

Ejemplo 15.9 *Hallar el trabajo efectuado por el campo vectorial* $\vec{F} = (yz^3, xz^3-3z, 3xyz^2-3y+2)$ *sobre la curva intersección de las superficies* $z = e^{x^2-y^2}$, $z = x^2+y^2$, *entre los puntos* $A(1,1,1)$ *y* $B(1,-1,2)$.

En primer lugar debemos averiguar si el campo es conservativo, para lo cual el rotacional del mismo ha de ser nulo:

$$\overrightarrow{rot}\ \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz^3 & xz^3-3z & 3xyz^2-3y+2 \end{vmatrix} = (0,0,0)$$

El campo es conservativo, y, en consecuencia, la integral no depende del camino. Una forma de resolverla consiste en hallar su función potencial: $U(x,y,z) = \int yz^3dx + (-3z)dy + 2dz = xyz^3 - 3yz + 2z$ por lo que $T = U(1,-1,2) - U(1,1,1) = 4 - 0 = 4$

15.3. Ejercicios resueltos

1. *Hallar el trabajo realizado por la fuerza* $\vec{F} = (x^2 + 2y, -x + y^2)$ *entre los puntos* $(1, -2)$ *y* $(3, 4)$ *sobre la recta que los une.*

   La ecuación de esta recta es $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{6} \to y = 3x - 5$.
   Sustituyendo esta función en la integral indicada se encuentra

$$\begin{aligned} T &= \int_1^3 (x^2 + 2(3x-5))dx - (x - (3x-5)^2)3dx \\ &= \int_1^3 (28x^2 - 87x + 65)dx = \frac{74}{3} \end{aligned}$$

2. *Resolver el problema anterior si el camino es la parábola* $y = \dfrac{3x^2 - 11}{4}$

   Sustituyendo en la integral propuesta resulta

$$T = \int_1^3 (x^2 + \frac{3x^2-11}{2})dx - \left(x - \frac{(3x^2-11)^2}{16}\right)\frac{6x}{4}dx = \frac{65}{3}$$

3. *Hallar el trabajo efectuado por la fuerza* $\vec{F} = (xy - z, yz - x, xz - y)$ *sobre la recta que une los puntos* $(-1, 1, 0)$ *y* $(1, 2, 3)$

   Un vector de dirección de la recta es el $\vec{u} = (2, 1, 3)$ y un punto es el $(1, 2, 3)$ por lo que la ecuación continua de la recta es $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-3}{3} \to x = 2y - 3,\ z = 3y - 3$. Por lo tanto, el trabajo efectuado por el campo vectorial es

$$\begin{aligned} T &= \int_1^2 [((2y-3)y - (3y-3))2 + y(3y-3) - (2y-3) \\ &+ ((2y-3)(3y-3) - y)3]\, dy = \int_1^2 (25y^2 - 65y + 36)dy = -\frac{19}{6} \end{aligned}$$

4. *Hallar el trabajo efectuado por la fuerza* $\vec{F} = (y^2 - 4xyz, 2xy - 2x^2z, -2x^2y)$ *entre los puntos* $(-1, 1, -2)$ *y* $(1, -1, 2)$ *de la curva intersección de la superficie* $z = e^{x+y}(x-y) + \dfrac{x+y}{x+2}$ *con el plano* $3x + y - z = 0$

En este caso, el trabajo es la integral de línea
$T = \int_\gamma \vec{F} d\vec{r} = \int_\gamma (y^2 - 4xyz)dx + (2xy - 2x^2z)dy - 2x^2ydz = \int\int_S \overrightarrow{rot}\vec{F}\vec{n}dS.$
Hallemos el rotacional del campo vectorial:

$$rot\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 - 4xyz & 2xy - 2x^2z & -2x^2y \end{vmatrix} = \vec{0}$$

Puesto que el rotacional es nulo, la integral de línea no depende del camino sino tan sólo de los puntos inicial y final. Una forma de resolver el problema consiste en hallar la función potencial:
$U = \int (y^2 - 4xyz)dx + \int 0dy + \int 0dz = xy^2 - 2x^2yz$ y, finalmente,
$T = U(1, -1, 2) - U(-1, 1 - 1) = 5 - 3 = 2$

5. *Hallar el trabajo del vector* $\vec{F} = (1 - yz, 2y - xz, -xy)$ *sobre la curva intersección del paraboloide* $z = 5x^2 + 2xy - 3y$ *con el plano* $z = x + y$ *entre los puntos* $(-1, 1, 0)$ *y* $(1, 2, 3)$

   Comprobemos si se verifica la igualdad de las derivadas cruzadas:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = -z = \frac{\partial Y}{\partial x}$$
$$\frac{\partial Y}{\partial z} = -x = \frac{\partial Z}{\partial y}$$
$$\frac{\partial Z}{\partial x} = -y = \frac{\partial X}{\partial z}$$

   Dado que se verifica la igualdad de las derivadas cruzadas, la integral no depende del camino sino tan sólo de los puntos inicial y final. Una forma de resolver la integral es hallando la función potencial:
   $U = \int (1 - yz)dx + \int 2ydy = x - xyz + y^2$ por lo que
   Trabajo $= U(1, 2, 3) - U(-1, 1, 0) = (1 - 6 + 4) - (-1 + 0 + 1) = -1$

6. *Hallar la integral de contorno* $\oint_C \frac{dx - dy}{x + y}$ *siendo* C *el triángulo de vértices (1, 0), (3, 0), (2, 1) recorrido en sentido positivo.*

Calculamos las derivadas cruzadas:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Y}{\partial x} &= \frac{\partial\left(\frac{-1}{x+y}\right)}{\partial x} = \frac{1}{(x+y)^2} \\
\frac{\partial X}{\partial y} &= \frac{\partial\left(\frac{1}{x+y}\right)}{\partial y} = -\frac{1}{(x+y)^2}
\end{aligned}$$

Las derivadas cruzadas no son iguales por lo que la integral sí depende del camino de integración. Al ser una línea cerrada, se puede aplicar el teorema de Green, pero por estar formado por segmentos de recta, es más sencillo resolverla directamente. Las ecuaciones de los lados del triángulo son:

$$\left\{\begin{array}{l} y=0 \\ 1 \le x \le 3 \end{array}\right\} \qquad \left\{\begin{array}{l} y=3-x \\ x:\ 3 \to 2 \end{array}\right\} \qquad \left\{\begin{array}{l} y=x-1 \\ x:\ 2 \to 1 \end{array}\right\}$$

Sustituyendo en la integral de contorno, ésta se transforma en suma de tres integrales definidas: $I = \displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{x} + \int_3^2 \frac{2dx}{3} + \int_2^1 \frac{0}{2x-1}dx = \ln 3 - \frac{2}{3}$

7. *Hallar la circulación del vector* $\vec{F} = (2y-1, -xz, x+yz^2)$ *sobre la curva intersección del paraboloide* $2z = x^2+y^2$ *con el plano* $z=2$.

Al proyectar la superficie S sobre el plano $z=2$ se obtiene un círculo. La ecuación cartesiana de su circunferencia γ es $x^2+y^2=4$, siendo sus ecuaciones paramétricas $x = 2\cos t$, $y = 2\operatorname{sen} t$, $z=2$. Por lo tanto, la circulación es:

$$\begin{aligned}
C &= \oint_\gamma \vec{F} d\vec{r} = \oint_\gamma (2y-1)dx - xzdy + (x+yz^2)dz \\
&= \int_0^{2\pi} (4\operatorname{sen} t - 1)(-2\operatorname{sen} t) - 2\cos t \cdot 2 \cdot 2\cos t + 0)dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-8\operatorname{sen}^2 t + 2\operatorname{sen} t - 8\cos^2 t)dt = \int_0^{2\pi} (-8 + 2\operatorname{sen} t)dt \\
&= -16\pi
\end{aligned}$$

8. *Hallar la circulación del vector* $\vec{F} = (x - z, x^3 + yz, -3xy^2)$ *a lo largo de la curva intersección del cono* $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ *y el plano* XOY.

La circulación es la integral de contorno
$\oint_\gamma \vec{F} d\vec{r} = \oint_\gamma (x - z)dx + (x^3 + yz)dy - 3xy^2 dz$, siendo γ la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ de ecuaciones paramétricas $x = 2\cos t$, $y = 2\,\mathrm{sen}\, t$, $z = 0$. Sustituyendo en la integral indicada, la circulación es

$$\begin{aligned}
C &= \int_0^{2\pi} (2\cos t(-2\,\mathrm{sen}\, t) + 8\cos^3 t(2\cos t))dt \\
&= \left[-2\,\mathrm{sen}^2 t\right]_0^{2\pi} + 16\int_0^{2\pi} \left(\frac{1 + \cos(2t)}{2}\right)^2 dt \\
&= 4\int_0^{2\pi} \left(1 + 2\cos(2t) + \frac{1 + \cos(4t)}{2}\right) dt = 4\left[\frac{3}{2}t\right]_0^{2\pi} = 12\pi
\end{aligned}$$

9. *Hallar la circulación del vector* $\vec{F} = \left(\frac{e^x\,\mathrm{sen}(\pi y)}{\pi} - 2y + 1, e^x\cos(\pi y) + 2x\right)$ *a lo largo de la elipse* $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ *entre los puntos* $(4, 0)$ *y* $(0, 2)$.

Hallemos las derivadas cruzadas:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Y}{\partial x} &= e^x\cos(\pi y) + 2 \\
\frac{\partial X}{\partial y} &= e^x\cos(\pi y) - 2
\end{aligned}$$

Como no se verifica la igualdad de las derivadas cruzadas, aplicaremos el teorema de Green. Para poder aplicarlo, la curva ha de ser cerrada por lo que la cerramos mediante los segmentos $(y = 0,\ 0 \leq x \leq 4)$ y $(x = 0,\ 0 \leq y \leq 2)$. Por tanto

$$I = \int\int_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)dxdy = 4\int\int_D dxdy = 4A$$

siendo A la cuarta parte del área encerrada por la elipse. Luego,
$I = 4\frac{1}{4}\pi \cdot 4 \cdot 2 = 8\pi$. Hay que restar la circulación a lo largo de los

segmentos añadidos con anterioridad: $Y = \displaystyle\int_2^0 \cos(\pi y)dy + \int_0^4 dx = 4$.
Por lo tanto, la circulación pedida es $I = 8\pi - 4$

10. *Hallar el flujo del vector* $\vec{F} = (xy^2 - z, x^2y + 1, \frac{z^3}{3} + x^2)$ *hacia el exterior de la semiesfera* $z = +\sqrt{4 - (x^2 + y^2)}$

    Para poder aplicar el teorema de la divergencia es necesario que la superficie sea cerrada. Para ello, cerramos la semiesfera mediante el plano $z = 0$ y, entonces,
    $Flujo = \displaystyle\int\int_S \vec{F}\vec{n}dS = \int\int\int_V div\vec{F}dV = \int\int\int_V (y^2 + x^2 + z^2)dxdydz$.
    Cambio a coordenadas esféricas: $x = \rho\cos\alpha\cos\beta$, $x = \rho\operatorname{sen}\alpha\cos\beta$, $x = \rho\operatorname{sen}\beta$ con lo que $J = \rho^2\cos\beta$, y la semiesfera se transforma en el ortoedro $0 \leq \rho \leq 2$, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$.
    En consecuencia
    $Flujo = \displaystyle\int\int\int_{V'} \rho^4\cos\beta d\rho d\alpha d\beta = \int_0^2 \rho^4 d\rho \int_0^\pi d\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\beta d\beta = \frac{32}{5}\pi$
    A esta integral hay que restarle el flujo a través del círculo base, de ecuación $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$: el vector de dirección del flujo es hacia abajo por lo que $\vec{n} = -\vec{k}$.
    Por tanto: $F' = \displaystyle\int\int_S \left(-\frac{z^3}{3} - x^2\right) dxdy = -\int\int_S x^2dxdy$. Cambio a coordenadas polares:

$$
\begin{aligned}
F' &= -\int_0^2 \rho^3 d\rho \int -0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta \\
&= -4\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 + \cos(2\theta))d\theta = -4\pi
\end{aligned}
$$

    En consecuencia, el flujo soliticado es F$lujo = \frac{32}{5}\pi - (-4\pi) = \frac{52}{5}\pi$

15.4. EJERCICIOS PROPUESTOS

15.4.1. Integrale dobles

1. Coordenadas hiperbólicas:

   a) 1) Hallar el cambio de coordenadas apropiado para transformar el hiperboloide de una hoja $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ en un ortoedro.

   2) Hallar los límites de las nuevas variables.

