TEMA 4

INTEGRALES TRIPLES

INTEGRAL TRIPLE

Definición

Sea D una región cerrada y acotada del espacio IR^3.
Sea $f: IR^3 \to IR$ una función definida sobre la región D.
Los pasos que conducen a la definición de integral triple son semejantes a los que conducen a la definición de integral doble (Tema 1) y se resumirían así:

1. Consideramos una red tridimensional de planos que contenga a D siendo D_i $i = 1,\dots,n$ subregiones de la red, de volúmenes respectivos ΔV_i, totalmente contenidas en R.
2. Escogemos (x_i, y_i, z_i) punto arbitrario de D_i para $i = 1,\dots,n$.
3. Calculamos la suma $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta V_i$
4. Consideramos redes cada vez más finas que contengan a D, de modo que las dimensiones de cada subregión tiendan a 0, y el número de subregiones contenidas en D sea cada vez mayor. Entonces definimos:

$$\iiint_D f(x, y, z)\, dV := \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta V_i$$

Funciones integrables

La función escalar de tres variables f definida en la región D cerrada y acotada se dice que es integrable sobre D si y sólo si verifica la existencia del límite anterior y su valor es finito. El valor del límite recibe el nombre de integral triple de f sobre D.

Condición suficiente de integrabilidad

Si la función f es continua en la región D cerrada y acotada entonces f es integrable sobre D.

Propiedades de la integral triple

En coordenadas rectangulares cartesianas $dV = dx\, dy\, dz$.

(1) $\iiint\limits_D k\ f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = k \iiint\limits_D f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \qquad k \in \mathbb{R}$

(2) $\iiint\limits_D [f(x, y, z) + g(x, y, z)]\, dx\, dy\, dz =$

$$= \iiint\limits_D f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz + \iiint\limits_D g(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

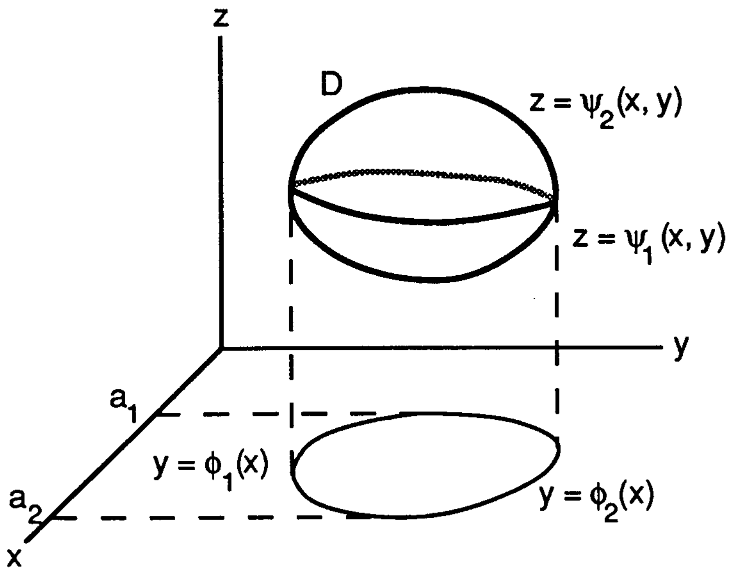
(3) Si $D = D_1 \cup D_2$ donde $D_1 \cap D_2$ es a lo sumo una superficie,

$$\iiint\limits_D f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint\limits_{D_1} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz + \iiint\limits_{D_2} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

<u>Reducción de integrales triples a integrales iteradas</u>

Supongamos que la región de integración D esta limitada inferiormente por la gráfica de $z = \psi_1(x, y)$ y superiormente por la gráfica de $z = \psi_2(x, y)$, de manera que en el plano xy la proyección de D viene dada por:

$$a_1 \leq x \leq a_2$$
$$\phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)$$



$$a_1 \leq x \leq a_2$$
$$\phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)$$
$$\psi_1(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y)$$

entonces:

$$\iiint\limits_D f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_{a_1}^{a_2} \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \left(\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right) dy \right) dx$$

Las dos últimas integraciones indican el plano coordenado sobre el que se proyecta el dominio D.

Para efectuar una integral triple tendremos 3! = 6 posibilidades en cuanto al orden de integración se refiere.

Interpretación y aplicaciones de la integral triple

(1) Si $f(x, y, z) = 1$ en D, entonces: $\text{Volumen}(D) = \iiint_D 1 \, dx\,dy\,dz$

(2) Si D es un sólido cuya masa total está distribuida en forma conocida siguiendo una función de densidad $\mu = \mu(x, y, z)$, entonces:

$$\text{Masa de } D = M(D) = \iiint_D \mu(x, y, z)\, dx\,dy\,dz$$

(3) Las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ del centro de masas del sólido D son:

$$\bar{x} = \frac{1}{M(D)} \iiint_D x\,\mu(x, y, z)\, dx\,dy\,dz \qquad \bar{y} = \frac{1}{M(D)} \iiint_D y\,\mu(x, y, z)\, dx\,dy\,dz$$

$$\bar{z} = \frac{1}{M(D)} \iiint_D z\,\mu(x, y, z)\, dx\,dy\,dz$$

(4) El momento de inercia del sólido D respecto a una recta r resulta ser:

$$I_r = \iiint_D d^2(x, y, z)\ \mu(x, y, z)\, dx\,dy\,dz$$

donde $d(x, y, z)$ denota la distancia del punto (x, y, z) a la recta r.

Cambio de variable

Consideremos el cambio de variable dado por la aplicación:

$$\left.\begin{array}{l} x = X(u, v, w) \\ y = Y(u, v, w) \\ z = Z(u, v, w) \end{array}\right\}$$

siendo D' la región del espacio uvw que se aplica en la región D del espacio xyz.

Si se cumplen las condiciones siguientes:

- Las funciones $X, Y, Z, \partial X/\partial u, \partial X/\partial v, \partial X/\partial w, \partial Y/\partial u, \partial Y/\partial v, \partial Y/\partial w, \partial Z/\partial u, \partial Z/\partial v, \partial Z/\partial w$ son continuas en D'.
- La aplicación de D' sobre D es biyectiva.
- El jacobiano de la aplicación $J(u, v, w) \neq 0$.

entonces:

$$\iiint_D f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz =$$

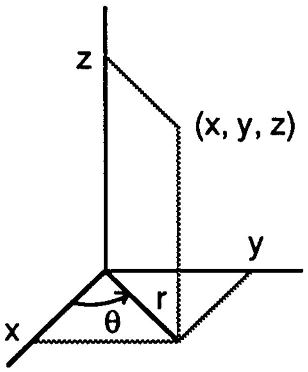
$$= \iiint_{D'} f(X(u, v, w), Y(u, v, w), Z(u, v, w))\ |J(u, v, w)|\ du\, dv\, dw$$

Cambios de variable usuales

(1) Coordenadas cilíndricas

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{array}\right\}$$

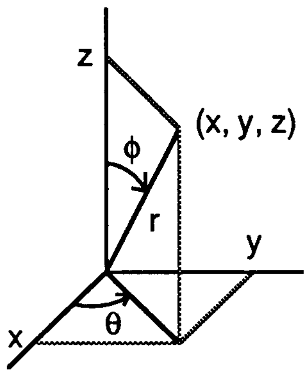
$$J(r, \theta, z) = r$$



(2) Coordenadas esféricas

$$\left.\begin{array}{l} x = r\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = r\cos\phi \end{array}\right\}$$

$$J(r, \phi, \theta) = r^2\,\mathrm{sen}\,\phi$$



TEOREMA DE LA DIVERGENCIA

Divergencia de un campo vectorial

Para el campo vectorial $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$(x, y, z) \to (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$

se define la divergencia de F como el siguiente campo escalar:

$$\mathrm{div}\, F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

Teorema de la divergencia

Sea $F: IR^3 \to IR^3$ un campo vectorial cuyas componentes sean funciones continuas con primeras derivadas parciales continuas en un dominio del espacio que contenga a la región D cerrada y acotada.
Sea S, frontera de la región D, una superficie regular a trozos y n vector normal exterior a S.
Entonces:

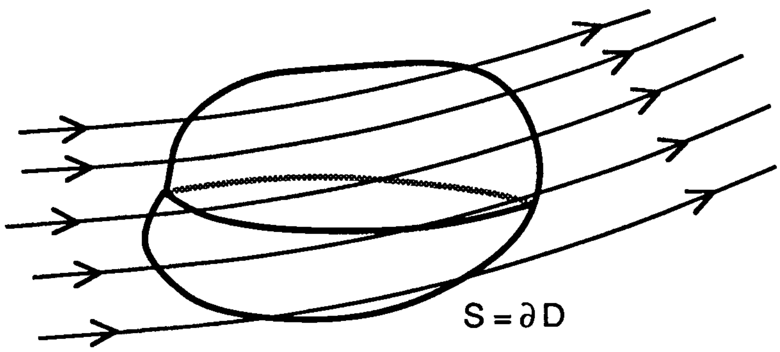
$$\iint_S F \cdot n \; dS = \iiint_D \operatorname{div} F \; dx\, dy\, dz$$

o análogamente:

$$\iint_S F_1\, dy \wedge dz + F_2\, dz \wedge dx + F_3\, dx \wedge dy = \iiint_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz$$

Interpretación del teorema

La integral de superficie de $F \cdot n$ se interpreta como el flujo neto que atraviesa la superficie cerrada S en dirección de la normal exterior; este valor es igual a la integral triple sobre la región D del campo escalar div F, que se interpreta como el flujo que se genera en el interior de S.



