INTEGRAL INDEFINIDA

Definición: Dada una función $y=f(x)$, llamaremos integral indefinida de la función $f(x)$ y la denotaremos por $\int f(x)dx$ a una función $g(x)$ tal que la derivada de $g(x)$ sea la función $f(x)$, es decir,

$$\int f(x)\,dx = g(x) \iff g'(x) = f(x)$$

Tener en cuenta que si $\int f(x)dx = g(x)$, como la derivada de una constante es 0, resultará que $g(x)+C$ (C una constante) es también una integral indefinida de $f(x)$, porque

$$(g(x)+c)' = g'(x) + C' = g'(x) = f(x)$$

Por tanto, la integral indefinida de una función tiene como solución una familia infinita de funciones tales que la diferencia entre dos funciones de esta familia es una constante.

NOTA: A diferencia de la derivada de una función que es una sola función, la integral indefinida son una familia de funciones que depende de una constante C llamada constante de integración.

Ejemplo 1

$$\int e^x\,dx = e^x + C \quad \text{porque} \quad (e^x+c)' = e^x$$

Ejemplo 2

$$\int dx = x + C \quad \text{porque} \quad (x+c)' = 1$$

Ejemplo 3

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C \quad \text{porque} \quad (\ln x + C)' = \frac{1}{x}$$

Diferencial de una función. Dada una función $y=f(x)$ llamaremos diferencial al producto de su derivada por dx, es decir

$$dy = f'(x)\,dx$$

Ejemplo 4 Dada la funcion $y = \operatorname{sen} x$ su diferencial será $dy = \cos x\, dx$

Notar que si la variable independiente en vez de ser x es otra llamemosle t, sera la derivada por dt.

Ejemplo 5 Dada la función $u = e^{2t}$ su diferencial sera $du = 2e^{2t}\,dt$.

Nota. Como la diferencial es la derivada multiplicada por dx, la diferencial gozará de las mismas propiedades que la derivada, es decir,

$$d(u+v) = du + dv$$
$$d(u-v) = du - dv$$
$$d(\lambda u) = \lambda\, du \quad (\lambda = \text{constante})$$
$$d(u\cdot v) = v\,du + u\,dv$$
$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$$

entre otras.

<u>Nota</u>: Sabemos que $\int dx = x$ porque $(x)' = 1$, pero como la x es una variable cualquiera, la expresion anterior lo que nos viene a decir es que "la integral de la diferencial de "algo" es "ese algo"", es decir

$$\int dp = p \ ; \ \int dy = y \ ; \ \int du = u$$

Tabla de integrales inmediatas

1) $\int (f(x) \pm g(x))\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$

2) $\int k\, f(x)\, dx = k \int f(x)$ si k es una constante

3) $\int x^n\, dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$ si $n \neq -1$

4) $\int \dfrac{1}{x}\, dx = \ln x + C$

5) $\int a^x\, dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$ ($a =$ constante)

6) $\int e^x\, dx = e^x + C$

7) $\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + C$

8) $\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C$

9) $\cancel{\int \operatorname{tg} x\, dx =} \int \dfrac{1}{\cos^2 x}\, dx = \operatorname{tg} x + C$

10) $\int \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\, dx = -\operatorname{cotg} x + C$

11) $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \operatorname{arc\,sen} x + C$

12) $\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\, dx = \operatorname{argsh} x + C$

13) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \arg\operatorname{ch} x + C$

14) $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + C$

15) $\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \arg\operatorname{th} x + C$

Nota: La justificación de la tabla anterior se verifica sin más que derivar los segundos miembros y ver que salen los integrandos correspondientes. Así, por ejemplo, para la numero 15) ya vimos al hablar de las funciónes hiperbólicas que

$$(\arg\operatorname{th} x)' = \frac{1}{1-x^2},$$

por tanto $\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \arg\operatorname{th} x + C.$

De la misma manera, se comprueba con las otras.