   3) Hallar el jacobiano de la transformación.

   b) Repetir el ejercicio anterior para el hiperboloide de dos hojas $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

2. Hallar las siguientes integrales dobles en los recintos que se indican:

   a) $\displaystyle\int\int_D y^2dxdy$ siendo $D=\{(x,y): y\geq x,\ y\leq 2-x,\ x\geq 0\}$

   b) $\displaystyle\int\int_D xydxdy$ siendo $D=\{(x,y): \frac{x}{a}+\frac{y}{b}\leq 1,\ x,y,a,b>0\}$

   c) $\displaystyle\int\int_D \frac{dxdy}{\sqrt{x}}$ siendo $D=\{(x,y): y^2\leq 4x,\ x\leq 1\}$

   d) $\displaystyle\int\int_D (4x+3y^2)dxdy$ si D es el recinto limitado por la parábola $y=4x^2$ y la recta $y=4x+3$

   e) $\displaystyle\int\int_R xe^{-\frac{x^2}{y}}dxdy$ siendo R la región del plano XOY limitada por las rectas $y=1,\ y=2$ y la parábola $y=x^2$ para $x\geq 0$

   f) $\displaystyle\int\int_R (4-x^2-y^2)dxdy$ siendo R el recinto comprendido entre las rectas $x=0,\ x=1,\ y=0,\ y=\frac{3}{2}$

   g) $\displaystyle\int\int_R (1+x+y)dxdy$ siendo R el recinto limitado por las rectas $y=-x,\ y=2$ y la parábola $y=x^2$

h) $\displaystyle\int\int_R e^{y/x}dxdy$ si R es el recinto limitado por las rectas $y = x$, $y = 0, \ x = 1$

3. Hallar el volumen del cuerpo limitado por las superficies que se indican:

   a) el paraboloide $x^2 + y^2 + z = 1$ y el plano $z = 0$

   b) el paraboloide $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - 2z = 0$ y el plano $z = c$ siendo $a, b, c > 0$

   c) entre $z = 0$ y $z = 12 + y - x^2$ extendido al recinto limitado por las parábolas $y = x^2, \ x = y^2$

   d) el paraboloide $x^2 + 2y^2 + z = 4$ y el plano XOY

   e) la superficie $z = e^{-x^2}$ y los planos $XOY, \ y = x, \ x = 1, \ y = 0$

   f) los planos $x = 0, \ y = 0, \ z = 0, \ x + y + z = 1$

4. Hallar el área comprendida entre la parábola $y = 2-x^2$ y la recta $y = x$

15.4.2. Campos escalares y vectoriales

1. Hallar el gradiente del campo escalar $f(x, y, z) = x^2y - \frac{xy}{z} + e^{z^2}$ en el punto $(0, 1, -1)$

2. Sea $\vec{F} = \left(\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{2z}{x^3}, -\dfrac{2x}{y^3} - \dfrac{2y}{z}, \dfrac{y^2}{z^2} + \dfrac{1}{x^2}\right)$

   a) Hallar su dominio D

   b) Comprobar que $\vec{F}$ es conservativo en D

   c) Hallar su función potencial

3. Hallar el rotacional del campo vectorial $\vec{F} = (xy^2z, 2x+y^2-z, x^2+yz^2)$ en el punto $(1, -2, 1)$

4. Sea el campo vectorial $\vec{F} = (\operatorname{sen} y+z\cos x, \operatorname{sen} z+x\cos y, \operatorname{sen} x+y\cos z)$

a) Comprobar que $\vec{F}$ es irrotacional

b) Hallar su función potencial

5. Hallar la divergencia del campo vectorial
$\vec{F} = (xy^2z^2 - e^x, x^2yz^2 - e^{-y}, x^2y^2z - e^z)$ en el punto $(1, -1, 1)$

6. Comprobar que el campo vectorial
$\vec{F} = (x(\operatorname{sen} y + \cos z), y(\operatorname{sen} x - \cos z), -z(\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y))$ es solenoidal.

7. Comprobar que el campo vectorial
$\vec{F} = (3xy^2z^2 - x^3y^2, 3x^2yz^2 - y^3z^2, 3x^2y^2z - x^2z^3$ es solenoidal.

15.4.3. Integrales de línea y de superficie

1. Hallar el trabajo efectuado por el campo vectorial $\vec{F} = (x^2 - y^2, 2xy)$ entre los puntos A(-1, 1) y B(1, 1) de la curva $y = x^2$ de dos formas: directamente y aplicando la fórmula de Green.

2. Hallar el trabajo efectuado por el campo vectorial
$\vec{F} = \left(\dfrac{x+1}{x^2+1} - 2y, \dfrac{y-1}{y^2+1} + 2x\right)$ entre los puntos $B(\pi, 1)$ y $A(0, 1)$ de la curva $y = \operatorname{sen}^2 x + 1$

3. Hallar el trabajo del vector $\vec{F} = (x^2y, -x + y^2)$ a lo largo de la línea recta que une los puntos $(1, -2)$ y $(3, 4)$

4. Repetir el ejercicio anterior sobre la parábola $3x^2 - 4y = 11$ entre los mismos puntos

5. Hallar el trabajo del campo vectorial $\vec{F} = (2xy^2 + 3y, 2x^2y - 2xy)$ a lo largo de la curva C, siendo C

   a) la parábola $x = 2t - 1$, $y = t^2 + 2$ entre los puntos $(-1, 2)$ y $(1, 3)$

   b) la cúbica $y = x^3 - x^2 + 2$ entre los puntos $(0, 2)$ y $(2, 6)$

c) la elipse $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$, sobre toda la elipse

6. Hallar el trabajo de $\vec{F}=(x^2-3yz,z^2,x^2+3y)$ desde el punto $(0,0,-2)$ al $(1,2,1)$ siguiendo la curva de ecuaciones $x=t$, $y=2t^2$, $z=3t-2$

7. Hallar la circulación del campo vectorial $\vec{F}=(y-6x\operatorname{sen}y, x-3x^2\cos y+e^y)$ sobre el rectángulo de vértices $(0,0),\ (3,0),\ (2,3),\ (1,1)$ recorrido en sentido positivo.

8. Hallar el trabajo efectuado por la fuerza $\vec{F}=(3x^2y-3,x^3+3y^2)$ entre los puntos (-2,0) y (0,1) de la curva $x^2y^2-\dfrac{2xy}{x^2+y^2}-(x+2)(y-1)=0$

9. Hallar el trabajo efectuado por la fuerza $\vec{F}=(2xy,x^2-4yz,-2y^2+2z)$ entre los puntos (-1,-3,-1) y (2,-1,-4) de la curva $x=t^2+1$,
$y=2t-3,\ z=\dfrac{t^2+3}{2t-3}$

10. Hallar el flujo del campo vectorial $\vec{F}=(x^2,y^2,z^2)$ a través de la superficie esférica $x^2+y^2+z^2=1$

11. Hallar el trabajo efectuado por el campo vectorial $\vec{F}=\left(\dfrac{x+1}{y-z},-\dfrac{1}{y},\dfrac{1}{z^2}\right)$ entre los puntos A(0,1,-1) y B(1,2,1).

RESPUESTAS:

15.4.4. Integrales dobles

1. *a*) 1) $x = a\rho\cosh u\cos v,\ y = b\rho\cosh u\,\mathrm{sen}\, v,\ z = c\rho\,\mathrm{senh}\, u$

   2) $0 \leq \rho \leq 1,\ -\infty \leq u \leq \infty,\ 0 \leq v \leq 2\pi$

   3) $J = -abc\rho^2\cosh u$

   b) 1) $x = a\rho\cosh u\cosh v,\ y = b\rho\cosh u\,\mathrm{senh}\, v,\ z = c\rho\,\mathrm{senh}\, u$

   2) $0 \leq \rho \leq 1,\ -\infty \leq u \leq \infty,\ -\infty \leq v \leq \infty$

   3) $J = -abc\rho^2\cosh u$

2. *a*) $I = \frac{7}{6}$

   b) $I = \frac{a^2b^2}{24}$

   c) $I = 4$

   d) $I = \frac{2773}{14}$

   e) $I = \frac{3}{4}(1 - \frac{1}{e})$

   f) $I = 35/8$

   g) $I = \frac{44\sqrt{2}}{15} + \frac{5}{3}$

   h) $I = \frac{e-1}{2}$

3. *a*) $V = \frac{\pi}{2}$

   b) $V = 2\pi c^2\sqrt{ab}$

   c) $V = \frac{267}{70}$

   d) $V = 4\pi\sqrt{2}$

   e) $V = \frac{e-1}{2e}$

   f) $V = \frac{1}{6}$

4. $A = \frac{9}{2}$

15.4.5. Campos escalares y vectoriales

1. $grad(f) = (1, 0, -2e)$

2. a) $D = \mathcal{R}^3 \setminus \{(x, y, z) : x = 0 \vee y = 0 \vee z = 0\}$: el espacio $\mathcal{R}^3$ excepto los puntos de los planos coordenados.

   b) $rot(\vec{F}) = 0$

   c) $f(x, y, z) = \dfrac{x}{y^2} + \dfrac{z}{x^2} - \dfrac{y^2}{z} + C$

3. $rot\vec{F} = (2, 2, -6)$

4. a) $rot\vec{F} = \vec{0}$

   b) $f(x, y, z) = y \operatorname{sen} z + z \operatorname{sen} x + x \operatorname{sen} y + C$

5. $div\vec{F} = 3 - e$

6. $div\vec{F} = 0$

7. $div\vec{F} = 0$

15.4.6. Integrales de línea y de superficie

1. $T = \frac{28}{15}$

2. $T = 4\pi - \frac{1}{2}\ln(\pi^2 + 1) - \operatorname{arc\,tg} \pi = 10{,}11$

3. $T = \frac{104}{3}$

4. $T = \frac{65}{3}$

5. a) $I = \frac{256}{15}$

   b) $I = \frac{3664}{35}$

   c) $I = -18\pi$

6. $T = \frac{47}{6}$

7. $C = 0$

8. $T = -5$

9. $T = 4$

10. $\text{Flujo} = 4\pi$

11. $T = 2\ln 2 - 3$

EXÁMENES RESUELTOS DE LA SEGUNDA PARTE

Enunciados 1

1. Hallar el área encerrada por la curva $f(x) = \dfrac{x^2+9x-2}{x^3-3x^2+x+5}$, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 3$

2. Hallar el área de la superficie generada al girar la curva $y = \sqrt{2x+1}$ alrededor del eje de abscisas entre $x = 0$ y $x = 1$

3. Hallar el volumen del cuerpo generado al girar alrededor del eje OX, la región limitada por las curvas $y = x^2$, $y = \dfrac{x^2}{2}$, $y = 2x$

4. Hallar el gradiente y el rotacional del gradiente de la función $U(x, y, z) = x^2 sen\, y + y^2 cos\, x - 2xyz^2$ en el punto $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, 2)$

5. Hallar el volumen del cuerpo limitado por el paraboloide $x^2+2y^2+z = 4$ y el plano XOY

6. Demostrar que $\vec{F} = (y^2z^3, 2x\,y\,z^3 + 1, 3x\,y^2z^2 + 2z)$ es una fuerza conservativa y hallar su función potencial

7. Hallar el trabajo efectuado por la fuerza $\vec{F} = (e^xy^2 - 2xy + 1, 2e^xy - x^2)$ sobre la curva $f(x) = e^{x^2-x} - \cos(\pi x) - x$ entre los puntos $(0, 0)$ y $(1, 1)$

Respuestas 1

1. *Hallar el área encerrada por la curva* $f(x) = \dfrac{x^2+9x-2}{x^3-3x^2+x+5}$, *el eje de abscisas y las rectas* $x=1$ *y* $x=3$

   La curva $y = \dfrac{x^2+9x-2}{x^3-3x^2+x+5}$ corta al eje de abscisas en los puntos 0,21 y $-9{,}21$ que son exteriores al intervalo $[1,3]$ por lo que Área $= \displaystyle\int_1^3 \frac{x^2+9x-2}{x^3-3x^2+x+5}dx$. La función a integrar se descompone en suma de fracciones simples en la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
& x^3-3x^2+x+5=0 \to x=-1 \wedge x^2-4x+5=0 \\
\to \quad & \frac{x^2+9x-2}{x^3-3x^2+x+5} = \frac{Ax+B}{x^2-4x+5} + \frac{C}{x+1} \\
= \quad & \frac{(Ax+B)(x+1)+C(x^2-4x+5)}{x^3-3x^2+x+5} \\
\to \quad & (Ax+B)(x+1)+C(x^2-4x+5) = x^2+9x-2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x=-1 \quad & \to 10C=-10 \to C=-1 \\
x=0 \quad & \to B+5C=-2 \to B=3 \\
x=1 \quad & \to 2(A+B)+2C=8 \to A=2
\end{aligned}$$

   Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
& \text{Área} = \int_1^3 \left(\frac{2x+3}{x^2-4x+5} - \frac{1}{x+1}\right)dx \\
= \quad & \int_1^3 \left(\frac{2x-4}{x^2-4x+5} + \frac{7}{x^2-4x+5} - \frac{1}{x+1}\right)dx \\
= \quad & \int_1^3 \left(\frac{2x-4}{x^2-4x+5} + \frac{7}{(x-2)^2+1} - \frac{1}{x+1}\right)dx \\
= \quad & \left[\ln(x^2-4x+5) + 7\arctan(x-2) - \ln(x+1)\right]_1^3 \\
= \quad & 7(\arctan 1 - \arctan(-1)) - (\ln 4 - \ln 2) = \frac{7\pi}{2} - \ln 2
\end{aligned}$$