TEMA 4. PROBLEMAS

4.1 Calcular las siguientes integrales triples:

(a) $\iiint_D xy^2z^2 \, dx\, dy\, dz$

D sólido limitado por la superficie $z = xy$ y los planos $y = x$, $x = 1$, $z = 0$

(b) $\iiint_D (1 + x + y + z)^{-3} \, dx\, dy\, dz$

D sólido limitado por el plano $x + y + z = 1$ y los planos coordenados.

(c) $\iiint_D dx\, dy\, dz$

D sólido limitado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$, el plano $x + y = 1$, y los planos de coordenadas.

4.2 Calcular las integrales triples que se indican:

(a) $\iiint_D xyz \, dx\, dy\, dz$

$D = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ z \geq 0 \}$

(b) $\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dx\, dy\, dz$

$D = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x^2 + y^2 \leq z^2, \ 0 \leq z \leq 1 \}$

4.3 Calcular las siguientes integrales triples empleando, según convenga, un cambio a coordenadas cilíndricas o esféricas.

(a) $\iiint_D (x^2 + y^2) \, dx\, dy\, dz$

D sólido limitado por las superficies $z = 2$ y $x^2 + y^2 = 2z$.

(b) $\iiint_D z \, dx\, dy\, dz$

D esfera de centro el origen y radio a.

(c) $\iiint_D dx\, dy\, dz$

D sólido limitado entre dos esferas concéntricas de radios respectivos a y b $(b > a > 0)$.

4.4 Calcular el volumen del sólido limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y los planos $z = 0$, $z = 4$.

4.5 Calcular el volumen del sólido limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y los planos $z = 2 - x$, $z = 0$.

4.6 Calcular el volumen del sólido limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y los planos $z = 0$, $x + y + z = 2$.

4.7 Calcular el volumen comprendido entre las superficies $z = 2 - x^2 - y^2$ y $z = 1/2$.

4.8 Calcular el volumen del sólido limitado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

4.9 Calcular el volumen del cuerpo limitado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el cono $z = 2 - (x^2 + y^2)^{1/2}$.

4.10 Calcular el volumen del cuerpo limitado por el cono $z^2 = x^2 + y^2$ y la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z \geq 0$.

4.11 Calcular el volumen común a los interiores de las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$.

4.12 Calcular el volumen de la región del espacio limitada por el paraboloide $z + 1 = x^2 + y^2$, el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y el plano $z = - 3$.

4.13 Calcular el volumen del cuerpo limitado inferiormente por el paraboloide $x^2 + y^2 = 4z$ y superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 5$.

4.14 Calcular el volumen del sólido limitado por el plano $z = 0$, el cilindro circular $x^2 + y^2 = 2x$ y el semicono $z^2 = x^2 + y^2$, $z \geq 0$.

4.15 Calcular el volumen del sólido que es el interior del cilindro $x^2 + y^2 = x$ limitado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

4.16 Calcular el volumen del sólido limitado por el cilindro parabólico $2y^2 = x$ y los planos $z = 0$, $x + 2y + z = 4$.

4.17 Calcular el volumen del recinto del espacio limitado por los planos $z = 1/5$, $z = 4/5$ y las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$.

4.18 Calcular el volumen del sólido limitado por las superficies $z^2 = x^2 + y^2$, $2z = x^2 + y^2$, $z = 1$, $z = 1/2$.

4.19 Probar que el momento de inercia de una bola esférica maciza de densidad constante respecto a uno cualquiera de sus diámetros es $2/5\ M\ R^2$, donde M denota la masa y R el radio de la bola.

4.20 Calcular la divergencia de los siguientes campos vectoriales:

(a) $F(x, y, z) = (x^2, xyz, yz^2)$

(b) $F(x, y, z) = (y \ln x, x \ln y, xy \ln z)$

(c) $F(x, y, z) = (x^2, \operatorname{sen}(xy), yze^x)$

(d) $F(x, y, z) = (e^{xy} \operatorname{sen} z, e^{xz} \operatorname{sen} y, e^{yz} \cos x)$

(e) $F(x, y, z) = (x^2 - y^2, y^2 - z^2, x^2 - z^2)$

4.21 Para el campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuyas componentes sean funciones continuas con derivadas parciales de primer y segundo orden continuas, demostrar que:

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0$$

4.22 Empleando el teorema de la divergencia, calcular las integrales de superficie de los campos vectoriales F sobre las superficies S que se indican:

(a) $F(x, y, z) = (yz, xz, xy)$ $\quad S \equiv$ cubo con centro el origen y aristas de longitud 2.

(b) $F(x, y, z) = (x - y, y - z, x - y)$ $\quad S \equiv$ frontera de $[0, 1]^3$.

(c) $\displaystyle\iint_S (x + y)\, dy \wedge dz + (y + z)\, dz \wedge dx + (x + z)\, dx \wedge dy$

$S \equiv$ superficie del cuerpo limitado por $z = 4 - x^2 - y^2$ y $z = 0$.

(d) $\iint_S xy\, dy \wedge dz + y^2\, dz \wedge dx + y^2\, dx \wedge dy$

$S \equiv$ superficie del cuerpo $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1$.

4.23 Verificar el teorema de la divergencia para la región del espacio D limitada por el paraboloide $z = 2 - x^2 - y^2$ y el plano $z = 0$, y para el campo $F(x, y, z) = (2x + y, 2y^2, z)$.

4.24 Calcular las integrales de superficie de los campos vectoriales F sobre las superficies S que se indican:

(a) $F(x, y, z) = (x + y, y + z, x + z)$

$S \equiv$ frontera del sólido limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 9$ y los planos $z = 0,\ z = 5$.

(b) $F(x, y, z) = (3x^2, xy, z)$

$S \equiv$ tetraedro limitado por el plano $x + y + z = 1$ y los planos de coordenadas.

(c) $F(x, y, z) = (3y, -xz, yx^2)$

$S \equiv$ frontera de la región limitada por el paraboloide $2z = x^2 - y^2$ y el plano $z = 2$.

4.25 Calcular la integral del campo $F(x, y, z) = (xyz, \operatorname{sen}(x^2 - z^2), z - 1/2\, yz^2)$ sobre la superficie formada por el plano $2x - y + z = 1$ y los planos de coordenadas.

4.26 Calcular la integral del campo vectorial $F(x, y, z) = (x^2, e^x - y, 3x - \operatorname{sen} xy)$ sobre la superficie limitada por la porción del paraboloide $z - 2 = -x^2 - y^2$, para $z \ge 0$, y la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, para $z \le 0$. ¿ Puede aplicarse el teorema de la divergencia?

4.27 Calcular las integrales de superficie de los campos vectoriales F sobre las superficies S que se indican:

(a) $\iint_S x\, dy \wedge dz + y\, dz \wedge dx + z\, dx \wedge dy$

$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ /\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \}$

(b) $\iint_S xyz\, dy \wedge dz$

$S = \partial\, [0, 1]^3$

(c) $\iint_S (y\cos^2 x + y^3)\, dz \wedge dx + (x\,\text{sen}^2 x - 3zy^2)\, dx \wedge dy$

$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \}$

(d) $\iint_S xz\, dy \wedge dz + yz\, dz \wedge dx + dx \wedge dy$

$S = \partial D, \ D = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 25, \ 3 \leq z \leq 5 \}$

(e) $\iint_S 2x\, dy \wedge dz + yz\, dz \wedge dx + 3z\, dx \wedge dy$

$S = \partial D, \ D = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x^2 + y^2 \leq 4, \ x \leq 0, \ y \leq 0, \ 0 \leq z \leq 5 \}$

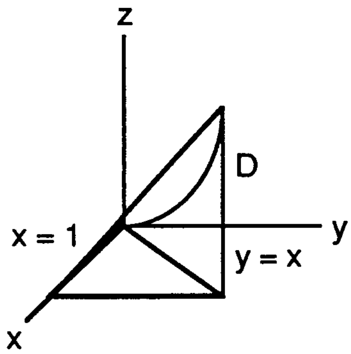
4.28 Calcular la integral de superficie $\iint_S (\text{rot}\, F) \cdot n \ dS$ siendo el campo: $F(x, y, z) = (-y, x^2, z^3)$ y la superficie S: $x^2 + y^2 + z^2 = 1, \ -1/2 \leq z \leq 1$.

