3. ESPACIOS VECTORIALES Y APLICACIONES LINEALES

INTRODUCCIÓN TEÓRICA

1. ESPACIOS VECTORIALES

Sea K un cuerpo conmutativo con leyes suma y producto a cuyos elementos llamaremos escalares. Sea E un conjunto a cuyos elementos los llamaremos vectores, denotándolos $\overline{x}$, $\overline{y}$, etc.

E es un espacio vectorial sobre el cuerpo K si se verifica:

Existe una ley de composición interna en E, para la cuál E tiene estructura de grupo abeliano (denotaremos esta ley por suma y al elemento neutro por el vector $\overline{0}$), debiendo por tanto verificar:

$\overline{x}+\overline{y}\in E$, $\forall \overline{x}, \ \overline{y}\in E$ ($+$ es una ley de composición interna)

$\left(\overline{x}+\overline{y}\right)+\overline{z}=\overline{x}+\left(\overline{y}+\overline{z}\right), \ \forall \overline{x}, \ \overline{y},\overline{z}\in E$ (propiedad asociativa)

$\overline{x}+\overline{y}=\overline{y}+\overline{x}$, $\forall \overline{x}, \ \overline{y}\in E$ (propiedad conmutativa)

$\forall \overline{x}\in E \Rightarrow \exists \ \overline{0}\in E : \overline{x}+\overline{0}=\overline{x}$ (el $\overline{0}$ es el elemento neutro).

$\forall \overline{x}\in E \Rightarrow \exists - \overline{x}\in E : \overline{x}+\left(-\overline{x}\right)=\overline{0}$ (existencia de elemento opuesto)

Existe sobre E una ley de composición externa, cuyo dominio de operadores es el cuerpo K, con las siguientes propiedades $(\forall \lambda,\mu\in K, \ \forall \overline{x},\overline{y}\in E)$:

(a) Distributiva respecto a la suma de escalares: $(\lambda+\mu)\overline{x}=\lambda\overline{x}+\mu\overline{x}$

(b) Distributiva respecto a la suma de vectores: $\lambda\left(\overline{x}+\overline{y}\right)=\lambda\overline{x}+\lambda\overline{y}$

(c) Asociativa respecto a los escalares: $\lambda\left(\mu\overline{x}\right)=(\lambda\mu)\overline{x}$

(d) Identidad: $1\cdot\overline{x}=\mathbf{I}_E=\overline{x}$.

NOTA: Si no se hace mención contraria, K será el cuerpo de los números reales con las operaciones usuales, suma y producto en los números reales.

2. PROPIEDADES DE UN ESPACIO VECTORIAL

Las principales propiedades de un espacio vectorial son las siguientes:

$\forall\overline{x}\in E: 0\cdot\overline{x}=\overline{0}$

$\forall\ \lambda\in K:\ \lambda\cdot\overline{0}=\overline{0}$

Si $\lambda\cdot\overline{x}=\overline{0}\Rightarrow\ \lambda=0$ ó $\overline{x}=\overline{0}$

$\forall\ \lambda\in K,\ \forall\overline{x}\in E: (-\lambda)\overline{x}=-\lambda\overline{x}=\lambda\left(-\overline{x}\right)$

2.1. Sistema de Vectores

Un sistema de vectores es un conjunto (trabajaremos siempre con un número finito) de vectores, lo representaremos por: $S=\{\overline{x}_1,\overline{x}_2,\ldots,\overline{x}_n\}$.

2.2. Combinación Lineal

Un vector $\overline{x}\in E$ es una combinación lineal de los vectores del sistema S si existen n escalares $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\in K$ tal que:

$\overline{x} = \lambda_1 \overline{x}_1 + \lambda_2 \overline{x}_2 + \ldots + \lambda_n \overline{x}_n$. Los escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son los ”coeficientes” de la combinación lineal.

2.3. Sistemas linealmente dependientes o independientes

Un sistema $S = \{\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n\}$ de vectores es linealmente independientes, si la condición $\overline{x} = \lambda_1 \overline{x}_1 + \lambda_2 \overline{x}_2 + \ldots + \lambda_n \overline{x}_n = \overline{0}$, implica necesariamente que: $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

En caso contrario, el sistema S es linealmente dependiente.