2. *Hallar el área de la superficie generada la girar la curva* $y = \sqrt{2x+1}$ *alrededor del eje de abscisas entre* $x=0$ *y* $x=1$

$$
\begin{aligned}
\text{Área} &= 2\pi\int_0^1 y\sqrt{1+y'^2}dx = 2\pi\int_0^1 \sqrt{2x+1}\sqrt{1+\frac{1}{2x+1}}dx \\
&= 2\pi\int_0^1 \sqrt{2x+2}dx = 2\pi\sqrt{2}\int_0^1 (x+1)^{1/2}dx \\
&= 2\pi\sqrt{2}\left[\frac{(x+1)^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 = \frac{4\pi\sqrt{2}}{3}(2\sqrt{2}-1) = 10{,}83
\end{aligned}
$$

3. *Hallar el volumen del cuerpo generado al girar alrededor del eje OX, la región limitada por las curvas $y = x^2$, $y = \dfrac{x^2}{2}$, $y = 2x$*

   Hallamos la intersección de las dos parábolas y la recta: $x^2 = 2x \rightarrow x = 0,\ x = 2$ y $\dfrac{x^2}{2} = 2x \rightarrow x = 0,\ x = 4$. Teniendo en cuenta que el volumen de una superficie de revolución viene dado por la fórmula $V = \pi\displaystyle\int_a^b y^2dx$, en este caso es

$$
\begin{aligned}
V &= \pi\int_0^2 \left((x^2)^2 - \left(\frac{x^2}{2}\right)^2\right)dx + \pi\int_2^4 \left((2x)^2 - \left(\frac{x^2}{2}\right)^2\right)dx \\
&= \pi\int_0^2 \frac{3x^4}{4}dx + \pi\int_2^4 \left(4x^2 - \frac{x^4}{4}\right)dx \\
&= \pi\left[\frac{3x^5}{20}\right]_0^2 + \pi\left[4\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{20}\right]_2^4 = \frac{448\pi}{5}
\end{aligned}
$$

4. *Hallar el gradiente y el rotacional del gradiente de la función $U(x,y,z) = x^2\operatorname{sen} y + y^2\cos x - 2xyz^2$ en el punto $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, 2)$*

   El gradiente de una función $U = U(x,y,z)$ es el vector

$$
\begin{aligned}
\nabla U &= \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right) \\
&= (2x\operatorname{sen} y - y^2\operatorname{sen} x - 2yz^2, x^2\cos y + 2y\cos x - 2xz^2, -4xyz) \\
(\nabla U)_P &= \left(\frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi^2}{16}\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\pi, \frac{\pi^2}{16}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\pi, -\pi^2\right) \\
&= \left(\frac{\pi\sqrt{2}}{4} - \frac{\pi^2\sqrt{2}}{32} - 2\pi, \frac{\pi^2\sqrt{2}}{32} + \frac{\pi\sqrt{2}}{4} - 2\pi, -\pi^2\right)
\end{aligned}
$$

Y, por otra parte, el rotacional del gradiente de una función siempre es cero: $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}U) = 0$

5. *Hallar el volumen del cuerpo limitado por el paraboloide* $x^2+2y^2+z=4$ *y el plano* XOY

   La ecuación del plano XOY es $z=0$ y su intersección con el paraboloide es la elipse de ecuación $x^2+2y^2=4 \rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$. El volumen es $V = \int\int_R zdxdy = \int\int_R (4-(x^2+2y^2))dxdy$.
   Hacemos el cambio a coordenadas elípticas $x = 2\rho\cos t$, $y=\sqrt{2}\rho \operatorname{sen} t$ por lo que el jacobiano de la transformación es $J = a \cdot b \cdot \rho = 2\sqrt{2}\rho$, siendo los límites de integración $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq t \leq 2\pi$

   Por lo tanto,

$$V = \int_0^1 (4-4\rho^2)2\sqrt{2}\rho d\rho \int_0^{2\pi} dt = 8\sqrt{2}\left[\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 [t]_0^{2\pi} = 4\pi\sqrt{2}$$

6. *Demostrar que* $\vec{F} = (y^2z^3, 2x\,y\,z^3+1, 3x\,y^2z^2+2z)$ *es una fuerza conservativa y hallar su función potencial*

   Una fuerza $\vec{F}$ es conservativa si su rotacional es nulo: $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$.
   En este caso es $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2z^3 & 2x\,y\,z^3 & 3x\,y^2z^2+2z \end{vmatrix} = \vec{0}$
   Por lo tanto, existe una función potencial conservativa
   $U(x,y,z) = \int y^2z^3dx + \int 1dy + \int 2zdz = x\,y^2z^3+y+z^2$

7. *Hallar el trabajo efectuado por la fuerza* $\vec{F} = (e^xy^2-2xy+1, 2e^xy-x^2)$ *sobre la curva* $f(x) = e^{x^2-x}-\cos(\pi x)-x$ *entre los puntos* $(0,0)$ *y* $(1,1)$

   Estudiemos las derivadas cruzadas:

$$\left.\begin{array}{lll} Q = 2e^xy-x^2 & \rightarrow & \frac{\partial Q}{\partial x} = 2e^xy-2x \\ P = e^xy^2-2xy+1 & \rightarrow & \frac{\partial P}{\partial y} = 2e^xy-2x \end{array}\right\} \rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

Por lo tanto, la integral no depende del camino de integración sino tan sólo de los puntos inicial y final. En consecuencia, hallaremos la función potencial

$U = \int_0^1 (e^x y^2 - 2xy + 1)dx = \left[e^x y^2 - x^2 y + x\right]_{(0,0)}^{(1,1)} = e$

Enunciados 2

1. Hallar los puntos críticos de la superficie de ecuación
   $f(x, y) = 4x^3 - 12x^2 + 3y^2 - 6y + 2$

2. Hallar el área encerrada por la curva $f(x) = \operatorname{sen}^3 x$ y el eje de abscisas entre los puntos $x = 0$, $x = \pi$

3. Hallar el volumen de la superficie generada por la curva $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ al girar alrededor del eje X entre $x = 0$ y $x = \pi$

4. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $z = (x^2+3y^2)e^{-x-2y}$ en el punto de coordenadas $x = 2$, $y = -1$

5. Hallar $\displaystyle\int\int_D (4x^2+y^2)dxdy$ extendida sobre el recinto D: $36x^2+9y^2 = 36$

6. Hallar el trabajo efectuado por la fuerza $\vec{F} = (2xy - y^2, x^2 - 2xy + y)$ entre los puntos (1, 0) y (2, -1) de la curva $y = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{2x - 3}$

7. Hallar la circulación del campo vectorial $\vec{F} = \left(\dfrac{2x}{y^2} + \dfrac{y}{x^2}, -\dfrac{2x^2}{y^3} - \dfrac{1}{x}\right)$ a lo largo de la circunferencia $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 1$

Respuestas 2

1. *Hallar los puntos críticos de la curva de ecuación*
   $f(x, y) = 4x^3 - 12x^2 + 3y^2 - 6y + 2$

   Hallemos las derivadas parciales de primer y segundo orden:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 12x^2 - 24x \rightarrow x = 0 \vee x = 2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 6y - 6 \rightarrow y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 24x - 24 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0 \end{cases}$$

   Se obtienen los puntos A(0, 1) y B(2, 1).
   La expresión del hessiano es $H = \begin{vmatrix} 24x - 24 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 144(x - 1)$.
   El valor del hessiano en A es $H(0, 1) = -144 < 0$ por lo que A(0, 1) es un punto de silla mientras que $H(2, 1) = 144 > 0$ y como $f_{yy}(B) = 6 > 0$, el punto B(2, 1) es un mínimo relativo de la función.

2. *Hallar el área encerrada por la curva $f(x) = \operatorname{sen}^3 x$ y el eje de abscisas entre los puntos $x = 0$, $x = \pi$*

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b f(x)dx = \int_0^\pi \operatorname{sen}^3 x dx = \int_0^\pi \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x dx \\ &= \int_0^\pi (1 - \cos^2 x) \operatorname{sen} x dx \\ & \quad \text{Cambio: } \cos x = t \rightarrow -\operatorname{sen} x dx = dt \\ A &= \int_1^{-1} (1 - t^2)(-dt) = \left[t - \frac{t^3}{3} \right]_{-1}^{1} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

3. *Hallar el volumen de la superficie generada por la curva* $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ *al girar alrededor del eje* X *entre* $x = 0$ *y* $x = \pi$

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_a^b f^2(x)dx = \pi \int_0^\pi \operatorname{sen}^4 x dx = \pi \int_0^\pi \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^2 dx \\
&= \frac{\pi}{4}\int_0^\pi (1 - 2\cos(2x) + \cos^2(2x))dx \\
&= \frac{\pi}{4}\int_0^\pi (1 - 2\cos(2x) + \frac{1+\cos(4x)}{2})dx \\
&= \frac{\pi}{4}\left[\frac{3}{2}x - \operatorname{sen}(2x) + \frac{\operatorname{sen}(4x)}{8}\right]_0^\pi = \frac{3}{8}\pi^2
\end{aligned}$$

4. *Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie* $z = (x^2+3y^2)e^{-x-2y}$ *en el punto de coordenadas* $x = 2$, $y = -1$

La ecuación del plano tangente es
$z - z_0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P (x - x_0) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P (y - y_0)$.
Para $x = 2,\ y = -1$ es $z = 7$ por lo que el punto de la superficie es el $P(2, -1, 7)$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= 2xe^{-x-2y} - (x^2 + 3y^2)e^{-x-2y} \to \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P = -3 \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= 6ye^{-x-2y} - 2(x^2 + 3y^2)e^{-x-2y} \to \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P = -20
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación del plano tangente es
$z - 7 = -3(x - 2) - 20(y + 1)$, es decir $3x + 20y + z + 7 = 0$

5. *Hallar* $\int\int_D (4x^2+y^2)dxdy$ *extendida sobre el recinto D:* $36x^2+9y^2 = 36$

El recinto de integración es D: $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ lo que sugiere el cambio a coordenadas elípticas: $x = \rho \cos t$,
$y = 2\rho \operatorname{sen} t$ por lo que el valor del jacobiano es $J = 2\rho$ siendo los nuevos

límites de integración $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq t \leq 2\pi$ y además $4x^2 + y^2 = 4\rho^2$. Por tanto es

$$I = \int\int_{D'} = \rho^2 2\rho d\rho dt = 8\int_0^1 \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} dt = 4\pi$$

6. *Hallar el trabajo efectuado por la fuerza* $\vec{F} = (2xy - y^2, x^2 - 2xy + y)$ *entre los puntos (1, 0) y (2, -1) de la curva* $y = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{2x - 3}$

   Puesto que $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2x - 2y = \dfrac{\partial P}{\partial y}$, la fuerza es conservativa por lo que la integral no depende del camino elegido. Hallemos la función potencial: $U(x, y) = \displaystyle\int (2xy - y^2)dx + \int ydy = x^2y - xy^2 + \frac{y^2}{2}$ por lo que el trabajo solicitado es $T = U(2, -1) - U(1, 0) = (-4 - 2 + \frac{1}{2}) - 0 = -\frac{11}{2}$

7. *Hallar la circulación del campo vectorial* $\vec{F} = \left(\dfrac{2x}{y^2} + \dfrac{y}{x^2}, -\dfrac{2x^2}{y^3} - \dfrac{1}{x}\right)$ *a lo largo de la circunferencia* $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 1$

   Como $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = -\dfrac{4x}{y^3} + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$, la fuerza dada es conservativa por lo que la circulación a lo largo de una línea cerrada es nula.

Enunciados 3

1. Resolver la integral definida $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3x+1}{\sqrt{3-4x-4x^2}}\,dx$

2. Hallar el área encerrada entre un arco de la cicloide $(t-\operatorname{sen} t, 1-\cos t)$ y el eje de abscisas

3. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{2xy-1}$ en el punto de coordenadas $x=1$, $y=-1$

4. Hallar en el punto $P(1,-1,\frac{\pi}{4})$ el rotacional del campo vectorial $\vec{F}=(x^2y-\cos z, xy^2+y\cos z, yz\operatorname{sen}(x-1)\operatorname{sen} z)$

5. Dada la superficie $f(x,y)=e^{x^2+y^2-2x+4y}$

   a) Indicar la naturaleza de sus curvas de nivel

   b) Hallar la dirección de Máxima pendiente en el punto $P(3,-1,1)$

6. Estudiar los extremos de la superficie $f(x,y)=\ln(x^2+2y^2+4y+3)$

7. Hallar $\displaystyle\int\int_D \frac{1}{x^2+y^2+1}dxdy$ siendo D el círculo $x^2+y^2\leq 4$

Respuestas 3

1. *Resolver la integral definida* $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3x+1}{\sqrt{3-4x-4x^2}}\,dx$

   $-4x^2-4x+3 = -4(x+\frac{1}{2})^2+1+3 = 4-(2x+1)^2$ por lo que:

$$\begin{aligned}
I &= \frac{3}{-8}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-8x-4+4}{\sqrt{3-4x-4x^2}}dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{4-(2x+1)^2}}dx \\
&= \left[-\frac{3}{8}2\sqrt{3-4x-4x^2}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x+1}{2}\right)^2}}dx \\
&= \frac{3}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{4}\left[\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{2x+1}{2}\right)\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right) \\
&\to \; I = \frac{3}{4}\sqrt{3} - \frac{\pi}{12}
\end{aligned}$$

2. *Hallar el área encerrada entre un arco de la cicloide* $(t-\operatorname{sen} t, 1-\cos t)$ *y el eje de abscisas.*

   Un arco de cicloide está generado por una circunferencia que da un giro completo deslizándose sobre una recta por lo que $0 \le t \le 2\pi$ (ver Figura 15.1).