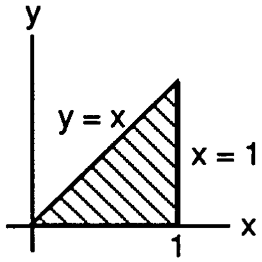
SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS DEL TEMA 4

4.1 Calcular las siguientes integrales triples:

(a) $\iiint\limits_D xy^2z^2 \, dx\, dy\, dz$

D sólido limitado por la superficie $z = xy$ y los planos $y = x$, $x = 1$, $z = 0$





Descripción de D:

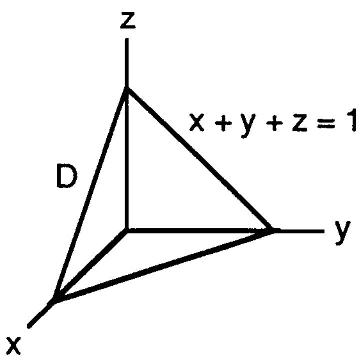
$0 \leq x \leq 1$
$0 \leq y \leq x$
$0 \leq z \leq xy$

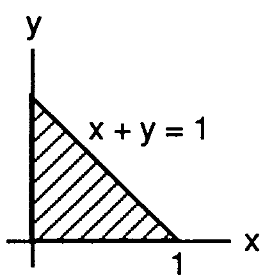
$$\iiint\limits_D x\, y^2z^2 \, dx\, dy\, dz = \int_0^1 \int_0^x \int_0^{xy} x\, y^2 z^2 \, dz\, dy\, dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^1 \int_0^x x\, y^2 x^3 y^3 \, dy\, dx = \frac{1}{18} \int_0^1 x^4\, x^6 \, dx = \frac{1}{198} \left[x^{11} \right]_0^1 = \frac{1}{198}$$

(b) $\iiint\limits_D (1 + x + y + z)^{-3} \, dx\, dy\, dz$

D sólido limitado por el plano $x + y + z = 1$ y los planos coordenados.





Descripción de D:

$0 \leq x \leq 1$
$0 \leq y \leq 1 - x$
$0 \leq z \leq 1 - x - y$

$$\iiint\limits_D (1+x+y+z)^{-3}\,dx\,dy\,dz = \int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} (1+x+y+z)^{-3}\,dz\,dy\,dx =$$

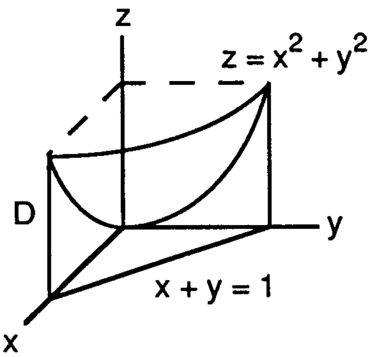
$$= \frac{-1}{2}\int_0^1\int_0^{1-x}\Big[(1+x+y+z)^{-2}\Big]_0^{1-x-y} dy\,dx = \frac{-1}{2}\int_0^1\int_0^{1-x}\Big[\frac{1}{4} - (1+x+y)^{-2}\Big]\,dy\,dx =$$

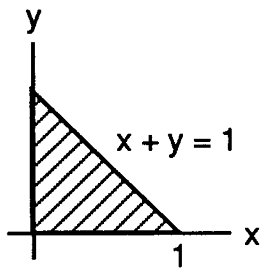
$$= \frac{-1}{2}\int_0^1\Big[\frac{1}{4}y + (1+x+y)^{-1}\Big]_0^{1-x} dx = \frac{-1}{2}\int_0^1\Big(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}x - \frac{1}{1+x}\Big)\,dx =$$

$$= \frac{-1}{2}\Big(\frac{3}{4} - \frac{1}{8} - \ln 2\Big) = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{5}{16}$$

(c) $\iiint\limits_D dx\,dy\,dz$

D sólido limitado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$, el plano $x + y = 1$, y los planos de coordenadas.





Descripción de D:

$0 \le x \le 1$

$0 \le y \le 1 - x$

$0 \le z \le x^2 + y^2$

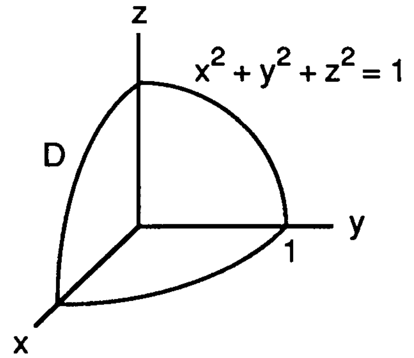
$$\iiint\limits_D dx\,dy\,dz = \int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{x^2+y^2} dz\,dy\,dz = \int_0^1\int_0^{1-x} (x^2+y^2)\,dy\,dx =$$

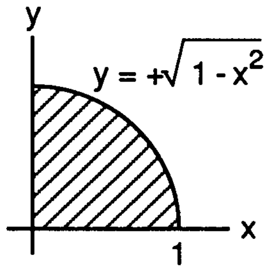
$$= \int_0^1 \Big[\,x^2(1-x) + \frac{1}{3}(1-x)^3\,\Big]\,dx = \Big[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{(1-x)^4}{12}\Big]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

4.2 Calcular las integrales triples que se indican:

(a) $\iiint\limits_D xyz \, dx\, dy\, dz$

$D = \{ (x, y, z) \in IR^3 \ / \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ z \geq 0 \}$





Descripción de D:

$0 \leq x \leq 1$

$0 \leq y \leq +\sqrt{1 - x^2}$

$0 \leq z \leq +\sqrt{1 - x^2 - y^2}$

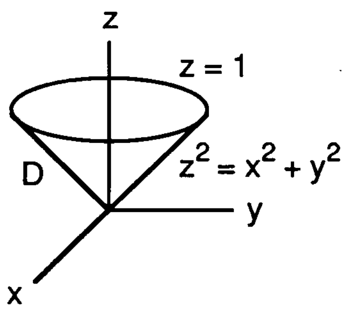
$$\iiint\limits_D xyz \, dx\, dy\, dz = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz \, dz\, dy\, dx =$$

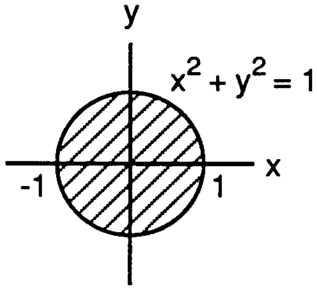
$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy\,(1 - x^2 - y^2)\, dy\, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} [\,(x - x^3)\, y - xy^3\,]\, dy\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 [\ (x - x^3) \frac{1 - x^2}{2} - x \frac{(1 - x^2)^2}{4}\ ]\, dx = \frac{1}{8} \int_0^1 (x - 2x^3 + x^5)\, dx = \frac{1}{48}$$

(b) $\iiint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dx\, dy\, dz$

$D = \{ (x, y, z) \in IR^3 \ / \ x^2 + y^2 \leq z^2, \ 0 \leq z \leq 1 \ \}$





Descripción de D:

$-1 \leq x \leq 1$

$-\sqrt{1 - x^2} \leq y \leq +\sqrt{1 - x^2}$

$+\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$

Por la simetria del dominio y del integrando:

$$\iiint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy\, dz = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} \sqrt{x^2+y^2}\, dz\, dy\, dx =$$

$$= 4 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} \sqrt{x^2+y^2}\, dz\, dy\, dx =$$

$$= 4 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} [\sqrt{x^2+y^2} - (x^2+y^2)]\, dy\, dx =$$

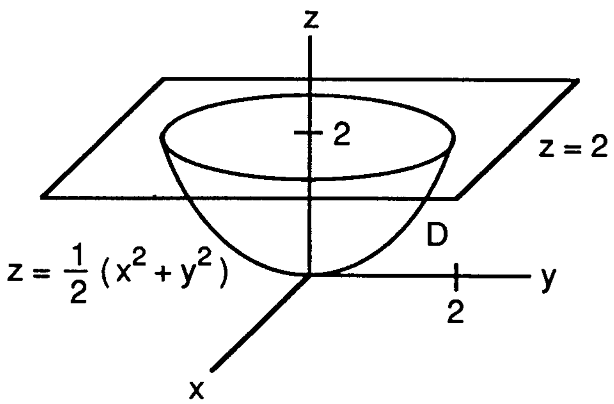
Cambio a polares: $\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{array}\right\}$ $J(r, \theta) = r$ $\quad \begin{array}{l} 0 \le \theta \le \pi/2 \\ 0 \le r \le 1 \end{array}$

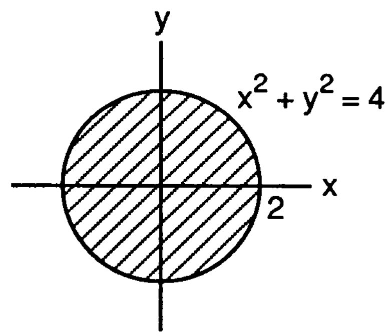
$$= 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^1 (r - r^2)\, r\, dr\, d\theta = 2\pi \left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{6}$$

4.3 Calcular las siguientes integrales triples empleando, según convenga, un cambio a coordenadas cilíndricas o esféricas.