2.4. Proposición.

En un sistema linealmente independiente S la única posibilidad de conseguir una combinación lineal de vectores de S igualada al vector $\overline{0}$ es que todos los coeficientes de dicha combinación deben ser 0, no siendo así si el sistema linealmente dependiente.

3.1. V(S)

Si S es un sistema de vectores, $\langle S \rangle$ denotará el conjunto de vectores que son combinación lineal de vectores de S.

3. Subespacios Vectoriales. Operaciones con Subespacios

3.1. Subespacio vectorial

Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo K. Todo subconjunto V de E, que tenga estructura de espacio vectorial con las mismas leyes que E, diremos que es un subespacio vectorial de E.

3.2. Propiedad

Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo K y sea V un subconjunto de E, entonces V es un subespacio vectorial de E si y sólo si:

$\overline{x}+\overline{y}\in V, \quad \forall \overline{x},\overline{y}\in V$.

$\lambda\overline{x}\in V$, $\forall \overline{x}\in V$ y $\forall \lambda\in K$

Esta propiedad también se podría enunciar de la siguiente forma:

3.3. Propiedad:

Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo K y sea V un subconjunto de E, entonces V es un subespacio vectorial de E si y sólo si:

$\forall \lambda,\mu\in K, \forall \overline{x},\overline{y}\in V : \lambda\overline{x}+\mu\overline{y}\in V$

3.4. Intersección de Subespacios vectoriales

Dados dos subespacios vectoriales V_1 y V_2 de E se define su intersección como:

$V_1 \cap V_2 = \left\{\overline{x}\in E / \overline{x}\in V_1 \text{ y } \overline{x}\in V_2\right\}$

El conjunto $V_1 \cap V_2$ es un subespacio vectorial de E.

3.5. Subespacios Disjuntos

Dos subespacios vectoriales V_1 y V_2 son disjuntos si y sólo si $V_1 \cap V_2 = \left\{\overline{0}\right\}$.

3.6. Suma de subespacios vectoriales

Dados dos subespacios vectoriales V_1 y V_2 de E, se define su suma:

$V_1 + V_2 = \left\{ \overline{x} \in E / \overline{x} = \overline{x}_1 + \overline{x}_2, \text{ con } \overline{x}_1 \in V_1 \text{ y } \overline{x}_2 \in V_2 \right\}$

$V_1 + V_2$ es un subespacio vectorial.

Si $V_1 \cap V_2 = \left\{ \overline{0} \right\}$, la suma se llama directa y se denota por $V_1 \oplus V_2$.

Si $V_1 \oplus V_2 = E$, V_1 y V_2 se llaman subespacios suplementarios.

4.7. Propiedad

Si un espacio vectorial E es suma directa de dos subespacios V_1 y V_2, todo vector de E se puede expresar de forma única como suma de un vector de V_1 y otro de V_2.

Importante: La unión de subespacios vectoriales no es en general subespacio vectorial.

4. Bases de un Espacio Vectorial. Dimensión

4.1. Base de un espacio vectorial

Una base de un espacio vectorial E es cualquier sistema S de vectores libres que sean generadores de E.

4.2. Teorema

Todo espacio vectorial admite al menos una base

NOTA:

Un espacio que admite un sistema finito de generadores se dice que es de tipo finito o finitamente generado.

4.3. Teorema

En un espacio vectorial de tipo finito todas las bases son finitas y tienen el mismo número de elementos.

4.4. Dimensión

Al número de elementos de una base de un espacio vectorial de tipo finito, se le llama dimensión del espacio vectorial.

4.5. Teorema

Sea V un espacio vectorial de dimensión n y $B=\{\overline{v}_1,\overline{v}_2,\cdots,\overline{v}_n\}$ una base suya. Si divido B en dos sistemas de vectores disjuntos $B=B_1\cup B_2$, entonces se cumple que $\langle B_1\rangle\oplus\langle B_2\rangle=V$. Es decir, los subespacios generados por los sistemas B_1 y B_2 son suplementarios.