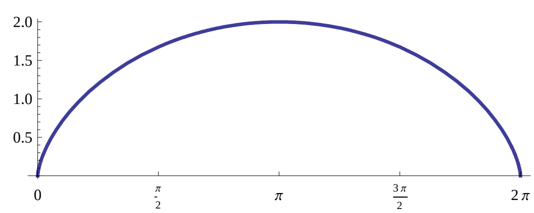


Figura 15.1: Cicloide

Además, $x = t - \operatorname{sen} t \rightarrow dx = (1 - \cos t)dt$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
A &= \int_{t_0}^{t_1} y(t)d(x(t)) = \int_0^{2\pi} (1-\cos t)(1-\cos t)dt \\
&= \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1+\cos(2t)}{2}\right) dt \\
&= \left[\frac{3}{2}t - 2\operatorname{sen} t + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2t)\right]_0^{2\pi} = 3\pi
\end{aligned}$$

3. *Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie* $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{2xy-1}$ *en el punto de coordenadas* $x = 1$, $y = -1$

La ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ es $z - z_0 = \dfrac{\partial z}{\partial x}(x - x_0) + \dfrac{\partial z}{\partial y}(y - y_0)$ donde las derivadas parciales se hallan en el punto P.
$z(1,-1) = -\frac{2}{3} \rightarrow P(1,-1,-\frac{2}{3})$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{2x(2xy-1) - (x^2+y^2)2y}{(2xy-1)^2} = \frac{2x^2y - 2x - 2y^3}{(2xy-1)^2} \\
&\rightarrow \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{(1,-1)} = -\frac{2}{9} \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{2y(2xy-1) - (x^2+y^2)2x}{(2xy-1)^2} = \frac{2xy^2 - 2y - 2x^3}{(2xy-1)^2} \\
&\rightarrow \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{(1,-1)} = \frac{2}{9}
\end{aligned}$$

Luego, la ecuación del plano tangente a la superficie en el punto P es $z + \frac{2}{3} = -\frac{2}{9}(x-1) + \frac{2}{9}(y+1) \rightarrow 2x - 2y + 9z + 2 = 0$

4. *Hallar en el punto* $P(1,-1,\frac{\pi}{4})$ *el rotacional del campo vectorial*

$\vec{F} = (x^2y - \cos z, xy^2 + y\cos z, yz\,\mathrm{sen}(x-1)\,\mathrm{sen}\, z)$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{rot}\vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y - \cos z & xy^2 + y\cos z & yz\,\mathrm{sen}(x-1)\,\mathrm{sen}\, z \end{vmatrix} \\
&= (z\,\mathrm{sen}(x-1)\,\mathrm{sen}\, z + y\,\mathrm{sen}\, z, \mathrm{sen}\, z - yz\cos(x-1)\,\mathrm{sen}\, z, x^2 - y^2)
\end{aligned}$$

por lo que en el punto considerado es $\overrightarrow{rot\ F} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$

5. *Dada la superficie* $f(x,y) = e^{x^2+y^2-2x+4y}$

   a) *Indicar la naturaleza de sus curvas de nivel*

   $f(x,y) = C \rightarrow e^{x^2+y^2-2x+4y} = C \rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 4y = \ln C \rightarrow$ $(x-1)^2 + (y+2)^2 - 5 = \ln C$ por lo que se trata de circunferencias de centro $(1,-2)$ y radio $r = \sqrt{\ln C + 5}$

   b) *Hallar la dirección de Máxima pendiente en el punto* $P(3,-1,1)$

   Basta hallar el gradiente de la función en ese punto:

   $$\begin{aligned}
   \frac{\partial f}{\partial x} &= (2x-2)e^{x^2+y^2-2x+4y} \rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_P = 4 \\
   \frac{\partial f}{\partial y} &= (2y+4)e^{x^2+y^2-2x+4y} \rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_P = 2
   \end{aligned}$$

   Por lo tanto, la direción de Máxima pendiente la indica el vector $\vec{u} = (4,2)$

6. *Estudiar los extremos de la superficie* $f(x,y) = \ln(x^2 + 2y^2 + 4y + 3)$

Derivadas parciales de primer orden:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{2x}{x^2+2y^2+4y+3} = 0 \to x = 0 \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{4y+4}{x^2+2y^2+4y+3} = 0 \to 4y+4 = 0 \to y = -1 \\
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{2(x^2+2y^2+4y+3)-(2x)^2}{(x^2+2y^2+4y+3)^2} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{-2x(4y+4)}{(x^2+2y^2+4y+3)^2} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{4(x^2+2y^2+4y+3)-(4y+4)^2}{(x^2+2y^2+4y+3)^2}
\end{aligned}$$

por lo que el hessiano de la función en $(0,-1)$ es $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8 > 0$ lo que indica que en P hay un extremo. Y puesto que $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} > 0$ el punto $P(0,-1,0)$ es un mínimo de la función.

7. *Hallar* $\displaystyle\int\int_D \frac{1}{x^2+y^2+1} dxdy$ *siendo D el círculo* $x^2+y^2 \leq 4$

Como el recinto es un círculo, hacemos el cambio a coordenadas polares: $x = \rho\cos t$, $y = \rho \operatorname{sen} t$ por lo que $x^2+y^2 = \rho^2$ siendo el jacobiano $J = \rho$ y $0 \leq \rho \leq 2 \wedge 0 \leq t \leq 2\pi$.

Por lo tanto: $I = \displaystyle\int_0^2 \frac{\rho}{\rho^2+1} d\rho \int_0^{2\pi} dt = \left[\frac{1}{2}\ln(\rho^2+1)\right]_0^2 [t]_0^{2\pi} = \pi \ln 5$

Enunciados 4

1. Hallar el área encerrada entre la curva $f(x) = \dfrac{3x - x^2}{x^2 + 9}$ y el eje de abscisas.

2. Hallar el volumen limitado por el paraboloide $z = 5 - \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9}$ y el plano $z = 1$.

3. Estudiar los extremos relativos de la superficie
   $f(x, y) = x^3 + 3x^2y - 6y^2 - 24y + 1$

4. Hallar la longitud de un arco de la cicloide $(t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t)$

5. Si $z = x^2 e^{2y} \cos(x - y)$, hallar $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ en el punto $(1, 1, e^2)$

6. Hallar la magnitud (el módulo) del rotacional del campo vectorial
   $\vec{F} = xe^{y-z}\vec{i} + (x^2 + 2xy - z^2)\vec{j} + (x\cos(y-1) - y\cos(1-z))\vec{k}$
   en el punto P(0, 1, 1).

Respuestas 4

1. *Hallar el área encerrada entre la curva* $f(x) = \dfrac{3x - x^2}{x^2 + 9}$ *y el eje de abscisas.*

   La curva corta al eje OX en $x = 0$ y $x = 3$ por lo que

   $$\begin{aligned} A &= \int_0^3 \frac{3x - x^2}{x^2 + 9} dx = \int_0^3 \left(-1 + \frac{3x}{x^2 + 9} + \frac{9}{x^2 + 9} \right) dx \\ &= \left[-x + \frac{3}{2} \ln(x^2 + 9) + 3 \arctan\left(\frac{x}{3}\right) \right]_0^3 = -3 + \frac{3}{2} \ln 2 + 3\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

2. *Hallar el volumen limitado por el paraboloide* $z = 5 - \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9}$ *y el plano* $z = 1$.

   Es el volumen del casquete superior del paraboloide de la figura (ver Figura 15.2).

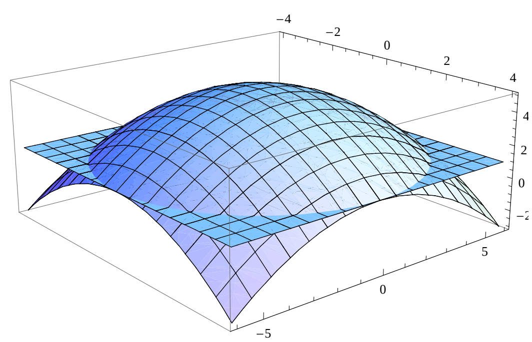


Figura 15.2: Casquete parabólico

$V = \displaystyle\int\int\int_V dxdydz = \int\int \left[\int_1^{5 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}} \right] dxdy$ por lo que

$V = \displaystyle\int\int \left(4 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \right) dxdy.$

Cambio a coordenadas elípticas $x = 2\rho\cos\theta$, $y = 3\rho\,\mathrm{sen}\,\theta$ con lo que $|J| = 6\rho$, siendo el recinto de integración el rectángulo de lados $0 \leq \rho \leq 2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Por tanto:

$$V = 6\int_0^2 (4-\rho^2)\rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta = 12\pi \int_0^2 (4\rho-\rho^3)d\rho = 12\pi\left[2\rho^2 - \frac{\rho^4}{4}\right]_0^2 = 48\pi$$

3. *Estudiar los extremos relativos de la superficie* $f(x,y) = x^3 + 3x^2y - 6y^2 - 24y + 1$

   Las dos primeras derivadas parciales son:
   $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 6xy = 3x(x+2y) = 0 \to (x = 0) \vee (x = -2y)$
   $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 - 12y - 24 = 0.$
   Para $x = 0$ es $y = -2$ por lo que resulta el punto $(0,-2)$.
   Para $x = -2y$ es $12y^2 - 12y - 24 = 0 \to (y = -1) \wedge (y = 2)$ de donde se obtienen los puntos $(2,-1)$, $(-4,2)$.
   Hallemos el valor del hessiano

   $$H(x,y) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x+6y & 6x \\ 6x & -12 \end{vmatrix} = 36(-2x - 2y - x^2)$$

   Entonces:

   - $H(0,-2) = 36(4) > 0$ y como $f_{yy} = -12 < 0$, en el punto $(0,-2,25)$ hay un Máximo.
   - $H(2,-1) = 36(-6) < 0$ por lo que en el punto $(2,-1,15)$ hay un punto de ensilladura.
   - $H(-4,2) = 36(-12) < 0$ por lo que $(-4,2,-39)$ también es un punto de silla.

4. *Hallar la longitud de un arco de la cicloide* $(t - \mathrm{sen}\,t, 1 - \cos t)$

   Longitud $= \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$

Un arco de cicloide está generado por una circunferencia que da un giro completo por lo que $0 \leq t \leq 2\pi$.

Además, $x = t - \operatorname{sen} t \to dx = (1-\cos t)dt$; $y = 1-\cos t \to dy = \operatorname{sen} t dt$.

Por tanto, $(dx)^2 + (dy)^2 = (1 - 2\cos t + \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t)(dt)^2$ por lo que $(dx)^2 + (dy)^2 = 2(1 - \cos t)(dt)^2 = 4\operatorname{sen}^2(t/2)(dt)^2$ y, finalmente, $\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = 2\operatorname{sen}(t/2)dt$.

Luego: $L = \displaystyle\int_0^{2\pi} 2\operatorname{sen}(t/2)dt = [-4\cos(t/2)]_0^{2\pi} = 8$

5. *Si* $z = x^2 e^{2y}\cos(x-y)$, *hallar* $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ *en el punto* $(1, 1, e^2)$

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2x^2 e^{2y}\cos(x-y) + x^2 e^{2y}\operatorname{sen}(x-y)$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 4x\ e^{2y}\cos(x-y) - 2x^2 e^{2y}\operatorname{sen}(x-y)$

$+2x\ e^{2y}\operatorname{sen}(x-y) + x^2 e^{2y}\cos(x-y)$

Por lo tanto, $\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right)_P = 4e^2 + e^2 = 5e^2$

6. *Hallar la magnitud (el módulo) del rotacional del campo vectorial* $\vec{F} = xe^{y-z}\vec{i} + (x^2 + 2xy - z^2)\vec{j} + (x\cos(y-1) - y\cos(1-z))\vec{k}$ *en el punto P(0, 1, 1).*

El rotacional de un campo vectorial está definido, simbólicamente, como el producto vectorial del operador nabla por la función vectorial. Por tanto:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{rot}\vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xe^{y-z} & x^2+2xy-z^2 & x\cos(y-1)-y\cos(1-z) \end{vmatrix} \\
\overrightarrow{rot}\vec{F} &= (-x\,\mathrm{sen}(y-1)-\cos(1-z)+2z, \\
& -\cos(y-1)+xe^{y-z}, 2x+2y-xe^{y-z}\Big) \\
& \left(\overrightarrow{rot}\vec{F}\right)_{P(0,1,1)} = (1,-1,2) \\
& \left|\overrightarrow{rot}\vec{F}\right|_{P(0,1,1)} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}
\end{aligned}
$$

Enunciados 5

1. Estudiar los puntos críticos de la superficie $z = e^{x-y}(x^2 + xy + y^2)$

2. Hallar la longitud del arco de curva $\left(\sqrt{1-2t}, \sqrt{1+2t}\right)$ entre $t = 1/4$ y $t = 1/2$

3. Hallar el área encerrada entre la curva $f(x) = \dfrac{5x+10}{x^3+5x^2+12x+8}$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$, $x = 1$

   (Indicar la respuesta con 2 decimales)

4. Hallar el volumen comprendido entre el paraboloide elíptico $z = 4 - \left(\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}\right)$ y el plano XOY

5. Hallar el volumen del cilindro recto limitado por la superficie $f(x, y) = \dfrac{1-2y}{x^2-4}$ y la región del plano XOY comprendida entre las parábolas $y = x^2 - 1$, $y = 7 - x^2$

   (Indicar la respuesta con 2 decimales)

6. Hallar el gradiente de la divergencia del campo vectorial $\vec{F} = \left(\dfrac{x-z}{yz}, \dfrac{y-z}{xz}, \dfrac{z-x}{xy}\right)$ en el punto P(1, 2, 3)

7. Hallar el volumen limitado por el paraboloide $z = 1 - \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9}$ para $z \geq 0$

Respuestas 5

1. *Estudiar los puntos críticos de la superficie* $z = e^{x-y}(x^2+xy+y^2)$

   Derivadas parciales de primer orden:
   $$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial z}{\partial x} = e^{x-y}(x^2+xy+y^2+2x+y) = 0 \\[2em] \dfrac{\partial z}{\partial y} = e^{x-y}(-x^2-xy-y^2+x+2y) = 0 \end{array}\right\}$$
   Sumando ambas ecuaciones resulta $3x+3y=0 \to y=-x$.