Por ejemplo, la integral inmediata 3), $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ porque

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = \frac{1}{n+1}\cdot(n+1)\,x^n = x^n.$$

Algunos ejemplos interesantes

ⓐ La integral de un polinomio es inmediata.

Ej: $\int (4x^5 - 7x^4 + 3x - 1)\,dx = \int 4x^5\,dx - \int 7x^4\,dx + \int 3x\,dx - \int dx =$

$= 4\int x^5\,dx - 7\int x^4\,dx + 3\int x\,dx - \int dx =$

$= 4\frac{x^6}{6} - 7\frac{x^5}{5} + 3\frac{x^2}{2} - x + C$

(b) $\int (3\sqrt{x} - 5x + 4\sqrt[3]{x^2})\,dx =$

$= \int 3\sqrt{x}\,dx - \int 5x\,dx + \int 4\sqrt[3]{x^2}\,dx =$

$= 3\int x^{1/2}dx - 5\int x\,dx + 4\int x^{2/3}dx =$

$= 3\dfrac{x^{1/2+1}}{1/2+1} - 5\dfrac{x^2}{2} + 4\dfrac{x^{2/3+1}}{2/3+1} + C = 3\dfrac{x^{3/2}}{3/2} - 5\dfrac{x^2}{2} + 4\dfrac{x^{5/3}}{5/3} + C$

$= 2x^{3/2} - \dfrac{5}{2}x^2 + \dfrac{12}{5}x^{5/3} + C = 2\sqrt{x^3} - 5/2\,x^2 + \dfrac{12}{5}\sqrt[3]{x^5} + C$

Métodos de integración

(a) Metodo de integración por cambio de variable

(a1) Algunos ejemplos

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{3x-2}$. Nos fijamos en la tabla y vemos que la más se parece es $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$

Haciendo el cambio

$3x-2=t$

Diferenciando $3\,dx = dt$; $dx = \frac{1}{3}dt$

Luego $I = \displaystyle\int \frac{dx}{3x-2} = \int \frac{1/3\,dt}{t} = \frac{1}{3}\int\frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\ln t + C$

Deshaciendo el cambio

$$J = \int \frac{dx}{3x-2} = \frac{1}{3} \ln(3x-2) + c$$

Esta técnica se puede aplicar a las integrales del tipo

$$\int \frac{dx}{ax+b}$$ (Hacemos el cambio $ax+b=t$)

2) Integrales del tipo $\int \frac{dx}{(ax+b)^n}$

Estas se resuelven con el cambio $ax+b=t$

Ej: $I = \int \frac{dx}{(4x+3)^5}$

Haciendo $4x+3=t$. Diferenciando
$4dx = dt$ y de aquí $dx = \frac{1}{4} dt$

Luego $I = \int \frac{\frac{1}{4} dt}{t^5} = \frac{1}{4} \int t^{-5} dt = \frac{1}{4} \frac{t^{-4}}{-4} + c =$

$$= -\frac{1}{16t^4} + c$$

Deshaciendo el cambio

$$I = -\frac{1}{16(4x+3)^4} + c$$

Nota: Las integrales del tipo 1) y 2) son bastante importantes porque, en general, aparecen en las integrales de funciones racionales.

3) Integrales del tipo $\int e^{kx}\,dx$; $\int \cos kx\,dx$; $\int \operatorname{sen} kx\,dx$

Estas integrales se resuelven con el cambio $kx = t$

Ej:

$$I = \int \operatorname{sen} 7x\,dx.$$

Hacemos $7x = t$; y diferenciando $7\,dx = dt$, $dx = \frac{1}{7}dt$

Luego

$$I = \int \frac{1}{7} \operatorname{sen} t\,dt = \frac{1}{7}\int \operatorname{sen} t\,dt = -\frac{1}{7}\cos t + C$$

Deshaciendo el cambio

$$I = -\frac{1}{7}\cos 7x + C.$$

En general, es conveniente recordar que

$$\int e^{kx}\,dx = \frac{1}{k}e^{kx} + C$$

$$\int \cos kx\,dx = \frac{1}{k}\operatorname{sen} kx + C$$

$$\int \operatorname{sen} kx\,dx = -\frac{1}{k}\cos kx + C$$

4) Integrales del tipo $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$. (es decir, la derivada del denominador es el numerador)

Estas se resuelven haciendo el cambio $f(x) = t$.