(a) $\iiint_D (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz$

D sólido limitado por las superficies $z = 2$ y $x^2 + y^2 = 2z$.





La intersección del plano $z = 2$ con el paraboloide $x^2 + y^2 = 2z$ es una curva cuya proyección en el plano xy es la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$.

Empleando coordenadas cilíndricas: $\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r \,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{array}\right\}$ $J(r,\theta,z) = r$

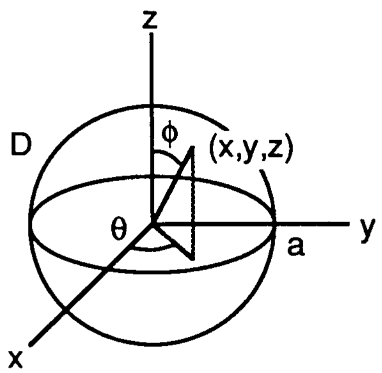
el sólido D se describe como: $\begin{array}{c} 0 \le r \le 2 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 1/2\, r^2 \le z \le 2 \end{array}$

$$\iiint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{1/2\,r^2}^2 r^2\, r\,dz\,dr\,d\theta =$$

$$= 2\pi\int_0^2 r^3\left(2-\frac{1}{2}r^2\right)dr = 2\pi\left[\frac{r^4}{2}-\frac{r^6}{12}\right]_0^2 = \frac{16\,\pi}{3}$$

(b) $\iiint_D z\,dx\,dy\,dz$

D esfera de centro el origen y radio a.



Coordenadas esféricas:

$\left.\begin{array}{l} x = r\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = r\cos\phi \end{array}\right\}$

$|J(r,\phi,\theta)| = r^2\,\mathrm{sen}\,\phi$

Descripción de D en esféricas: $\begin{array}{c} 0 \le r \le a \\ 0 \le \phi \le \pi \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{array}$

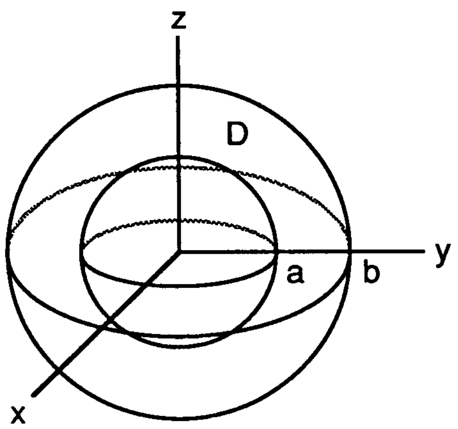
$$\iiint_D z\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} r\cos\phi\; r^2\,\mathrm{sen}\,\phi\;dr\,d\phi\,d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi}\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\phi\,d\phi\int_0^a r^3 dr = 2\pi\cdot 0\cdot a^4/4 = 0$$

(c) $\iiint_D dx\,dy\,dz$

D sólido limitado entre dos esferas concéntricas de radios respectivos a y b ($b > a > 0$).

Se trata de hallar el volumen entre dos esferas concéntricas; podemos suponer que su centro es el origen de coordenadas.



Coordenadas esféricas:

$$\left.\begin{array}{l} x = r \operatorname{sen}\phi \cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \\ z = r\cos\phi \end{array}\right\}$$

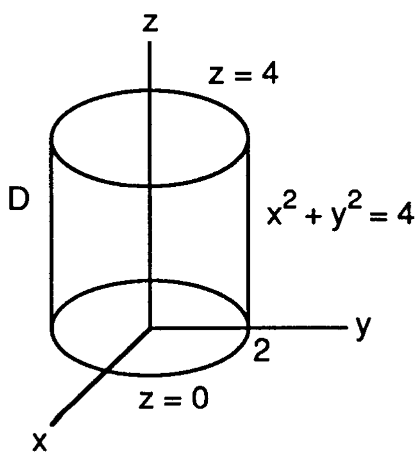
$$|J(r,\phi,\theta)| = r^2 \operatorname{sen}\phi$$

Descripción de D en esféricas:
$$\begin{array}{l} a \le r \le b \\ 0 \le \phi \le \pi \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{array}$$

$$\iiint_D dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_a^b r^2 \operatorname{sen}\phi\, dr\, d\phi\, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\phi\, d\phi \int_a^b r^2\, dr =$$

$$= 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{1}{3}(b^3 - a^3) = \frac{4\pi}{3}(b^3 - a^3)$$

4.4 Calcular el volumen del sólido limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y los planos $z = 0$, $z = 4$.



Coordenadas cilíndricas:
$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \\ z = z \end{array}\right\}$$

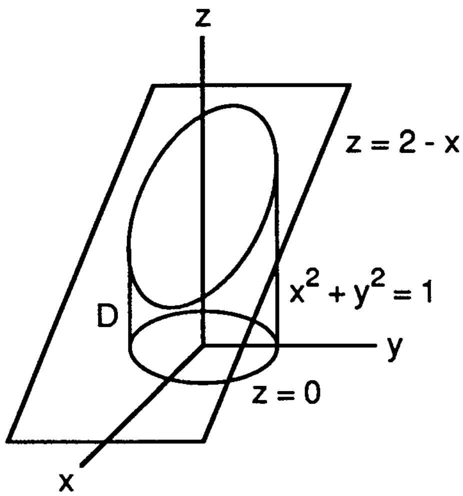
$$J(r,\theta,z) = r$$

Descripción de D en cilíndricas:

$$\begin{array}{l} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le 2 \\ 0 \le z \le 4 \end{array}$$

$$\text{Vol}(D) = \iiint_D dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_0^{4} r\,dz\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2} r\,dr \int_0^{4} dz = 16\pi$$

4.5 Calcular el volumen del sólido limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y los planos $z = 2 - x$, $z = 0$.



Coordenadas cilíndricas: $\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \\ z = z \end{array}\right\}$

$J(r, \theta, z) = r$

Descripción de D en cilíndricas:

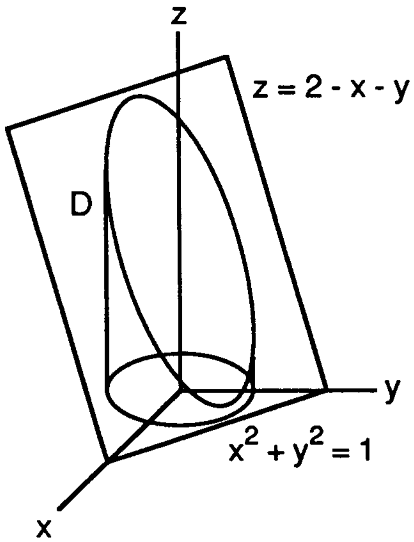
$0 \le \theta \le 2\pi$
$0 \le r \le 1$
$0 \le z \le 2 - r\cos\theta$

$$\text{Vol}(D) = \iiint_D dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_0^{2-r\cos\theta} r\,dz\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{1} r(2 - r\cos\theta)\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{1} (2r - r^2\cos\theta)\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{1}{3}\cos\theta\right) d\theta = \left[\theta - \frac{1}{3}\,\text{sen}\,\theta\right]_0^{2\pi} = 2\pi$$

4.6 Calcular el volumen del sólido limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y los planos $z = 0$, $x + y + z = 2$.