   Sustituyendo en la primera de las derivadas es
   $$e^{2x}(x^2+x) = 0 \to \left\{\begin{array}{l} x=0 \to y=0 \\ x=-1 \to y=1 \end{array}\right\}$$
   Hallaremos el hessiano en estos dos puntos:

   $$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= e^{x-y}(x^2+xy+y^2+4x+2y+2) \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= e^{x-y}(-x^2-xy-y^2-x+y+1) \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= e^{x-y}(x^2+xy+y^2-2x-4y+2) \end{aligned}$$

   $H(0,0) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$ y como $a_{22} = 2 > 0$ hay un mínimo en el punto P(0, 0, 0)

   $H(-1,1) = e^{-2}e^{-2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4e^{-4} < 0$ por lo que el punto Q(-1, 1,e^{-2}) es un punto de silla.

2. *Hallar la longitud del arco de curva* $\left(\sqrt{1-2t}, \sqrt{1+2t}\right)$ *entre* $t = 1/4$ y $t = 1/2$

   La longitud de un arco de curva definida en coordenadas paramétricas es $L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$

$$
\begin{aligned}
dx &= \frac{-1}{\sqrt{1-2t}}dt \to (dx)^2 = \frac{1}{1-2t}(dt)^2 \\
dy &= \frac{1}{\sqrt{1+2t}}dt \to (dy)^2 = \frac{1}{1+2t}(dt)^2 \\
&\to (dx)^2 + (dy)^2 = \frac{2}{1-4t^2}(dt)^2 \\
&\to \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{2}\frac{dt}{\sqrt{1-4t^2}} \\
L &= \sqrt{2}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-(2t)^2}}dt = \sqrt{2}\frac{1}{2}\left[\arcsin(2t)\right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\arcsin 1 - \arcsin(1/2)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{6}
\end{aligned}
$$

3. *Hallar el área encerrada entre la curva* $f(x) = \dfrac{5x+10}{x^3+5x^2+12x+8}$, *el eje de abscisas y las rectas* $x = 0$, $x = 1$

   La curva corta al eje de abscisas en $5x + 10 = 0 \to x = -2 \notin [0, 1]$ por lo que $A = \displaystyle\int_0^1 \frac{5x+10}{x^3+5x^2+12x+8}dx$.

   Raíces del denominador:

	1	+5	+12	+8
$x = -1$		–1	–4	–8
	1	+4	+8	0

   $x^2 + 4x + 8 = 0 \to x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16-32}}{2} \notin \mathcal{R}$

   Por tanto, $x^3 + 5x^2 + 12x + 8 = (x+1)(x^2+4x+8)$ por lo que función dada se descompone en la forma

$$\begin{aligned}
& \frac{5x+10}{(x+1)(x^2+4x+8)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+4x+8} \\
\rightarrow \quad & A(x^2+4x+8) + (Bx+C)(x+1) = 5x+10 \\
Para \quad & x = -1 \rightarrow 5A = 5 \rightarrow A = 1 \\
& x = 0 \rightarrow 8A + C = 10 \rightarrow C = 2 \\
& x = 1 \rightarrow 13A + 2B + 2C = 15 \rightarrow B = -1
\end{aligned}$$

En consecuencia, el área es

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\frac{2x+4}{x^2+4x+8} + 4\frac{1}{(x+2)^2+4} \right) dx \\
&= \left[\ln(x+1) - \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+8) + 4\frac{1}{4}\frac{1}{1/2}\arctan\left(\frac{x+2}{2}\right) \right]_0^1 \\
&= \ln 2 - \frac{1}{2}(\ln(13) - \ln 8) + 2\left(\arctan\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{\pi}{4} \right) = 0{,}68
\end{aligned}$$

4. *Hallar el volumen comprendido entre el paraboloide elíptico* $z = 4 - \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right)$ *y el plano XOY*

Sabemos que $V = \int\int_D z dxdy = \int\int_D \left(4 - \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right)\right) dxdy$

La intersección del paraboloide con el plano $z = 0$ es la elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 4 \rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$ lo que sugiere un cambio a coordenadas elípticas:

$x = 4\rho\cos t,\ y = 6\rho \operatorname{sen} t \rightarrow J = 24\rho$ con $0 \leq \rho \leq 1,\ 0 \leq t \leq 2\pi$ Por tanto,

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 (4 - 4\rho^2) 24\rho \ d\rho \right] dt = 96 \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 dt \\
&= 24[t]_0^{2\pi} = 48\pi
\end{aligned}$$

5. *Hallar el volumen del cilindro recto limitado por la superficie* $f(x,y) = \dfrac{1-2y}{x^2-4}$ *y la región del plano XOY comprendida entre las parábolas* $y = x^2 - 1$, $y = 7 - x^2$

Intersección de ambas parábolas: $x^2 - 1 = 7 - x^2 \to x^2 = 4 \to x = \pm 2$ por lo que

$$\begin{aligned} V &= \int\int_D f(x,y)dxdy = \int_{-2}^{2} \frac{1}{x^2-4}\left[\int_{x^2-1}^{7-x^2}(1-2y)dy\right]dx \\ &= \int_{-2}^{2} \frac{1}{x^2+4}\left[y-y^2\right]_{x^2-1}^{7-x^2} dx = \int_{-2}^{2} \frac{10x^2-40}{x^2-4}dx \\ &= \int_{-2}^{2} \frac{10(x^2-4)}{x^2-4}dx = [10x]_{-2}^{2} = 40 \end{aligned}$$

6. *Hallar el gradiente de la divergencia del campo vectorial* $\vec{F} = \left(\dfrac{x-z}{yz}, \dfrac{y-z}{xz}, \dfrac{z-x}{xy}\right)$ *en el punto* P(1, 2, 3)

$$\begin{aligned} div(\vec{F}) &= \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{xy} \\ grad(f) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \\ &= \left(-\frac{1}{x^2z} - \frac{1}{x^2y}, -\frac{1}{y^2z} - \frac{1}{xy^2}, -\frac{1}{yz^2} - \frac{1}{xz^2}\right) \\ grad(div(\vec{F}))_P &= \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2}, -\frac{1}{12} - \frac{1}{4}, -\frac{1}{18} - \frac{1}{9}\right) = -\left(\frac{5}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right) \end{aligned}$$

7. *Hallar el volumen limitado por el paraboloide* $z = 1 - \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9}$ *para* $z \geq 0$

$V = \displaystyle\int\int_R z dxdy = \int\int_R \left[1 - \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right)\right] dxdy.$

Cambio a coordenadas polares modificadas: $x = 2\rho\cos t$,

$y = 3\rho \operatorname{sen} t$ por lo que el jacobiano es $J = 6\rho$ siendo $1 - \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right) = 1 - \rho^2$. Por tanto:

$$\begin{aligned} V &= \int\int_{R'} (1-\rho^2) 6\rho d\rho dt = 6 \int_0^1 (\rho - \rho^3) d\rho \int_0^{2\pi} dt \\ &= 6 \left[\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 2\pi = 3\pi \end{aligned}$$

Enunciados 6

1. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2+1}$ en el punto de coordenadas $x = 1,\ y = 0$.
   Interpretar el resultado.

2. Hallar el área encerrada entre la curva
   $x(t) = \sqrt{e^t - 1},\ y(t) = (t^2 - t + 2)\sqrt{e^t - 1}$, el eje de abscisas y las rectas verticales correspondientes a $t = 0$ y $t = 1$

3. Comprobar que $\vec{F} = (2xe^{yz} - 3, x^2ze^{yz} + 2z^2, x^2ye^{yz} + 4yz + 7)$ es un campo conservativo y hallar su función potencial.

4. Estudiar los puntos críticos de la función $f(x,y) = e^{x-y}(x^2 + y^2 - 4)$

5. Hallar $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x + 2}{e^{2x} + 1}dx$ (Dar la respuesta con dos decimales)

6. Hallar el volumen del cilindro cuya cara superior es la superficie $z = x$ siendo la cara inferior la región del plano XOY limitada por las parábolas $y = 2x^2 - 3x + 2$, $y = -x^2 + 6x - 4$

7. Hallar el trabajo efectuado por la fuerza $\vec{F} = \left(\dfrac{x+y}{y+1}, \dfrac{x-1}{y}\right)$ a lo largo de la curva $\vec{r} = (t^2 + t - 1, t^2)$ entre los puntos A(1, 1) y B(5, 4).

Respuestas 6

1. *Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie* $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2+1}$ *en el punto de coordenadas* $x = 1,\ y = 0$.
   Interpretar el resultado.

   La ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ es $z - z_0 = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)_P (x - x_0) + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)_P (y - y_0)$

$$\begin{aligned}
z_0 &= \frac{1}{2} \\
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{-x^2+y^2+1}{(x^2+y^2+1)^2} \to \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P = 0 \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{-2xy}{(x^2+y^2+1)^2} \to \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P = 0
\end{aligned}$$

   Por tanto, la ecuación del plano tangente es $z - \frac{1}{2} = 0 \to z = \frac{1}{2}$: el plano tangente a la superficie en el punto $P(1, 0, \frac{1}{2})$ es horizontal, lo que indica que el punto P es un extremo relativo.

2. *Hallar el área encerrada entre la curva* $x(t) = \sqrt{e^t - 1},\ y(t) = (t^2 - t + 2)\sqrt{e^t - 1}$, *el eje de abscisas y las rectas verticales correspondientes a* $t = 0$ *y* $t = 1$

$$\begin{aligned}
\text{Área} &= \int_0^1 y(t)x'(t)dt = \int_0^1 (t^2 - t + 2)\sqrt{e^t - 1}\frac{e^t}{2\sqrt{e^t - 1}}dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 (t^2 - t + 2)e^t dt = \frac{1}{2}\left[e^t[(t^2 - t + 2) - (2t - 1) + 2]\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2}\left[e^t(t^2 - 3t + 5)\right]_0^1 = \frac{3e - 5}{2} = 1{,}578
\end{aligned}$$

3. *Comprobar que* $\vec{F} = (2xe^{yz} - 3, x^2ze^{yz} + 2z^2, x^2ye^{yz} + 4yz + 7)$ *es un campo conservativo y hallar su función potencial.*

$\vec{F}$ es conservativo si se verifica la igualdad de las derivadas cruzadas:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2xze^{yz} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$
$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = 2xye^{yz} = \frac{\partial F_3}{\partial x}$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial z} = e^{yz}(x^2 + x^2yz) + 4z = \frac{\partial F_3}{\partial y}$$

$\vec{F}$ es conservativo y admite función potencial:

$$\begin{aligned} U &= \int (2xe^{yz} - 3)dx + \int 2z^2 dy + \int 7dz \\ &= x^2e^{yz} - 3x + 2yz^2 + 7z + C \end{aligned}$$

4. *Estudiar los puntos críticos de la función* $f(x,y) = e^{x-y}(x^2 + y^2 - 4)$

Resolvemos el sistema de ecuaciones $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= e^{x-y}(x^2 + y^2 - 4 + 2x) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= e^{x-y}(-x^2 - y^2 + 4 + 2y) \end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones resulta $x + y = 0 \rightarrow y = -x$. Sustituyendo esta igualdad en la primera ecuación resulta $x^2 + x^2 - 4 + 2x = 0 \Rightarrow (x = -2 \rightarrow y = 2) \wedge (x = 1 \rightarrow y = -1)$.

Sustiutimos estos valores en el hessiano de la función para lo que debemos hallar las derivadas parciales de segundo orden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= e^{x-y}(x^2 + y^2 + 4x - 2) \rightarrow \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{(-2,2)} = -2e^{-4} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= e^{x-y}(-x^2 - y^2 + 4 - 2x + 2y) \rightarrow \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)_{(-2,2)} = 4e^{-4} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= e^{x-y}(x^2 + y^2 - 4y - 2) \rightarrow \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{(-2,2)} = -2e^{-4} \end{aligned}$$

por lo que

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{array} \right|_{(-2,2)} = \left| \begin{array}{cc} -2e^{-4} & 4e^{-4} \\ 4e^{-4} & -2e^{-4} \end{array} \right| = -12e^{-4} < 0$$

por lo que el punto $(-2, 2, 4e^{-4})$ es un punto de ensilladura.