Diferenciando $f'(x)\,dx = dt$ y teniendo en cuenta que el numerador de nuestra integral es precisamente $f'(x)\,dx$ queda

$$I = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{dt}{t} = \ln t + C$$

Deshaciendo el cambio

$$I = \ln(f(x)) + C.$$

Es decir,
$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln(f(x)) + C.$$

Ej:
$$I = \int tg\,x\,dx = \int \frac{sen\,x}{\cos x}\,dx.$$

Como $(\cos x)' = -sen\,x$ al numerador le falta un signo $-$

Se le ponemos y quitamos y queda

$$I = -\int \frac{-sen\,x}{\cos x}\,dx$$

y ahora $(\cos x)' = -sen\,x$, luego

$$\boxed{I = -\ln(\cos x) + C}$$

Ej: $$I = \int \frac{x}{5x^2+1}\,dx.$$

Como $(5x^2+1)' = 10x$, observamos que al numerador le falta un 10. Se lo ponemos y se lo quitamos

$$I = \frac{1}{10} \int \frac{10x}{5x^2+1}\, dx$$

Ahora $(5x^2+1)' = 10x$, luego

$$I = \frac{1}{10} \ln(5x^2+1) + C$$

5) Otro tipo de integrales que se resuelven por esta técnica.

Ej:

5.1 $\quad I = \int x^2 \sqrt{5x^3+1}\, dx.$

Observamos que $(5x^3+1)' = 15x^2$ y por tanto, si le ponemos un 15 y se lo quitamos queda

$$I = \frac{1}{15} \int 15x^2 \sqrt{5x^3+1}\, dx.$$

Luego haciendo el cambio $\quad 5x^3+1 = t$

$15x^2\,dx = dt$

Luego $I = \frac{1}{15} \int \sqrt{t}\, dt = \frac{1}{15} \int t^{1/2} dt =$

$$= \frac{1}{15} \frac{t^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{45} \sqrt{t^3} + C$$

Deshaciendo el cambio

$$\boxed{I = \frac{2}{45} \sqrt{(5x^3+1)^3} + C}$$

Notar que muchas veces por comodidad y no trabajar con raices cuadradas en la integral, podríamos haber hecho el cambio

$$5x^3+1=t^2$$

y de aquí

$$15x^2\,dt = 2t\,dt$$

Luego

$$I = \frac{1}{15}\int 2t\sqrt{t^2}\,dt =$$

$$= \frac{2}{15}\int t^2\,dt = \frac{2}{15}\,\frac{t^3}{3} + C = \frac{2}{45}t^3 + C$$

y como $5x^3+1=t^2$ de aquí $t=\sqrt{5x^3+1}$ y, por tanto,

$$I = \frac{2}{45}\left(\sqrt{5x^3+1}\right)^3 + C.$$

<u>5.2</u>

$$I = \int \frac{x^3\,dx}{1+x^8}$$

Notar que $I = \int \frac{x^3}{1+(x^4)^2}\,dx$ y $(x^4)' = 4x^3$

Luego poniendo y quitando un 4 queda haciendo el cambio

$$x^4 = t$$
$$4x^3dx = dt$$

$$I = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{1+(x^4)^2}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \frac{1}{4}\operatorname{arctg} t + C$$

y deshaciendo el cambio

$$I = \frac{1}{4}\operatorname{arctg} x^4 + C$$

5.3

$$I = \int \frac{\ln^3 x}{x}\,dx$$

En esta integral notamos que $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ y por tanto el cambio será

$$\ln x = t$$

es decir, $\frac{1}{x}\,dx = dt$

Luego $I = \int t^3\,dt = \frac{t^4}{4} + C$

y deshaciendo el cambio

$$I = \frac{\ln^4 x}{4} + C$$

(6) Integrales del tipo $\int \frac{dx}{a \pm bx^2}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{a \pm bx^2}}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + b}}$