Coordenadas cilíndricas: $\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \\ z = z \end{array}\right\}$

$J(r, \theta, z) = r$

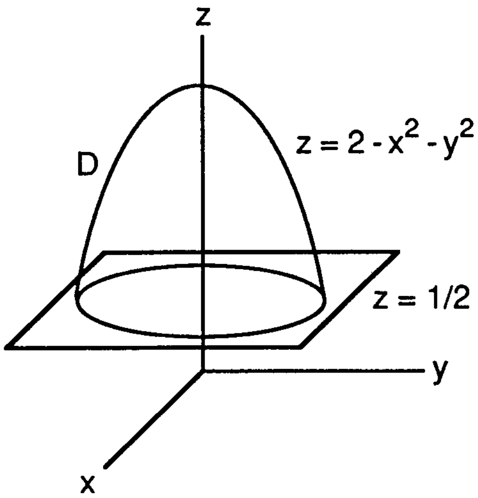
Descripción de D en cilíndricas:

$0 \le \theta \le 2\pi$
$0 \le r \le 1$
$0 \le z \le 2 - r(\cos\theta + \text{sen}\,\theta)$

$$\text{Vol}(D) = \iiint_D dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{2-r(\cos\theta+\text{sen}\theta)} r\,dz\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 [\,2r - r^2(\cos\theta + \text{sen}\,\theta)\,]\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} [\,1 - \frac{1}{3}(\cos\theta + \text{sen}\,\theta)\,]\;d\theta = 2\pi$$

4.7 Calcular el volumen comprendido entre las superficies $z = 2 - x^2 - y^2$ y $z = 1/2$.



Proyección en el plano xy de la curva intersección:

$\left.\begin{array}{l} z = 2 - x^2 - y^2 \\ z = \frac{1}{2} \end{array}\right\}\quad x^2 + y^2 = \frac{3}{2}$

En coordenadas cilíndricas:

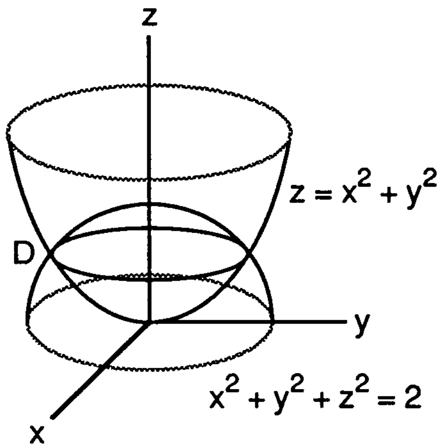
$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \\ z = z \end{array}\right\}\; J(r, \theta, z) = r$

D se describe como: $\begin{array}{l} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le \sqrt{3/2} \\ 1/2 \le z \le 2 - r^2 \end{array}$

$$\text{Vol (D)} = \iiint_D dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3/2}}\int_{1/2}^{2-r^2} r\,dz\,dr\,d\theta = 2\pi\int_0^{\sqrt{3/2}} r\,(2 - r^2 - 1/2)\,dr =$$

$$= 2\pi\int_0^{\sqrt{3/2}} \left(\frac{3}{2}\,r - r^3\right) dr = 2\pi\left[\frac{3}{4}\,r^2 - \frac{1}{4}\,r^4\right]_0^{\sqrt{3/2}} = \frac{9}{8}\,\pi$$

4.8 Calcular el volumen del sólido limitado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.



Proyección de la curva intersección:

$$\left.\begin{array}{l} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2 \end{array}\right\}$$

sustituyendo $x^2 + y^2$ por z:

$z + z^2 = 2 \qquad z^2 + z - 2 = 0$

soluciones: $z = 1$, $z = -2$

La única solución válida es $z = 1$; esto indica que la curva intersección está en $z = 1$, por lo tanto, su proyección en el plano coordenado xy es:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Descripción del sólido D en coordenadas cilíndricas:

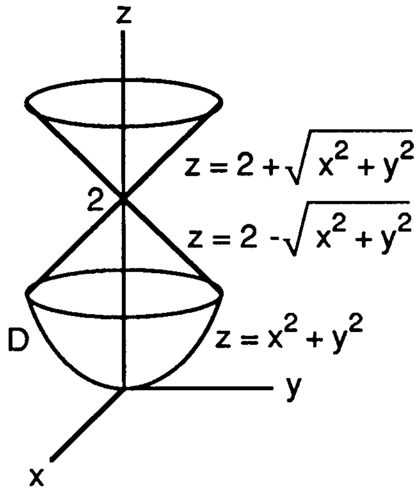
$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \\ z = z \end{array}\right\} \quad J(r, \theta, z) = r \qquad \begin{array}{l} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \\ r^2 \le z \le +\sqrt{2 - r^2} \end{array}$$

$$\text{Vol (D)} = \iiint_D dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}} r\;dz\,dr\,d\theta =$$

$$= 2\pi\int_0^1 \left(r\sqrt{2 - r^2} - r^3\right) dr = 2\pi\left[\frac{-1}{2}\;\frac{(2 - r^2)^{3/2}}{3/2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^1 =$$

$$= 2\pi \ [\ 1/3\ (\ 2\sqrt{2}\ - 1) - 1/4\ ] \ = \frac{8\sqrt{2}\ - 7}{6}\ \pi$$

4.9 Calcular el volumen del cuerpo limitado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el cono $z = 2 - (x^2 + y^2)^{1/2}$.



Curva intersección del cono y el paraboloide:

$$\left.\begin{array}{l} z = x^2 + y^2 \\ z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2} \end{array}\right\}$$

sustituyendo $x^2 + y^2$ por z:

$$z = 2 - \sqrt{z}$$

llamando $t = \sqrt{z}$:

$t^2 = 2 - t$ $\qquad t^2 + t - 2 = 0$ $\qquad$ Soluciones: $t = 1,\ t = -2$

soluciones para z: $z = t^2;\quad z = 1,\ z = 4$

La solución válida es $z = 1$. La solución $z = 4$ es el corte con la parte superior del cono (por encima de su vértice).

Así pues, la proyección de la curva intersección sobre el plano xy es:

$$x^2 + y^2 = 1$$

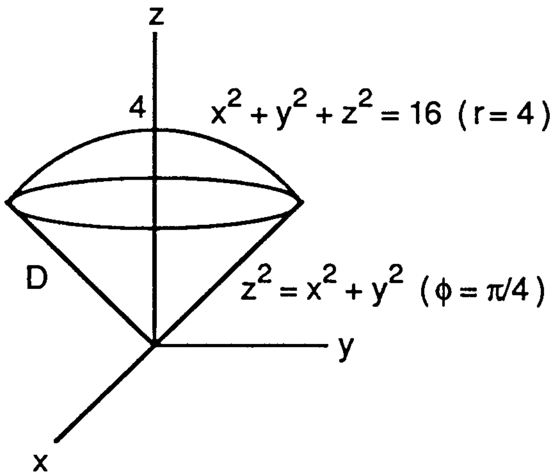
Descripción del cuerpo D en coordenadas cilíndricas:

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{array}\right\} \qquad J(r, \theta, z) = r \qquad \begin{array}{c} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \\ r^2 \le z \le 2 - r \end{array}$$

$$\mathrm{Vol}(D) = \iiint_D dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^{2-r} r\,dz\,dr\,d\theta = 2\pi\int_0^1 r\,(2 - r - r^2)\,dr =$$

$$= 2\pi\int_0^1 (2r - r^2 - r^3)\,dr = \frac{5}{6}\pi$$

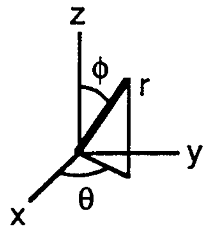
4.10 Calcular el volumen del cuerpo limitado por el cono $z^2 = x^2 + y^2$ y la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16,\ z \geq 0$.



Coordenadas esféricas:

$$\left.\begin{array}{l} x = r \operatorname{sen}\phi \cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \\ z = r\cos\phi \end{array}\right\}$$

$$|J(r,\phi,\theta)| = r^2 \operatorname{sen}\phi$$



Descripción de las fronteras de D en coordenadas esféricas:

Cono: $z^2 = x^2 + y^2$; $\cos^2\phi = \operatorname{sen}^2\phi$; $\operatorname{tg}\phi = \pm 1$

Al considerar la parte superior: $\operatorname{tg}\phi = 1$; $\phi = \pi/4$

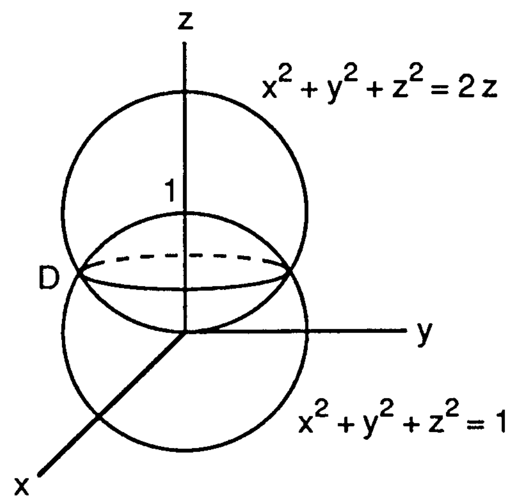
Esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = 4^2$; $r = 4$

Descripción en esféricas de D: $0 \leq r \leq 4$
$0 \leq \phi \leq \pi/4$
$0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$\text{Vol}(D) = \iiint_D dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^4 r^2 \operatorname{sen}\phi\, dr\, d\phi\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}\phi\, d\phi \int_0^4 r^2\, dr = 2\pi\left(-\sqrt{2}/2 + 1\right)\frac{1}{3}\,4^3 = \frac{64\,(2-\sqrt{2})}{3}\,\pi$$

4.11 Calcular el volumen común a los interiores de las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$.



Casquete superior de $x^2 + y^2 + z^2 = 1$:

$$z = +\sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

La esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ es:

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$$

Casquete inferior: $z = 1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

El casquete superior de $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ es la frontera superior de D y el casquete inferior de $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$ es la frontera inferior de D.