En $x = 1,\ y = -1$, el valor del hessiano es

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{array} \right|_{(1,-1)} = \left| \begin{array}{cc} 4e^{2} & -2e^{2} \\ -2e^{2} & 4e^{2} \end{array} \right| = 12e^{4} > 0$$

y como $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4e^2 > 0$, el punto $(-1, 1, -2e^2)$ es un mínimo de la función.

5. *Hallar* $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x + 2}{e^{2x} + 1} dx$ (Dar la respuesta con dos decimales)

Cambio de variable: $e^x = t \to x = \ln t \to dx = \frac{1}{t}dt$; $(e^{2x} = t^2)$.
Además: $x = 1 \to t = e,\ x = 0 \to t = 1$.
Por lo tanto, la integral dada se transforma en $I = \displaystyle\int_1^e \frac{t+2}{t(t^2+1)}dt$.

Se descompone el integrando:

$$\begin{array}{rl} & \dfrac{t+2}{t(t^2+1)} = \dfrac{A}{t} + \dfrac{Bt + C}{t^2+1} = \dfrac{A(t^2+1) + (Bt+C)t}{t(t^2+1)} \\ \to & A(t^2+1) + (Bt+C)t = t + 2 \to A = 2,\ C = 1,\ B = -2 \end{array}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} I &= \int_1^e \left(\frac{2}{t} - \frac{2t}{t^2+1} + \frac{1}{t^2+1} \right) dt \\ &= \left[2\ln t - \ln(t^2+1) + \arctan t \right]_1^e \\ &= 2(\ln e - \ln 1) - (\ln(e^2+1) - \ln 2) + (\arctan e - \arctan 1) \\ &= 1{,}31 \end{aligned}$$

6. *Hallar el volumen del cilindro cuya cara superior es la superficie $z = x$ siendo la cara inferior la región del plano XOY limitada por las parábolas $y = 2x^2 - 3x + 2$, $y = -x^2 + 6x - 4$*

   $V = \int\int_D f(x,y)dxdy$ siendo D el recinto comprendido entre las dos parábolas: $2x^2 - 3x + 2 = -x^2 + 6x - 4 \rightarrow 3x^2 - 9x + 6 = 0 \rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow x = 1 \wedge x = 2$. Luego:

$$\begin{aligned} V &= \int_1^2 \left[\int_{2x^2-3x+2}^{-x^2+6x-4} x dy \right] dx \\ &= \int_1^2 x \left[y \right]_{2x^2-3x+2}^{-x^2+6x-4} dx = \int_1^2 x(-3x^2 + 9x - 6) dx \\ &= \int_1^2 (-3x^3 + 9x^2 - 6x) dx = \left[-\frac{3}{4}x^4 + 3x^3 - 3x^2 \right]_1^2 = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

7. *Hallar el trabajo efectuado por la fuerza $\vec{F} = \left(\dfrac{x+y}{y+1}, \dfrac{x-1}{y} \right)$ a lo largo de la curva $\vec{r} = (t^2 + t - 1, t^2)$ entre los puntos A(1, 1) y B(5, 4).*

   Hallemos los valores que corresponden a t en el punto A(1, 1):
   $y = 1 \rightarrow t^2 = 1 \rightarrow t = \pm 1$. Para $x = 1$ es $t = 1$.
   En el punto B(5, 4): $y = 4 \rightarrow t^2 = 4 \rightarrow t = \pm 2$. Para $x = 5$ es $t = 2$.
   Finalmente, sustituímos x e y por sus expresiones paramétricas:

$$\begin{aligned} T &= \int_\gamma \vec{F} d\vec{r} = \int_{AB} \frac{x+y}{y+1} dx + \frac{x-1}{y} dy \\ &= \int_1^2 \left[\frac{2t^2 + t - 1}{t^2 + 1}(2t + 1) + \frac{t^2 + t - 2}{t^2} 2t \right] dt \\ &= \int_1^2 \left(4t + 4 - \frac{5t + 5}{t^2 + 1} + 2t + 2 - 4\frac{1}{t} \right) dt \\ &= \left[2t^2 + 4t - \frac{5}{2} \ln(t^2 + 1) - 5 \arctan t + t^2 + 2t - 4 \ln t \right]_1^2 \\ &= 15 - \frac{5}{2} \ln \frac{5}{2} - 5 \arctan 2 + 5\frac{\pi}{4} - 4 \ln 2 = 8{,}33 \end{aligned}$$

Enunciados 7

1. Indicar la naturaleza de las curvas de nivel de la superficie $f(x,y) = 2 - e^{-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}}$

2. Estudiar los puntos críticos de la función $f(x,y) = e^{x^2+y^2-6x}$

3. Hallar el área encerrada entre la curva $f(x) = \dfrac{29(x^2-2x-3)}{4x^3+4x^2-3x+10}$ y el eje de abscisas

4. Hallar el volumen limitado por la superficie $z = \frac{1}{x} + y$ y el plano XOY, extendido sobre el recinto limitado por las parábolas $y = -2x^2+3x$, $y = 2x^2 - 9x$

5. Hallar la ecuación de la recta normal a la superficie $z = (x^2 - y^2)\ln(2x+y)$, en el punto $P(3,-5,0)$

6. Hallar el módulo del rotacional del campo vectorial $\vec{F} = (x^2y - z^2,\ x + y + \dfrac{1}{z^2},\ \operatorname{sen}(\pi x) + \cos y - e^{z^2})$ en el punto $A(1,0,-1)$

Respuestas 7

1. *Indicar la naturaleza de las curvas de nivel de la superficie* $f(x,y) = 2 - e^{-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}}$

   Las curvas de nivel de una superficie son su intersección con un plano horizontal $z = C$:

$$
\begin{aligned}
& 2 - e^{-\left(\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\right)} = C \to e^{-\left(\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\right)} = 2 - C \\
\to\ & \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = -\ln(2-C) = \ln\left(\frac{1}{2-C}\right) \\
\to\ & \frac{x^2}{9\ln\left(\frac{1}{2-C}\right)} + \frac{y^2}{4\ln\left(\frac{1}{2-C}\right)} = 1
\end{aligned}
$$

   por lo que las curvas de nivel son elipses de centro el origen, semieje horizontal $a = 3\sqrt{\ln\left(\frac{1}{2-C}\right)}$ y semieje vertical $b = 2\sqrt{\ln\left(\frac{1}{2-C}\right)}$ y consecuentemente ha de ser $1 < C < 2$

2. *Estudiar los puntos críticos de la función* $f(x,y) = e^{x^2+y^2-6x}$

   Los puntos críticos verifican el sistema de ecuaciones $\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

   $\dfrac{\partial z}{\partial x} = (2x-6)e^{x^2+y^2-6x} = 0 \to 2x - 6 = 0 \to x = 3$

   $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2-6x} = 0 \to y = 0$

   Estos valores se sustituyen en el Hessiano de la función:

$$
\begin{aligned}
H(x,y) &= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} e^{x^2+y^2-6x}((2x-6)^2+2) & e^{x^2+y^2-6x}(2x-6)2y \\ e^{x^2+y^2-6x}(2x-6)2y & e^{x^2+y^2-6x}(4y^2+2) \end{vmatrix} \\
H(3,0) &= \begin{vmatrix} 2e^{-9} & 0 \\ 0 & 2e^{-9} \end{vmatrix} = 4e^{-18}
\end{aligned}
$$

Al ser $H(3,0) > 0$, en el punto $(3,0,e^{-9})$ hay un punto crítico, y como $\dfrac{\partial^2 z(3,0)}{\partial y^2} = 2e^{-9} > 0$, el punto $(3,0,e^{-9})$ es un mínimo.

3. *Hallar el área encerrada entre la curva* $f(x) = \dfrac{29(x^2-2x-3)}{4x^3+4x^2-3x+10}$ *y el eje de abscisas*

   Hallamos los puntos de corte de la curva con el eje horizontal $y = 0$: $f(x) = 0 \to x^2 - 2x - 3 = 0 \to (x = -1 \wedge x = 3)$.

   Para $x = 2$ que es un valor entre -1 y 3 es $f(x) < 0$, lo que indica que la curva se encuentra por debajo del eje horizontal.

   En consecuencia, $A = \displaystyle\int_3^{-1} \frac{29(x^2-2x-3)}{4x^3+4x^2-3x+10}dx$

   Hallaremos en primer lugar la integral (indefinida) de la función:

   $A(x) = \displaystyle\int \frac{29(x^2-2x-3)}{4x^3+4x^2-3x+10}.$

   Al ser una función racional, descomponemos el denominador en factores, aplicando la regla de Ruffini:

   $$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & 4 & -3 & 10 \\ x=-2 & & -8 & 8 & -10 \\ \hline & 4 & -4 & 5 & 0 \end{array}$$

   $\to 4x^2 - 4x + 5 = 0 \to x \notin \mathcal{R}$

Luego,

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{29(x^2-2x-3)}{4x^3+4x^2-3x+10} = \frac{29(x^2-2-x-3)}{(x+2)(4x^2-4x+5)} \\
&= \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{4x^2-4x+5} \\
\to \quad & A(4x^2-4x+5) + (Bx+C)(x+2) \\
& = 29(x^2-2x-3) \\
x=-2 \quad & \to 29A = 29\cdot 5 \to A = 5 \\
x=0 \quad & \to 5A + 2C = 29(-3) \to C = -56 \\
x=1 \quad & \to 5A + 3B + C = 29(-4) \to B = 9 \\
\to \quad S(x) &= \int \left(\frac{5}{x+2} + \frac{9x-56}{4x^2-4x+5} \right) dx \\
&= 5\ln(x+2) + I_1 \\
I_1 &= 9\frac{1}{8}\int \frac{8x-4+4}{4x^2-4x+5}dx - 56\int \frac{1}{4x^2-4x+5}dx \\
&= \frac{9}{8}\int \frac{8x-4}{4x^2-4x+5}dx - \frac{103}{2}\int \frac{1}{4x^2-4x+5}dx \\
&= \frac{9}{8}\ln(4x^2-4x+5) - \frac{103}{2}\int \frac{1}{(2x-1)^2+4}dx \\
&= \frac{9}{8}\ln(4x^2-4x+5) - \frac{103}{2}\frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{2x-1}{2}\right)^2+1}dx \\
&= \frac{9}{8}\ln(4x^2-4x+5) - \frac{103}{8}\arctan\left(\frac{2x-1}{2}\right) \\
S &= \left[5\ln(x+2) + \frac{9}{8}\ln(4x^2-4x+5) \right. \\
& \left. - \frac{103}{8}\arctan\left(\frac{2x-1}{2}\right) \right]_3^{-1} \\
&= -5\ln 5 + \frac{9}{8}[\ln(13) - \ln(29)] \\
& + \frac{103}{8}\left(\arctan(\frac{3}{2}) + \arctan(\frac{5}{2}) \right) = 19{,}0286
\end{aligned}
$$

4. *Hallar el volumen limitado por la superficie* $z = \frac{1}{x} + y$ *y el plano* XOY*,*

extendido sobre el recinto limitado por las parábolas $y = -2x^2 + 3x$, $y = 2x^2 - 9x$

Hallemos los límites de integración de x resolviendo la ecuación
$-2x^2 + 3x = 2x^2 - 9x \to 4x^2 - 12x = 0 \to x = 0 \wedge x = 3.$
Por tanto

$$\begin{aligned} Vol &= \int\int_R \left(\frac{1}{x} + y\right) dxdy = \int_0^3 \left[\int_{2x^2-9x}^{-2x^2+3x} \left(\frac{1}{x} + y\right) dy\right] dx \\ &= \int_0^3 \left[\frac{y}{x} + \frac{y^2}{2}\right]_{2x^2-9x}^{-2x^2+3x} dx = \int_0^3 (-12x^3 + 36x^2 + 4x - 12) dx \\ &= \left[-3x^4 + 12x^3 + 2x^2 - 12x\right]_0^3 = 63 \end{aligned}$$

5. *Hallar la ecuación de la recta normal a la superficie* $z = (x^2 - y^2)\ln(2x + y)$, *en el punto* $P(3, -5, 0)$

   La ecuación de la recta normal a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ de la superficie es $\dfrac{x - x_0}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_P} = \dfrac{y - y_0}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_P} = \dfrac{z - z_0}{-1}$

   $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x\ln(2x + y) + (x^2 - y^2)\dfrac{2}{2x + y} \to \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_P = -32$

   $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -2y\ln(2x + y) + (x^2 - y^2)\dfrac{1}{2x + y} \to \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)_P = -16$

   La ecuación de la recta normal es $\dfrac{x - 3}{-32} = \dfrac{y + 5}{-16} = \dfrac{z}{-1}$

6. *Hallar el módulo del rotacional del campo vectorial*

$$\vec{F} = (x^2y - z^2,\ x + y + \frac{1}{z^2},\ \operatorname{sen}(\pi x) + \cos y - e^{z^2})\ \textit{en el punto } A(1, 0, -1)$$

$$\begin{aligned}
rot(\vec{F}) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \\
\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} &= -\operatorname{sen} y + \frac{2}{z^3} \to \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right)_P = -2 \\
\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} &= -2z - \pi\cos(\pi x) \to \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right)_P = 2 + \pi \\
\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} &= 1 - x^2 \to \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)_P = 0 \\
\text{Luego } rot(\vec{F}) &= (-2, 2 + \pi, 0) \to |rot(\vec{F})| = \sqrt{(-2)^2 + (2 + \pi)^2}
\end{aligned}$$

Enunciados 8

1. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $f(x, y) = \ln\left(\sqrt{x^2 - y^2 + 1} + x - 2y\right)$ en el punto de coordenadas $x = 1$, $y = -1$.