Las integrales del tipo $\int \frac{dx}{a \pm bx^2}$ tienen como modelos $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$ y $\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{argth} x + C$; las del tipo $\int \frac{dx}{\sqrt{a \pm bx^2}}$ tiene como modelos $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsen} x + C$ y $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{argsh} x + C$ y las del tipo $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 - b}}$ tiene como modelo $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{argch} x + C$.

Todas estas integrales se resuelven usando la misma técnica consiste en lo siguiente

$$a \pm b x^2 = a \left(1 \pm \frac{bx^2}{a}\right)$$

$$ax^2 - b = b \left(\frac{ax^2}{b} - 1\right)$$

y luego al término cuadrático se le aplica el cambio de variable igual a t^2.

Ejemplo 1

$$I = \int \frac{dx}{4 + 5x^2}$$

$$4 + 5x^2 = 4 \left(1 + \frac{5x^2}{4}\right)$$

$$I = \int \frac{dx}{4\left(1 + \frac{5x^2}{4}\right)} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{1 + \frac{5x^2}{4}}$$

Haciendo $\frac{5x^2}{4} = t^2$, y tomando raíces cuadradas,

$$\frac{\sqrt{5}}{2} x = t \qquad (*)$$

Diferenciando $\frac{\sqrt{5}}{2} dx = dt$ y de aquí, $dx = \frac{2}{\sqrt{5}} dt$

luego

$$I = \frac{1}{4} \int \frac{\frac{2}{\sqrt{5}} dt}{1+t^2} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \operatorname{arctg} t + C$$

Deshaciendo el cambio, teniendo en cuenta (*) queda

$$\boxed{I = \frac{1}{2\sqrt{5}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{5}}{2} x\right) + C}$$

Ejemplo 2

$$I = \int \frac{dx}{3-2x^2}$$

$$3 - 2x^2 = 3\left(1 - \frac{2}{3}x^2\right)$$ luego

$$I = \int \frac{dx}{3\left(1 - \frac{2}{3}x^2\right)} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{1 - \frac{2}{3}x^2}$$

Haciendo el cambio $\frac{2}{3}x^2 = t^2$ y tomando raíces cuadradas

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} x = t$$

Diferenciando

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,dx = dt \quad \text{y de aquí} \quad dx = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\,dt$$

Luego $I = \frac{1}{3}\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\,dt}{1-t^2} = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\,\arg\mathrm{th}\,t + c$

Deshaciendo el cambio

$$\boxed{I = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\,\arg\mathrm{th}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x\right) + c}$$

Ejemplo 3

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{7+x^2}}$$

Haciendo $7+x^2 = 7\left(1+\frac{1}{7}x^2\right)$ queda

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{7\left(1+\frac{1}{7}x^2\right)}} = \frac{1}{\sqrt{7}}\int \frac{dx}{\sqrt{1+\frac{1}{7}x^2}}$$

Usando el cambio de variables $\frac{1}{7}x^2 = t^2$ y tomando raíces cuadradas

$$\frac{1}{\sqrt{7}}x = t$$

Diferenciando $\frac{1}{\sqrt{7}}\,dx = dt$ y, de aquí, $dx = \sqrt{7}\,dt$

Luego $I = \frac{1}{\sqrt{7}}\int \frac{\sqrt{7}\,dt}{\sqrt{1+t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \arg\mathrm{sh}\,t + c$

Y deshaciendo el cambio

$$\boxed{I = \arg\mathrm{sh}\left(\frac{1}{\sqrt{7}}x\right) + c}$$

⑦ Integrales del tipo

$$\int \frac{Mx+N}{a \pm bx^2}\,dx \;;\quad \int \frac{Mx+N}{\sqrt{a \pm bx^2}}\,dx \;;\quad \int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2-b}}\,dx$$