Proyección sobre el plano xy de la curva intersección de ambas esferas:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 + (z-1)^2 &= 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \end{aligned}\right\} \quad x^2 + y^2 = 1 - z^2 \qquad 1 - z^2 + (z-1)^2 = 1 \qquad z = 1/2$$

Ambas esferas se cortan en $z = 1/2$, la proyección de su intersección es:

$$x^2 + y^2 = 3/4$$

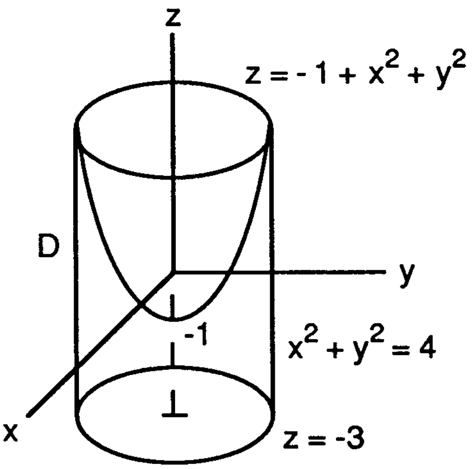
Descripción de D en coordenadas cilíndricas:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z &= z \end{aligned}\right\} \quad J(r, \theta, z) = r \qquad \begin{aligned} 0 \le \theta &\le 2\pi \\ 0 \le r &\le \sqrt{3}/2 \\ 1 - \sqrt{1 - r^2} \le z &\le \sqrt{1 - r^2} \end{aligned}$$

$$\mathrm{Vol}(D) = \iiint_D dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}/2} \int_{1-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta =$$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}/2} \left(2r\sqrt{1 - r^2} - r\right) dr = 2\pi \left[-\frac{(1 - r^2)^{3/2}}{3/2} - \frac{r^2}{2} \right]_0^{\sqrt{3}/2} = \frac{5}{12}\pi$$

4.12 Calcular el volumen de la región del espacio limitada por el paraboloide $z + 1 = x^2 + y^2$, el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y el plano $z = -3$.



En coordenadas cilíndricas:

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{array}\right\} \quad J(r, \theta, z) = r$$

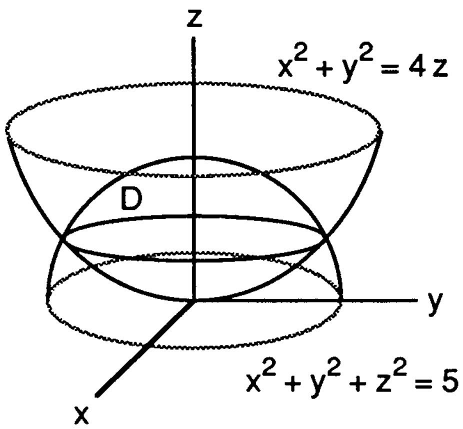
Descripción de la región D:

$$\begin{array}{l} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le 2 \\ -3 \le z \le -1 + r^2 \end{array}$$

$$\mathrm{Vol}\,(D) = \iiint_D dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_{-3}^{-1+r^2} r\,dz\,dr\,d\theta =$$

$$= 2\pi\int_0^2 r\,(-1 + r^2 + 3)\,dr = 2\pi\int_0^2 (2r + r^3)\,dr = 16\,\pi$$

4.13 Calcular el volumen del cuerpo limitado inferiormente por el paraboloide $x^2 + y^2 = 4z$ y superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 5$.



Intersección de las superficies:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 4z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 5 \end{array}\right\}$$

sustituyendo $x^2 + y^2$ por $4z$:

$$4z + z^2 = 5$$

$$z^2 + 4z - 5 = 0$$

Soluciones $z = 1$, $z = -5$

La solución válida es $z = 1$ y supone que ambas superficies se cortan en el plano $z = 1$. Para hallar su proyección en el plano coordenado basta sustituir en una cualquiera de las dos el valor de z por 1, y obtener:

$$x^2 + y^2 = 4$$

Descripción de D en coordenadas cilíndricas:

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r \,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{array}\right\} \quad J(r,\theta,z) = r \qquad \begin{array}{c} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le 2 \\ \frac{1}{4} r^2 \le z \le \sqrt{5 - r^2} \end{array}$$

$$\mathrm{Vol}(D) = \iiint_D dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \int_{\frac{1}{4}r^2}^{\sqrt{5-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta =$$

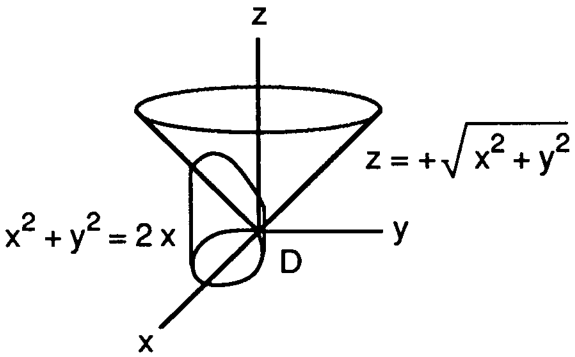
$$= 2\pi \int_0^2 \left(r\sqrt{5 - r^2} - 1/4\, r^3 \right) dr = 2\pi \left[-\frac{1}{2}\,\frac{(5 - r^2)^{3/2}}{3/2} - \frac{1}{16}\, r^4 \right]_0^2 =$$

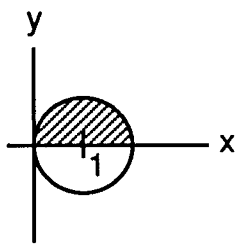
$$= \frac{2\pi}{3}\,(5\sqrt{5} - 4)$$

4.14 Calcular el volumen del sólido limitado por el plano $z = 0$, el cilindro circular $x^2 + y^2 = 2x$ y el semicono $z^2 = x^2 + y^2$, $z \ge 0$.

El cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ es $(x - 1)^2 + y^2 = 1$.

Por la simetria del sólido consideramos sólamente la mitad correspondiente a la proyección sobre el primer cuadrante de xy, D'.





$$\text{En coordenadas cilíndricas:} \quad \left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r \,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{array}\right\} \quad J(r,\theta,z) = r$$

el cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ resulta ser $r = 2\cos\theta$, para $0 \le \theta \le \pi/2$.

Descripción de D' en cilíndricas: $\begin{array}{l} 0 \le \theta \le \pi/2 \\ 0 \le r \le 2\cos\theta \\ 0 \le z \le r \end{array}$

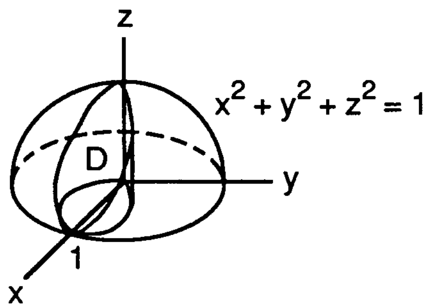
$$\text{Vol}(D) = 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta}\int_0^{r} r\,dz\,dr\,d\theta = 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} r^2\,dr\,d\theta =$$

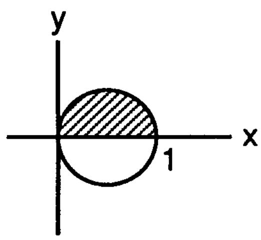
$$= \frac{16}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^3\theta\,d\theta = \frac{16}{3}\int_0^{\pi/2}(1-\text{sen}^2\theta)\cos\theta\,d\theta =$$

$$= \frac{16}{3}\left[\text{sen}\,\theta - \frac{\text{sen}^3\theta}{3}\right]_0^{\pi/2} = \frac{32}{9}$$

4.15 Calcular el volumen del sólido que es el interior del cilindro $x^2 + y^2 = x$ limitado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

El cilindro $x^2 + y^2 = x$ es, completando cuadrados, $(x - 1/2)^2 + y^2 = (1/2)^2$.