4.6. Coordenadas de un vector en una base

Sea $B=\{\overline{e}_1,\overline{e}_2,\ldots,\overline{e}_n\}$ una base del espacio vectorial E y $\overline{x}\in E$. Si $\overline{x}=x_1\overline{e}_1+x_2\overline{e}_2+\ldots+x_n\overline{e}_n$ se dice que $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ son las coordenadas del vector $\overline{x}$ en la base B.

Las coordenadas de un vector respecto de una base son únicas.

NOTA: Un vector tiene tantas coordenadas como la dimensión del mayor espacio vectorial al que pertenece.

En el espacio vectorial real $\mathbb{R}^n$ la base $B=\{\overline{e}_1,\overline{e}_2,\ldots,\overline{e}_n\}$ con $\overline{e}_1^{\,t}=(1 0\ldots 0)$, $\overline{e}_2^{\,t}=(0\ 1\ 0\ldots 0),\ldots,\ \overline{e}_n^{\,t}=(0\ 0\ldots 0\ 1)$ la llamaremos base canónica.

4.7. Rango de un sistema de vectores.

El rango de un sistema S de vectores es la dimensión del subespacio $\langle S\rangle$ engendrado por S. Es decir, es el máximo número de vectores linealmente independientes de S.

Otro procedimiento para calcular el rango de un sistema de vectores S es construir una matriz situando las coordenadas de cada uno de los vectores de S en columnas, es decir, si $S=\left\{\overline{x}_1,\overline{x}_2,\ldots,\overline{x}_p\right\}$, la matriz asociada es

$$A=\left[\overline{x}_1\ \overline{x}_2\ldots\overline{x}_p\right],\ \text{siendo}\ \overline{x}_i=\begin{pmatrix} x_i^1 \\ x_i^2 \\ \vdots \\ x_i^n \end{pmatrix},\ \forall i=1,2,\ldots,p\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dim(\langle S\rangle)=rang(S)=rang(A)$$

5. RELACIÓN ENTRE DIMENSIONES

Si V es un subespacio vectorial de E, $\dim(V)\leq\dim(E)$.

Si $V=\left\{\overline{0}\right\}$, $\dim(V)=0$.

Si V_1 y V_2 son subespacios vectoriales de V se tiene que:

$$\dim\left(V_1+V_2\right)=\dim\left(V_1\right)+\dim\left(V_2\right)-\dim\left(V_1\cap V_2\right)\ \equiv$$

$\equiv$ Fórmula de Grassman

En particular se tiene que si V_1 es suma directa con V_2 :

$$\dim\left(V_1\oplus V_2\right)=\dim\left(V_1\right)+\dim\left(V_2\right)$$

6. APLICACIONES LINEALES

6.1. Aplicación Lineal

Sean E y F dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K y $f : E \longrightarrow F$ una aplicación.

f es una aplicación lineal si verifica:

$$f\left(\overline{x}+\overline{y}\right)= f\left(\overline{x}\right)+ f\left(\overline{y}\right), \forall\ \overline{x},\overline{y}\in E$$

$$f\left(\lambda\,\overline{x}\right)=\lambda\, f\left(\overline{x}\right),\ \forall\lambda\in K,\ \forall\ \overline{x}\in E$$

6.2. Propiedad

f es un homomorfismo o aplicación lineal si y sólo si:

$$f\left(\lambda\,\overline{x}+\mu\,\overline{y}\right)=\lambda\, f\left(\overline{x}\right)+\mu\, f\left(\overline{y}\right),\ \forall\lambda,\mu\in K,\ \forall\overline{x},\overline{y}\in E$$

6.3. Propiedades de las Aplicaciones Lineales

Sea $f : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal entre los espacios vectoriales E y F, entonces:

$$f\left(\overline{0}\right)=\overline{0}$$

$$\forall\overline{x}\in E,\ f(-\overline{x})=-f(\overline{x})$$

Si V es un espacio vectorial de E, entonces $f(V)$ es un subespacio vectorial de F. En particular, $f(E)$ recibe el nombre de subespacio imagen de f. Se suele denotar por $Im(f)$.

Si S es un sistema de generadores de un subespacio vectorial V de E, entonces $f(S)$ es un sistema de generadores del subespacio vectorial

$f(V)$. Por lo tanto, f es sobreyectiva si y sólo si, la imagen de una base B de E, $f(B)$, es un sistema generador de F.