En estas integrales, lo primero que hay que hacer es adaptar la derivada de $(a \pm bx^2)$ o (ax^2-b) al numerador y luego nos sale dos integrales, una fácil de resolver por un cambio de variable y la otra del tipo ⑥

Ej:

$$I = \int \frac{2x+7}{\sqrt{3x^2-1}}\,dx$$

Nos fijamos que $(3x^2-1)' = 6x$ y lo que tenemos que hacer es que en el numerador aparezca $6x$. Primero convertimos el "2" que acompaña a la x en el numerador en un "1" y luego multiplicamos y dividimos por 6.

Es decir

$$I = \int \frac{2(x+7/2)}{\sqrt{3x^2-1}}\,dx = 2\int \frac{(x+7/2)}{\sqrt{3x^2-1}}\,dx =$$

$$= \frac{2}{6}\int \frac{6(x+7/2)}{\sqrt{3x^2-1}}\,dx = \frac{1}{3}\left[\int \frac{6x}{\sqrt{3x^2-1}}\,dx + \int \frac{6 \cdot 7/2}{\sqrt{3x^2-1}}\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\int \frac{6x}{\sqrt{3x^2-1}}\,dx + \int \frac{21}{\sqrt{3x^2-1}}\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\int \frac{6x}{\sqrt{3x^2-1}}\,dx + 21\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-1}}\right] \quad (1)$$

Llamamos $I_1 = \int \frac{6x}{\sqrt{3x^2-1}}\,dx$ y $I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-1}}$

$$I_1 = \int \frac{6x}{\sqrt{3x^2-1}}\,dx.$$

Como $(3x^2-1)' = 6x$, hagamos el cambio $t = \sqrt{3x^2-1}$ y de aquí

$$3x^2-1 = t^2$$

Diferenciando $6x\,dx = 2t\,dt$

Luego

$$I_1 = \int \frac{2t\,dt}{\sqrt{t^2}} = \int 2\frac{t\,dt}{t} = 2\int dt = 2t = 2\sqrt{3x^2-1}$$

Luego $\boxed{I_1 = 2\sqrt{3x^2-1}}$

$I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-1}}$. Esta integral tiene como modelo

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \arg ch\, x$, luego haciendo

$$3x^2 = t^2$$

~~Diferenciando~~ ~~o sea~~ $\sqrt{3}\;x = t$

y, de aquí,

Diferenciando

$$\sqrt{3}\, dx = dt \quad ; \quad dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\, dt$$

Luego $\quad I_2 = \displaystyle\int \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}\, dt}{\sqrt{t^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arg\,ch} t = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arg\,ch}(\sqrt{3}\, x)$

Por tanto, llevando I_1 y I_2 a (1) queda

$$I = \frac{1}{3}\left[2\sqrt{3x^2-1} + 21 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arg\,ch}(\sqrt{3}\, x)\right] + C$$

$$I = \frac{2}{3}\sqrt{3x^2-1} + \frac{21}{3\sqrt{3}} \operatorname{arg\,ch}(\sqrt{3}\, x) + C$$

Ej: $\quad I = \displaystyle\int \frac{2x-3}{5+3x^2}\, dx$

Como $(5+3x^2)' = 6x$ entonces

$$I = \int \frac{2x-3}{5+3x^2}\, dx = \int \frac{2\left(x-\frac{3}{2}\right) dx}{5+3x^2} = 2 \int \frac{x-\frac{3}{2}}{5+3x^2}\, dx =$$

$$= \frac{2}{6} \int \frac{6\left(x-\frac{3}{2}\right)}{5+3x^2}\, dx = \frac{1}{3}\left[\int \frac{6x}{5+3x^2}\, dx - \int \frac{9}{5+3x^2}\, dx\right] \quad (\alpha)$$