2. Hallar el área encerrada entre la curva $y = \dfrac{11x^2 - 25x + 46}{4x^3 - 8x^2 + 13x + 25}$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$, $x = 1$.
   Indicar la respuesta con 2 decimales.

3. Hallar en el punto $P(1, 0, e)$, las segundas derivadas parciales de la función $z(x, y) = e^{x-y}(x^2 - y^2)$

4. Hallar el volumen comprendido entre la superficie $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x^2 + y^2}$ y el primer cuadrante del círculo de radio 1 y centro O(0, 0)

5. Hallar el volumen del cilindro limitado por la superficie $z = \dfrac{2x}{(y + 1)^2}$ y el recinto del primer cuadrante comprendido entre las parábolas $y = x^2$, $y = 8 - x^2$

6. Averiguar si $\vec{F}(x, y, z) = \left(2xe^{y-z} + 3, x^2e^{y-z} - 2, -x^2e^{y-z} + 2z\right)$ es un campo conservativo. En caso afirmativo, hallar su función potencial.

Respuestas 8

1. *Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie* $f(x,y) = \ln\left(\sqrt{x^2-y^2+1}+x-2y\right)$ *en el punto de coordenadas* $x=1$, $y=-1$.

   La ecuación del plano tangente en el punto $P(x_0,y_0,z_0)$ de la superficie es $z-z_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_P (x-x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_P (y-y_0)$.
   $z_0 = f(1,-1) = \ln 4$

   $$\begin{aligned}
   \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2+1}+x-2y}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2+1}}+1\right)\\
   &\rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_P = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}\\
   \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2+1}+x-2y}\left(\frac{-y}{\sqrt{x^2-y^2+1}}-2\right)\\
   &\rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_P = \frac{-1}{4}
   \end{aligned}$$

   Por tanto, la ecuación del plano tangente en este punto es
   $z-\ln 4 = \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(y+1)$

2. *Hallar el área encerrada entre la curva* $y = \frac{11x^2-25x+46}{4x^3-8x^2+13x+25}$, *el eje de abscisas y las rectas* $x=0$, $x=1$.
   Indicar la respuesta con 2 decimales.

   El área viene dada por $A = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$
   Debemos averiguar si la curva corta al eje X en un punto interior al intervalo de integración $[0,1]$
   $11x^2-25x+46 = 0 \rightarrow x = \frac{25\pm\sqrt{25^2-4\cdot 11\cdot 46}}{22} \notin \mathcal{R}$ lo que indica que la curva no corta al eje de abscisas.

Por lo tanto, $A = \int_0^1 \frac{11x^2 - 25x + 46}{4x^3 - 8x^2 + 13x + 25} dx$
Hallamos las raíces del denominador para descomponer el integrando en suma de fracciones más simples:

	4	–8	13	25
$x = -1$		–4	12	–25
	4	–12	25	0

$4x^2 - 12x + 25 = 0 \to x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 400}}{8} \notin \mathcal{R}$.
Por lo tanto, $4x^3 - 8x^2 + 13 + 25 = (x+1)(4x^2 - 12x + 25)$.
En consecuencia:

$$
\begin{aligned}
& \frac{11x^2 - 25x + 46}{4x^3 - 8x^2 + 13x + 25} = \frac{11x^2 - 25x + 46}{(x+1)(4x^2 - 12x + 25)} \\
= \quad & \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{4x^2 - 12x + 25} \\
\to \quad & A(4x^2 - 12x + 25) + (Bx + C)(x+1) = 11x^2 - 25x + 46 \\
Para \quad & x = -1: \ 41A = 82 \to A = 2 \\
& x = 0: \ 25A + C = 46 \to C = 46 - 50 \to C = -4 \\
& x = 1: \ 17A + 2B + 2C = 32 \to B = 3
\end{aligned}
$$

Por lo que:

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^1 \left(\frac{2}{x+1} + \frac{3x-4}{4x^2-12x+25} \right) dx = [2\ln(x+1)]_0^1 + I_1 \\
&= 2\ln 2 + I_1 \\
I_1 &= 3\int_0^1 \frac{x}{4x^2-12x+25} dx - 4\int_0^1 \frac{1}{4x^2-12x+25} dx \\
&= \frac{3}{8}\int_0^1 \frac{8x-12+12}{4x^2-12x+25} dx - 4\int_0^1 \frac{1}{4x^2-12x+25} dx \\
&= \frac{3}{8}\int_0^1 \frac{8x-12}{4x^2-12x+25} dx + \left(\frac{3}{8} 12 - 4 \right) \int_0^1 \frac{1}{4x^2-12x+25} dx \\
&= \frac{3}{8}[\ln(4x^2-12x+25)]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{(2x-3)^2+16} dx \\
&= \frac{3}{8}(\ln(17)-\ln(25)) + \frac{1}{2}\frac{1}{16}\int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{2x-3}{4}\right)^2+1} dx \\
&= \frac{3}{8}\left(\ln(17)-\ln(25)\right) + \frac{1}{16}\left[\arctan\left(\frac{2x-3}{4} \right) \right]_0^1 \\
&= -0{,}1446 + \frac{1}{16}(-\arctan(1/4) + \arctan(3/4)) = -0{,}1197
\end{aligned}
$$

Luego $A = 2\ln 2 - 0{,}1197 = 1{,}27$

3. *Hallar en el punto $P(1,0,e)$, las segundas derivadas parciales de la función $z(x,y) = e^{x-y}(x^2-y^2)$*

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= e^{x-y}(x^2-y^2+2x) \\
&\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{x-y}(x^2-y^2+4x+2) \rightarrow \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_P = 7e \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = e^{x-y}(-x^2+y^2-2x-2y) \rightarrow \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} \right)_P = -3e \end{array} \right. \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= e^{x-y}(-x^2+y^2-2y) \\
&\rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{x-y}(x^2-y^2+2y+2y-2) \rightarrow \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)_P = -e
\end{aligned}
$$

4. *Hallar el volumen comprendido entre la superficie* $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$ *y el primer cuadrante del círculo de radio 1 y centro O(0, 0)*

El volumen viene dado por $V = \displaystyle\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_D \frac{x+y}{x^2+y^2}dxdy$ donde D es el primer cuarto del círculo unidad, lo que sugiere un cambio a coordenadas polares:

$x = \rho\cos t,\ y = \rho\operatorname{sen} t \to |J| = \rho,\ 0 \leq \rho \leq 1,\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

Por tanto:

$$\begin{aligned} V &= \int\int_{D'} \frac{\rho(\cos t + \operatorname{sen} t)}{\rho^2}\rho d\rho dt = \int_0^1 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t + \operatorname{sen} t)dt \\ &= [\operatorname{sen} t - \cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} = (1-0) - (0-1) = 2 \end{aligned}$$

5. *Hallar el volumen del cilindro limitado por la superficie* $z = \dfrac{2x}{(y+1)^2}$ *y el recinto del primer cuadrante comprendido entre las parábolas* $y = x^2$, $y = 8 - x^2$

El volumen es $V = \displaystyle\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_D \frac{2x}{(y+1)^2}dxdy$

Las dos parábolas se cortan en $x = 2$ en el primer cuadrante por lo que

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 2x\left[\int_{x^2}^{8-x^2} \frac{1}{(y+1)^2}dy\right]dx = \int_0^2 2x\left[\frac{-1}{y+1}\right]_{x^2}^{8-x^2} dx \\ &= \int_0^2 \left(\frac{2x}{x^2+1} - \frac{2x}{9-x^2}\right)dx = \left[\ln(x^2+1) + \ln(9-x^2)\right]_0^2 \\ &= \ln 5 + \ln 5 - \ln 1 - \ln 9 = 2\ln 5 - \ln 9 \end{aligned}$$

6. *Averiguar si* $\vec{F}(x,y,z) = \left(2xe^{y-z} + 3, x^2e^{y-z} - 2, -x^2e^{y-z} + 2z\right)$ *es un campo conservativo. En caso afirmativo, hallar su función potencial.*

Un campo vectorial es conservativo si se verifica la igualdad de las derivadas cruzadas de sus componentes:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2xe^{y-z} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$
$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = -2xe^{y-z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial z} = -x^2e^{y-z} - 2 = \frac{\partial F_3}{\partial y}$$

Por lo tanto, $\vec{F}$ sí es un campo conservativo.

Su función potencial es

$U(x,y,z) = \int \left(2xe^{y-z} + 3)\right) dx + \int -2dy + \int 2zdz$

$U(x,y,z) = x^2e^{y-z} + 3x - 2y + z^2 + C$

Enunciados 9

1. Hallar la ecuación de la recta normal a la superficie
   $z = e^{x\,y^2}(x^2 - y)$ en el punto $P(2, 1, \cdots)$ de la misma

2. Estudiar los puntos críticos de la función $f(x, y) = e^{x^2-y^2+2x-2y+2xy}$

3. Hallar el área generada por el giro de la curva $y = \sqrt{2x-1}$ alrededor del eje de abscisas entre los puntos $x = 1$, $x = 4$
   Área $= 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}dx$

4. Hallar el valor del jacobiano de la transformación $x = u\cos t$,
   $y = u^2 \operatorname{sen} t$ para $u = 2$, $t = \frac{\pi}{4}$

5. Hallar el rotacional del campo vectorial $\vec{F} = \left(\dfrac{xy}{y+z}, \dfrac{yz}{x+z}, \dfrac{xz}{x+y}\right)$ en el punto P(1, 1, 1)

6. Hallar el volumen del cilindro limitado por la superficie $z = \dfrac{2x}{(y+1)^2}$
   y el recinto del plano XOY comprendido entre $y = x^2$, $y = 0$,
   $x = 0,\ x = 1$

Respuestas 9

1. *Hallar la ecuación de la recta normal a la superficie* $z = e^{x\,y^2}(x^2 - y)$ *en el punto* $P(2, 1, \cdots)$ *de la misma*

   La ecuación de la recta normal a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto P(x_0, y_0, z_0) es
   $$\frac{x - x_0}{\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)_P} = \frac{y - y_0}{\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)_P} = \frac{z - z_0}{-1}$$

   Por tanto:

   $$\begin{aligned}
   z_0 &= f(x_0, y_0) = f(2, 1) = e^2(4 - 1) = 3e^2 \\
   \frac{\partial z}{\partial x} &= e^{x\,y^2}(y^2(x^2 - y) + 2x) \to \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P = 7e^2 \\
   \frac{\partial z}{\partial y} &= e^{x\,y^2}(2xy(x^2 - y) - 1) \to \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P = 11e^2
   \end{aligned}$$

   En consecuencia, la ecuación de la recta normal es:
   $\dfrac{x - 2}{7e^2} = \dfrac{y - 1}{11e^2} = \dfrac{z - 3e^2}{-1}$

2. *Estudiar los puntos críticos de la función* $f(x, y) = e^{x^2 - y^2 + 2x - 2y + 2xy}$

   Los puntos críticos de la superficie $z = f(x, y)$ se obtienen anulando las derivadas parciales de primer orden de $z = f(x, y)$:

   $$\begin{aligned}
   \frac{\partial z}{\partial x} &= e^{x^2 - y^2 + 2x - 2y + 2xy}(2x + 2 + 2y) \\
   \frac{\partial z}{\partial y} &= e^{x^2 - y^2 + 2x - 2y + 2xy}(-2y - 2 + 2x)
   \end{aligned}$$

   $$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \to x + y + 1 = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \to x - y - 1 = 0 \end{array} \right\} \to x = 0 \wedge y = -1$$

Estos valores se sustituyen en el hessiano de la función:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{x^2-y^2+2x-2y+2xy}\left[(2x+2+2y)^2+2\right] \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = e^{x^2-y^2+2x-2y+2xy}[(2x+2+2y)(-2y-2+2x)+2] \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{x^2-y^2+2x-2y+2xy}\left[(-2y-2+2x)^2-2\right] \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_P = 2e \\ \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right)_P = 2e \\ \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_P = -2e \end{array}\right\} \rightarrow H(0,-1) = \begin{vmatrix} 2e & 2e \\ 2e & -2e \end{vmatrix} = -8e < 0$$

por lo que P(0, –1, e) es un punto silla.