Por la simetría de la figura consideraremos la parte superior y de ésta la porción del primer octante; por lo tanto:

$$\text{Vol}(D) = 4\iiint_{D'} dx\,dy\,dz$$

En coordenadas cilíndricas: $\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \\ z = z \end{array}\right\}$ $J(r, \theta, z) = r$

el cilindro $x^2 + y^2 = x$ resulta ser $r = \cos\theta$, para $0 \le \theta \le \pi/2$.

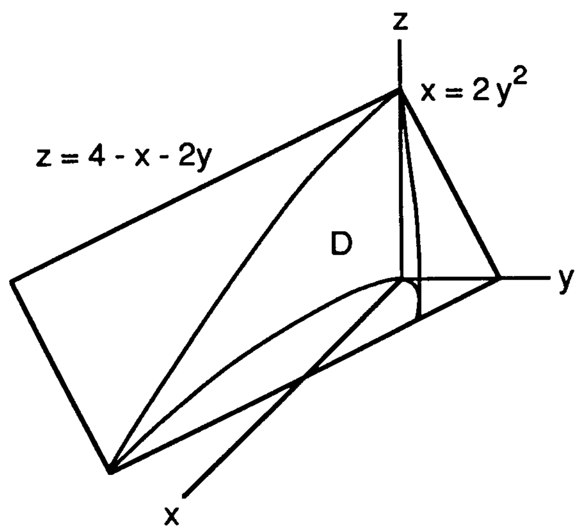
Descripción de D' en cilíndricas:
$$0 \le \theta \le \pi/2$$
$$0 \le r \le \cos\theta$$
$$0 \le z \le \sqrt{1-r^2}$$

$$\text{Vol}(D) = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{\cos\theta}\int_0^{\sqrt{1-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{\cos\theta} r\sqrt{1-r^2}\,dr\,d\theta =$$

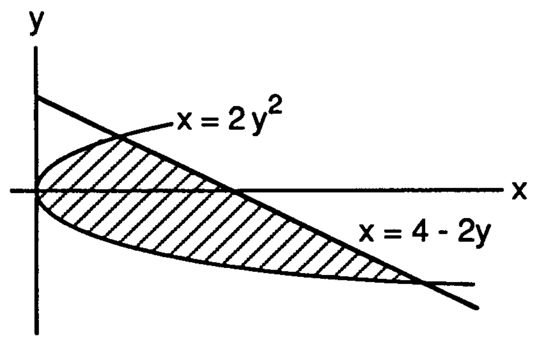
$$= -2\int_0^{\pi/2}\left[\frac{(1-r^2)^{3/2}}{3/2}\right]_0^{\cos\theta} = \frac{-4}{3}\int_0^{\pi/2}(\operatorname{sen}^3\theta - 1)\,d\theta =$$

$$= \frac{-4}{3}\int_0^{\pi/2}[(1-\cos^2\theta)\operatorname{sen}\theta - 1]\,d\theta = \frac{-4}{3}\left[-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3} - \theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{2\pi}{3} - \frac{8}{9}$$

4.16 Calcular el volumen del sólido limitado por el cilindro parabólico $2y^2 = x$ y los planos $z = 0$, $x + 2y + z = 4$.



Para la determinación del sólido D necesitamos saber cuál es la intersección de la parábola $2y^2 = x$ con la recta $x = 4 - 2y$. La parábola y la recta son, respectivamente, las intersecciones del cilindro parabólico y del plano dados con el plano coordenado $z = 0$.



$$\left.\begin{array}{l} x = 2y^2 \\ x = 4 - 2y \end{array}\right\} \qquad 2y^2 = 4 - 2y\ ; \qquad y^2 + y - 2 = 0\ ; \qquad \begin{array}{l} y = 1 \\ y = -2 \end{array}$$

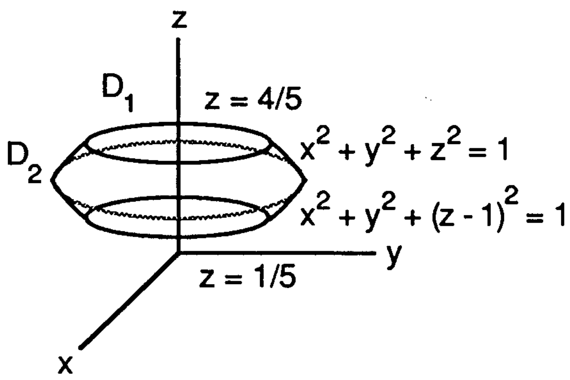
Descripción del sólido D:

$$\begin{array}{c} -2 \le y \le 1 \\ 2y^2 \le x \le 4 - 2y \\ 0 \le z \le 4 - x - 2y \end{array}$$

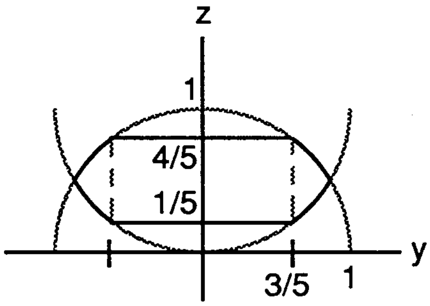
$$\text{Vol}(D) = \int_{-2}^{1}\int_{2y^2}^{4-2y}\int_{0}^{4-x-2y} dz\,dx\,dy = \int_{-2}^{1}\int_{2y^2}^{4-2y} (4 - x - 2y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-2}^{1}\left[(4-2y)\,x - \frac{x^2}{2}\right]_{2y^2}^{4-2y} dy = \int_{-2}^{1} (2y^4 + 4y^3 - 6y^2 - 8y + 8)\,dy = \frac{81}{5}$$

4.17 Calcular el volumen del recinto del espacio limitado por los planos $z = 1/5$, $z = 4/5$ y las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$.



En sección:



Este recinto está limitado por cuatro fronteras.

S_1: Disco sobre el plano $z = 1/5$ limitado por $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$

Proyección en el plano xy: $x^2 + y^2 = (3/5)^2$

S_2: Porción de esfera $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$ limitada por $z = 1/5$ y por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Proyección de las curvas intersección en el plano xy:

$$x^2 + y^2 = (3/5)^2 \qquad x^2 + y^2 = (\sqrt{3}/2)^2$$

S_3: Porción de esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ limitada por $z = 4/5$ y por la esfera $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$

Proyección de las curvas intersección en el plano xy:

$$x^2 + y^2 = (3/5)^2 \qquad x^2 + y^2 = (\sqrt{3}/2)^2$$

S_4: Disco sobre el plano $z = 4/5$ limitado por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Proyección en el plano xy: $x^2 + y^2 = (3/5)^2$

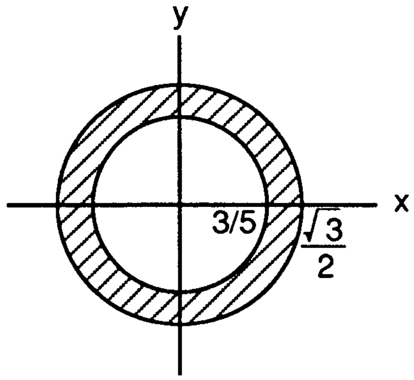
Para calcular el volumen del recinto lo descomponemos en dos:

Por un lado, D_1, porción de cilindro circular recto cuyo radio es 3/5 y cuya altura es la diferencia de alturas entre los planos $z = 4/5$ y $z = 1/5$, es decir, 3/5.

$$\text{Vol}\,(D_1) = \pi\left(\frac{3}{5}\right)^2 \frac{3}{5} = \frac{27}{125}\,\pi$$

Por otro lado, D_2, que representa un anillo que rodea a la porción del cilindro anterior.