Sea $I_1 = \int \frac{6x}{5+3x^2}\,dx$ y $I_2 = \int \frac{dx}{5+3x^2}$

I_1 es fácil porque la derivada del denominador es el numerador

luego

$$I_1 = \int \frac{6x}{5+3x^2}\,dx = \ln(5+3x^2)$$

Para $I_2 = \int \frac{dx}{5+3x^2}$ que tiene como modelo $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg}$

hacemos lo habitual

$$I_2 = \int \frac{dx}{5+3x^2} = \int \frac{dx}{5\left(1+\frac{3x^2}{5}\right)} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{1+\frac{3x^2}{5}}$$

Haciendo $\frac{3x^2}{5} = t^2$ y de aquí $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}x = t$

Diferenciando

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\,dx = dt$$ y de aquí $dx = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\,dt$

Luego

$$I_2 = \frac{1}{5}\int \frac{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\,dt}{1+t^2} = \frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{3}}\int \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{3}}\operatorname{arctg} t = \frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}x\right)$$

Luego $I = \frac{1}{3}\left[\ln(5+3x^2) - \frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}x\right)\right] + C$

⑧ Integrales del tipo

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} \quad ; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Este tipo de integrales se resuelve por el llamado método de "completar cuadrados". Y consiste en lo siguiente:

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

Ahora bien, tomando como modelos las formulas

$$(x+p)^2 = x^2+2px+p^2 \qquad (1)$$

$$(x-p)^2 = x^2-2px+p^2 \qquad (2)$$

entonces, dependiendo si $\frac{b}{a}$ es positivo o negativo usaremos (1) o (2), es decir

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a} = x^2+2\cdot\frac{b}{2\cdot a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a} =$$

$$= \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}$$

Ej: Completar cuadrados

$$x^2-5x+7$$

Sol:

$$x^2-5x+7 = x^2-2\cdot\frac{5}{2}x+\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2+7 =$$

$$= \left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}+7 = \left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

Ej: Completar cuadrado

$$x^2 + x + 1$$

Sol:

$$x^2 + x + 1 = x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 =$$

$$= (x + 1/2)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

Hagamos ahora algunos ejemplos con integrales de este tipo.

Ej: Resolver $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 - 5x + 1}}$

Sol:

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 - 5x + 1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3(x^2 - 5/3 x + 1/3)}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 5/3 x + 1/3}}$$

Completemos cuadrado $x^2 - 5/3 x + \frac{1}{3}$

$$x^2 - 5/3 x + 1/3 = x^2 - 2 \cdot \frac{5}{6} x + \left(\frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \frac{1}{3} =$$

$$= \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{25}{36} + \frac{1}{3} =$$

$$= \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{13}{36}$$

Luego

$$I = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{(x-\frac{5}{6})^2 - \frac{13}{36}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{13}{36}\left[\frac{36}{13}(x-\frac{5}{6})^2 - 1\right]}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{13}}{6}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{36}{13}(x-\frac{5}{6})^2 - 1}} =$$

$$= \frac{6}{\sqrt{39}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{36}{13}(x-\frac{5}{6})^2 - 1}}$$

y esta integral tiene como modelo $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \arg \operatorname{ch} x$

Luego haciendo

$$\frac{36}{13}(x-\frac{5}{6})^2 = t^2$$

Tomando raíces cuadradas

$$\frac{6}{\sqrt{13}}(x-\frac{5}{6}) = t$$

Diferenciando

$\frac{6}{\sqrt{13}} dx = dt$ y de aquí $dx = \frac{\sqrt{13}}{6} dt$

luego

$$\boxed{I} = \frac{6}{\sqrt{39}} \int \frac{\frac{\sqrt{13}}{6} dt}{\sqrt{t^2-1}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{argch} t + C =$$

$$\boxed{= \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{argch}\left(\frac{6}{\sqrt{13}}\left(x - \frac{5}{6}\right)\right) + C}$$