Si V es un subespacio de F, $f^{-1}(V)$ es un subespacio de E.

7. NOMENCLATURA

Sea $f : E \longrightarrow F$ un homomorfismo:

Si $E = F$, a f se le denomina endomorfismo.

Si f es inyectivo, se denomina monomorfismo.

Si f es biyectivo recibe el nombre de isomorfismo

Un endomorfismo biyectivo se llama automorfismo.

7.1. Núcleo

Se llama núcleo de una aplicación lineal f, designándose $Ker(f)$ ó $N(f)$, al siguiente subconjunto de E:

$Ker(f) = \{\overline{x} \in E \ / \ f(\overline{x}) = \overline{0}\}$.

7.2. Propiedades del Núcleo

Las principales propiedades del núcleo son las siguientes:

$Ker(f)$ es un subespacio vectorial de E.

f es un homomorfismo inyectivo si y sólo si $Ker(f) = \{\overline{0}\}$

$Ker(f) = \{\overline{0}\}$ si y sólo si la imagen de cualquier sistema libre de E es un sistema libre de F.

7.3. Propiedad.

Si la restricción de f a un subespacio V de E es inyectivo y S es un sistema libre de V entonces $f(S)$ es un sistema libre del subespacio $f(V) \subset F$.

7.4. Rango de una aplicación lineal

Una aplicación lineal queda determinada conociendo las imágenes de los vectores de una base de E.

Si $B = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n\}$ es una base de E y conocemos $\{f(\overline{e}_1), f(\overline{e}_2), \ldots, f(\overline{e}_n)\}$, vectores de F, la imagen de cualquier vector $\overline{x}$ de coordenadas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en la base B será:

$$f(\overline{x}) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \overline{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \; f(\overline{e}_i).$$

IMPORTANTE: Podría parecer que no siempre se expresa el homomorfismo por medio de las imágenes de una base, pero dicha información siempre se puede obtener y esto será de utilidad para enlazar homomorfismos y matrices como veremos a continuación.

8. MATRIZ ASOCIADA A UNA APLICACIÓN LINEAL

Sean E y F dos espacios vectoriales de dimensiones n y m, $B = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n\}$ una base de E, $B'_F = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_m\}$ una base de F.

Sea $\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{e}_i$, $\quad f(\overline{x}) \overset{(1)}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i \; f(\overline{e}_i) \overset{(2)}{=} \sum_{j=1}^{m} y_j \overline{u}_j$. Si:

$$\left.\begin{array}{rlllll} f(\overline{e}_1) = & a_{11}\overline{u}_1 & +a_{21}\overline{u}_2 & +\ldots+ & a_{m1}\overline{u}_m \\ f(\overline{e}_2) = & a_{12}\overline{u}_1 & +a_{22}\overline{u}_2 & +\ldots+ & a_{m2}\overline{u}_m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f(\overline{e}_n) = & a_{1n}\overline{u}_1 & +a_{2n}\overline{u}_2 & +\ldots+ & a_{mn}\overline{u}_m \end{array}\right\}.$$

(1) Por las propiedades de aplicación lineal.

(2) Ya que $f(\overline{x})$ es un vector de F se podrá poner como combinación lineal de la base B_F'.

Se tiene que: $\overline{y} = P\overline{x}$, siendo:

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \overline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

donde:

$\overline{y}$ es la matriz columna que representa las coordenadas de $f(\overline{x})$ en la base B_F';

$\overline{x}$ es la matriz columna que representa las coordenadas de $\overline{x}$ en la base B;

P es la matriz del homomorfismo en las bases B y B_F' (o con respecto a las bases B y B_F').

Las columnas de la matriz A son las coordenadas de los vectores $f(\overline{e}_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ respecto de la base B_F'. P es una matriz de orden $m \times n$.

Fijadas las bases B y B_F', la matriz del homomorfismo es única.

NOTA: Si utilizamos matrices fila para las componentes de $\overline{x}$ y de $f(\overline{x})$, la matriz del homomorfismo sería la traspuesta de la obtenida anteriormente.