3. *Hallar el área generada por el giro de la curva* $y = \sqrt{2x-1}$ *alrededor del eje de abscisas entre los puntos* $x = 1$*,* $x = 4$

La curva $y = \sqrt{2x-1}$ corta al eje de abscisas ($y = 0$) en $x = \frac{1}{2} \notin [1, 4]$ por lo que $A = 2\pi \displaystyle\int_1^4 y\sqrt{1+y'^2}dx$
Por tanto:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{2x-1}} \rightarrow \sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\frac{1}{2x-1}} = \sqrt{\frac{2x}{2x-1}}$$

$$y\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{2x-1}\sqrt{\frac{2x}{2x-1}} = \sqrt{2x} = \sqrt{2}\sqrt{x} = \sqrt{2}\ x^{1/2}$$

$$A = 2\pi\sqrt{2}\int_1^4 x^{1/2}dx = 2\pi\sqrt{2}\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_1^4 = \frac{4}{3}\pi\sqrt{2}(8-1) = \frac{28}{3}\pi\sqrt{2}$$

4. *Hallar el valor del jacobiano de la transformación* $x = u\cos t$*,* $y = u^2 \operatorname{sen} t$ *para* $u = 2$*,* $t = \frac{\pi}{4}$

Hallamos las derivadas parciales de x e y:

$$\left.\begin{array}{ll}\dfrac{\partial x}{\partial u} = \cos t & \dfrac{\partial x}{\partial t} = -u \operatorname{sen} t \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} = 2u \operatorname{sen} t & \dfrac{\partial y}{\partial t} = u^2 \cos t\end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \quad H(x,y) = \begin{vmatrix} \cos t & -u \operatorname{sen} t \\ 2u \operatorname{sen} t & u^2 \cos t \end{vmatrix} = u^2 \cos^2 t + 2u^2 \operatorname{sen}^2 t$$

Por lo tanto: $H(2, \frac{\pi}{4}) = 4\frac{1}{2} + 8\frac{1}{2} = 6$

5. *Hallar el rotacional del campo vectorial* $\vec{F} = \left(\dfrac{xy}{y+z}, \dfrac{yz}{x+z}, \dfrac{xz}{x+y}\right)$ *en el punto* P(1, 1, 1)

   El rotacional del campo vectorial $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ es

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{rotF} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) \\
\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} &= \frac{-xz}{(x+y)^2} - \frac{y(x+z)-yz}{(x+z)^2} \\
&\to \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)_P = \frac{-1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} \\
\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} &= \frac{-xy}{(y+z)^2} - \frac{z(x+y)-xz}{(x+y)^2} \\
&\to \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)_P = -\frac{1}{2} \\
\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} &= \frac{-yz}{(x+z)^2} - \frac{x(y+z)-xy}{(y+z)^2} \\
&\to \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)_P = -\frac{1}{2} \\
\left(\overrightarrow{rotF}\right)_P &= \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}(1,1,1)
\end{aligned}$$

6. *Hallar el volumen del cilindro limitado por la superficie* $z = \dfrac{2x}{(y+1)^2}$ *y el recinto del plano XOY comprendido entre* $y = x^2$, $y = 0$, $x = 0,\ x = 1$

   El volumen del cilindro es $V = \displaystyle\int\int_D f(x,y)dxdy$, siendo D el recinto de integración que en esta caso es

$$
\begin{aligned}
D &= \left\{ \begin{array}{c} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x^2 \end{array} \right\} \\
V &= \int_0^1 \left[\int_0^{x^2} \frac{2x}{(y+1)^2} dy \right] dx = \int_0^1 2x \left[\frac{-1}{y+1} \right]_0^{x^2} dx \\
&= \int_0^1 2x \left(\frac{-1}{x^2+1} + 1 \right) dx = \int_0^1 \left(2x - \frac{2x}{x^2+1} \right) dx \\
&= \left[x^2 - \ln(x^2+1) \right]_0^1 = 1 - \ln 2
\end{aligned}
$$

Enunciados 10

a) Estudiar los puntos críticos de la función
$f(x, y) = 2x^3 - 6x\,y + 3x + 2y^2 + 5$

b) Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie
$f(x, y) = \ln\left(x^2y - x\,y^2 + x^2 - y^2 + 3\right)$ en el punto P(1, –1, ...)

c) Hallar la longitud del arco de la curva $y^2 = x^3$ (parábola semicúbica) comprendido entre el origen y el punto P(5,5$\sqrt{5}$).
Longitud $= \displaystyle\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y')^2}dx$

d) Hallar el módulo del rotacional del campo vectorial $\vec{F} = \left(\dfrac{x+y}{x+z}, \dfrac{y-x}{y-z}, \dfrac{z}{x-y}\right)$ en el punto P(2, 1, 0)

e) Hallar el área comprendida entre la curva $y = \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x + 5}$, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.
Indicar la respuesta con dos decimales.

f) Hallar el volumen del cilindro cuya cara superior es el plano $z = 1 + 2x + 3y$ y la base inferior la porción de elipse $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ comprendida en el primer cuadrante.

Respuestas 10

a) *Estudiar los puntos críticos de la función*
$f(x,y) = 2x^3 - 6x\,y + 3x + 2y^2 + 5$

Se resuelve el sistema formado por las derivadas parciales de primer orden iguales a 0; los valores obtenidos se sustituyen en el hessiano de la función:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 - 6y + 3 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -6x + 4y = 0 \rightarrow y = \dfrac{3}{2}x \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow 6x^2 - 9x + 3 = 0 \Rightarrow \left(x = 1 \rightarrow y = \frac{3}{2}\right) \wedge \left(x = \frac{1}{2} \rightarrow y = \frac{3}{4}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -6 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4 \end{array}\right\} \rightarrow H(x,y) = \begin{vmatrix} 12x & -6 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 48x - 36$$

$$H(1, 3/2) = 12 > 0, f_{yy} = 4 > 0 \Rightarrow A\left(1, \frac{3}{2}, \frac{11}{2}\right) \text{ es un mínimo}$$

$$H(1/2, 3/4) = -12 < 0 \Rightarrow B\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{45}{8}\right) \text{ es un punto silla}$$

b) *Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie*
$f(x,y) = \ln(x^2y - x\,y^2 + x^2 - y^2 + 3)$ *en el punto* P(1, –1, ...)

La ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto $\mathrm{P}(x_0, y_0, z_0)$ de la misma es $z - z_0 = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_P (x - x_0) + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)_P (y - y_0)$.

$x_0 = 1 \wedge y_0 = -1 \rightarrow z_0 = \ln 1 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{2xy - y^2 + 2x}{x^2y - xy^2 + x^2 - y^2 + 3} \rightarrow \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_P = \dfrac{-2 - 1 + 2}{1} = -1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x^2 - 2xy - 2y}{x^2y - xy^2 + x^2 - y^2 + 3} \rightarrow \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)_P = \dfrac{1 + 2 + 2}{1} = 5 \end{array}\right\}$$

Plano tangente: $z - 0 = -(x-1) + 5(y+1) \rightarrow x - 5y + z - 6 = 0$

c) *Hallar la longitud del arco de la curva* $y^2 = x^3$ *(parábola semicúbica) comprendido entre el origen y el punto* P$(5{,}5\sqrt{5})$.

La longitud de un arco de la curva $y = f(x)$ viene dada por la fórmula $L = \displaystyle\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y')^2}dx$.

$$y = \sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}} \rightarrow y' = \frac{3}{2}\sqrt{x} \rightarrow 1 + (y')^2 = 1 + \frac{9}{4}x = \frac{4 + 9x}{4}$$

$$A = \int_0^5 \sqrt{\frac{4 + 9x}{4}}dx = \frac{1}{2}\int_0^5 (4 + 9x)^{\frac{1}{2}}dx = \left[\frac{1}{2}\frac{1}{9}\frac{(4 + 9x)^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right]_0^5$$

$$A = \frac{1}{27}(7^3 - 2^3) = \frac{335}{27}$$

d) *Hallar el módulo del rotacional del campo vectorial* $\vec{F} = \left(\dfrac{x+y}{x+z}, \dfrac{y-x}{y-z}, \dfrac{z}{x-y}\right)$ *en el punto* P(2, 1, 0).

El rotacional del campo vectorial $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ es

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{rot(F)} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) \\
\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} &= \frac{z}{(x-y)^2} - \frac{y-x}{(y-z)^2} \\
&\rightarrow \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)_P = 0 + 1 = 1 \\
\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} &= \frac{-(x+y)}{(x+z)^2} + \frac{z}{(x-y)^2} \\
&\rightarrow \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)_P = -\frac{3}{4} \\
\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} &= -\frac{1}{y-z} - \frac{1}{x+z} \\
&\rightarrow \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)_P = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \\
\left(\overrightarrow{rotF}\right)_P &= \left(1, -\frac{3}{4}, -\frac{3}{2}\right) \\
&\rightarrow |\overrightarrow{rot(F)}_P| = \sqrt{1^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{61}}{4}
\end{aligned}$$

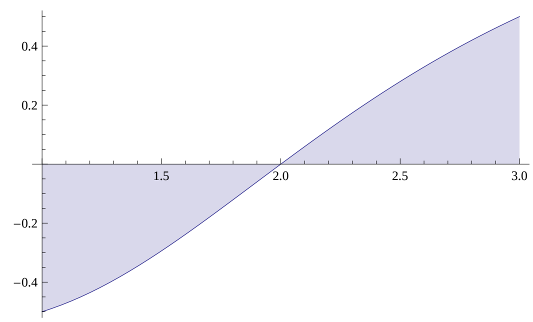
e) *Hallar el área comprendida entre la curva* $y = \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x + 5}$, *el eje de abscisas y las rectas* $x = 1$ y $x = 3$.

$A = \displaystyle\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx.$

Antes de nada debemos comprobar si la curva corta al eje de abscisas en el interior del intervalo [1, 3].

$x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \in (1, 3) \wedge x = -1 \notin (1, 3)$. En consecuencia, el área solicitada es la suma de las áreas en los intervalos [1,2] y

[2,3], ambas positivas.



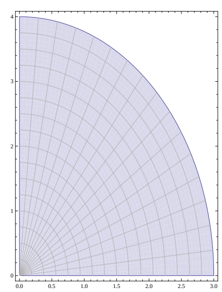
Por otra parte, como x^2-2x+5 no tiene raíces reales, la integral se calcula de la forma que se indica a continuación.

$$
\begin{aligned}
& \int \frac{x^2-x-2}{x^2-2x+5}dx = \int \left(1+\frac{x-7}{x^2-2x+5}\right)dx \\
= \;& x+\int \frac{x}{x^2-2x+5}dx - 7\int \frac{1}{x^2-2x+5}dx \\
= \;& x+\frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+5}dx - 6\int \frac{1}{(x-1)^2+4}dx \\
= \;& x+\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+5) - 6\frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1}dx \\
= \;& x+\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+5) - 6\frac{1}{4}\frac{1}{1/2}\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) \\
I_1 = \;& \left[x+\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+5) - 3\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right)\right]_1^2 \\
= \;& \left(2+\frac{1}{2}\ln 5 - 3\arctan\frac{1}{2}\right) - \left(1+\frac{1}{2}\ln 4 - 3\arctan 0\right) \\
= \;& -0{,}2794 \to A_1 = 0{,}2794 \\
I_2 = \;& \left[x+\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+5) - 3\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right)\right]_2^3 \\
= \;& \left(3+\frac{1}{2}\ln 8 - 3\arctan 1\right) - \left(2+\frac{1}{2}\ln 5 - 3\arctan\frac{1}{2}\right) \\
= \;& 0{,}2698
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $A = A_1 + A_2 = 0{,}2794 + 0{,}2698 \to A = 0{,}55$

f) *Hallar el volumen del cilindro cuya cara superior es el plano $z = 1 + 2x + 3y$ y la base inferior la porción de elipse $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ comprendida en el primer cuadrante.*

El volumen viene dado por la fórmula
$V = \displaystyle\int\int_D z\,dxdy = \int\int_D (1 + 2x + 3y)dxdy$, siendo el recinto de integración D el indicado en la figura:



Este recinto sugiere un cambio a coordenadas elípticas:

$$\left.\begin{array}{l} x = 3\rho\cos t \\ y = 4\rho\operatorname{sen} t \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} J = ab\rho \to J = 12\rho \\ 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \end{array}\right\}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} V &= \int\int_{D'} (1 + 6\rho\cos t + 12\rho\operatorname{sen} t)12\rho d\rho dt \\ &= 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^1 (\rho + 6\rho^2\cos t + 12\rho^2\operatorname{sen} t)d\rho\right] dt \\ &= 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\rho^2}{2} + 2\rho^3\cos t + 4\rho^3\operatorname{sen} t\right]_0^1 dt \\ &= 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + 2\cos t + 4\operatorname{sen} t\right) dt \\ &= 12\left[\frac{t}{2} + 2\operatorname{sen} t - 4\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 12\left(\frac{\pi}{4} + 2 + 4\right) = 72 + 3\pi \end{aligned}$$

Bibliografía

[1] APOSTOL, T.: *Análisis matemático*, Reverté, Barcelona (1972)

[2] FALCÓN SANTANA, S.: *Cálculo I*, El Libro Técnico, Las Palmas de G.C. (2001)

[3] FALCÓN SANTANA, S.: *Cálculo II*, El Libro Técnico, Las Palmas de G.C. (2001)

[4] GALINDO SOTO, F.: *Cálculo infinitesimal en varias variables*, Ed. Thomson (2005)

[5] KRASNOV y KISELIOV: *Curso de Matemáticas superiores para ingenieros* (2 tomos). Ed. Mir (1993)

[6] PISKUNOV, N.: *Cálculo diferencial e integral*, Montaner y Simón, Barcelona (1966)