Para poder determinar D_2 es necesario tener presente que su proyección sobre el plano xy es:



En coordenadas cilíndricas:

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \\ z = z \end{array}\right\} \quad J(r, \theta, z) = r$$

Descripción de D_2:

$$0 \le \theta \le 2\pi$$
$$3/5 \le r \le \sqrt{3}/2$$
$$1 - \sqrt{1 - r^2} \le z \le +\sqrt{1 - r^2}$$

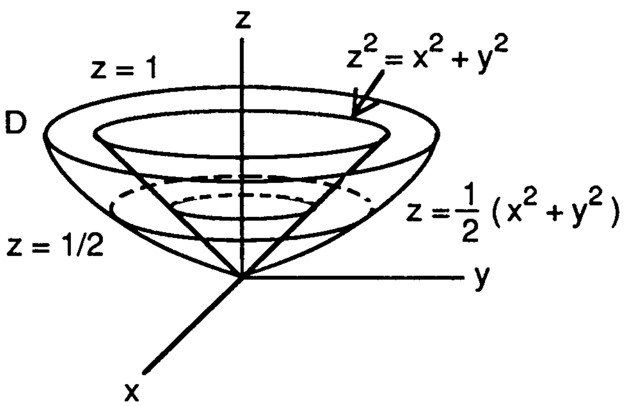
$$\mathrm{Vol}\,(D_2) = \int_0^{2\pi}\int_{3/5}^{\sqrt{3}/2}\int_{1-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta = 2\pi\int_{3/5}^{\sqrt{3}/2}\left(2r\sqrt{1-r^2} - r\right)dr =$$

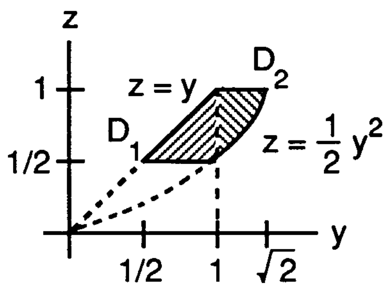
$$= 2\pi\left[-\frac{(1-r^2)^{3/2}}{3/2} - \frac{r^2}{2}\right]_{3/5}^{\sqrt{3}/2} = \frac{63}{500}\pi$$

Por lo tanto:

$$\mathrm{Vol}\,(D) = \mathrm{Vol}\,(D_1) + \mathrm{Vol}\,(D_2) = \frac{27}{125}\pi + \frac{63}{500}\pi = \frac{171}{500}\pi$$

4.18 Calcular el volumen del sólido limitado por las superficies $z^2 = x^2 + y^2$, $2z = x^2 + y^2$, $z = 1$, $z = 1/2$.





En cilíndricas $\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{array}\right\}$ $J(r, \theta, z) = r$, D se describe como:

$$\left.\begin{array}{r} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 1/2 \le r \le 1 \\ 1/2 \le z \le r \end{array}\right\} D_1 \qquad \left.\begin{array}{r} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 1 \le r \le \sqrt{2} \\ 1/2\, r^2 \le z \le 1 \end{array}\right\} D_2$$

ya que la proyección de las intersecciones es:

$$\left.\begin{array}{l} z^2 = x^2 + y^2 \\ z = 1/2 \end{array}\right\} \qquad x^2 + y^2 = (1/2)^2 \quad \leftrightarrow \quad r = 1/2$$

$$\left.\begin{array}{l} z^2 = x^2 + y^2 \\ z = 1 \end{array}\right\} \qquad x^2 + y^2 = 1^2 \quad \leftrightarrow \quad r = 1$$

Por lo tanto, para D_1:

$$\frac{1}{2} \le z \le + \sqrt{x^2 + y^2} \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \le z \le r$$

$$\left.\begin{array}{l} z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \\ z = 1/2 \end{array}\right\} \qquad x^2 + y^2 = 1 \quad \leftrightarrow \quad r = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \\ z = 1 \end{array}\right\} \qquad x^2 + y^2 = (\sqrt{2}\,)^2 \quad \leftrightarrow \quad r = \sqrt{2}$$

Por lo tanto, para D_2:

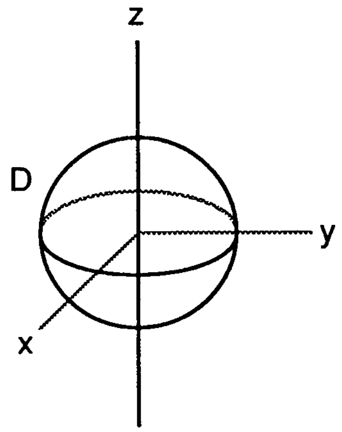
$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2) \le z \le 1 \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{2} r^2 \le z \le 1$$

Entonces:

$$\mathrm{Vol}\,(D) = \iiint_D dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_{1/2}^{1}\int_{1/2}^{r} r\,dz\,dr\,d\theta + \int_0^{2\pi}\int_{1}^{\sqrt{2}}\int_{1/2\,r^2}^{1} r\,dz\,dr\,d\theta =$$

$$= 2\pi \int_{1/2}^{1} r\,(r - 1/2)\,dr + 2\pi \int_{1}^{\sqrt{2}} r\,(1 - 1/2\,r^2)\,dr = \frac{11}{24}\,\pi$$

4.19 Probar que el momento de inercia de una bola esférica maciza de densidad constante respecto a uno cualquiera de sus diámetros es $2/5\ M R^2$, donde M denota la masa y R el radio de la bola.



Densidad de la bola: $\mu\,(x,y,z) = k$

En coordenadas esféricas:

$$\left.\begin{array}{l} x = r \operatorname{sen}\phi \cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \\ z = r\cos\phi \end{array}\right\} \ |J(r, \theta, \phi)| = r^2 \operatorname{sen}\phi$$

la bola se describe como: $\begin{array}{l} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \phi \le \pi \\ 0 \le r \le R \end{array}$

Si tomamos como diámetro de la bola el eje OZ tendremos:

$$I_z = \iiint_D (x^2 + y^2)\ \mu(x, y, z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= k \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{R} r^2 \operatorname{sen}^2\phi\ r^2 \operatorname{sen}\phi\, dr\, d\phi\, d\theta = 2k\pi \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3\phi\, d\phi \int_0^{R} r^4\, dr =$$

$$= \frac{2}{5} k\pi R^5 \int_0^{\pi} (1 - \cos^2\phi) \operatorname{sen}\phi\, d\phi = \frac{2}{5} k\pi R^5 \left[-\cos\phi + \frac{1}{3}\cos^3\phi \right]_0^{\pi} = \frac{8}{15} k\pi R^5$$

Por otro lado, la masa total M de una bola homogénea es:

$$M = \iiint_D k\, dx\, dy\, dz = k \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{R} r^2 \operatorname{sen}\phi\, dr\, d\phi\, d\theta = \frac{4}{3} k\pi R^3$$

Así pues, sustituyendo M en I_z:

$$I_z = \frac{8}{15} k\pi R^5 = \frac{2}{5}\frac{4}{3} k\pi R^3 R^2 = \frac{2}{5} M R^2$$

4.20 Calcular la divergencia de los siguientes campos vectoriales:

(a) $F(x, y, z) = (x^2, xyz, yz^2)$

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (x^2, xyz, yz^2) = 2x + xz + 2yz$$

(b) $F(x, y, z) = (y \ln x, x \ln y, xy \ln z)$

$$\operatorname{div} F = \frac{y}{x} + \frac{x}{y} + \frac{xy}{z}$$

(c) $F(x, y, z) = (x^2, \operatorname{sen}(xy), yze^x)$

$$\operatorname{div} F = 2x + x\cos(xy) + y\, e^x$$

(d) $F(x, y, z) = (e^{xy} \operatorname{sen} z , e^{xz} \operatorname{sen} y , e^{yz} \cos x)$

$$\operatorname{div} F = y e^{xy} \operatorname{sen} z + e^{xz} \cos y + y e^{yz} \cos x$$

(e) $F(x, y, z) = (x^2 - y^2 , y^2 - z^2 , x^2 - z^2)$

$$\operatorname{div} F = 2x + 2y - 2z$$

4.21 Para el campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuyas componentes sean funciones continuas con derivadas parciales de primer y segundo orden continuas, demostrar que:

$$\operatorname{div} (\operatorname{rot} F) = 0$$

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} , \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} , \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

entonces:

$$\operatorname{div} (\operatorname{rot} F) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

$$\operatorname{div} (\operatorname{rot} F) = \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial y}$$

por lo tanto: $\operatorname{div} (\operatorname{rot} F) = 0$

ya que en las condiciones del enunciado podemos asegurar la igualdad de las derivads cruzadas.

4.22 Empleando el teorema de la divergencia, calcular las integrales de superficie de los campos vectoriales F sobre las superficies S que se indican:

(a) $F(x, y, z) = (yz , xz , xy)$ $S \equiv$ cubo con centro el origen y aristas de longitud 2.

Este problema es idéntico al 3.13 (a); ahora lo resolveremos aplicando el teorema de la divergencia.

Campo: $F(x, y, z) = (yz, xz, xy)$; $\operatorname{div} F = 0$

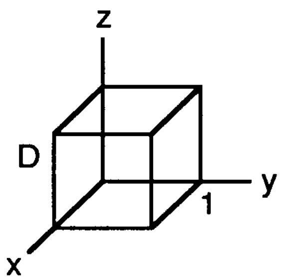
Recinto de integración: $D = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$

$$\iint_S F \cdot n\, dS = \iiint_D 0\, dx\, dy\, dz = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} 0\, dz\, dy\, dx = 0$$

(b) $F(x, y, z) = (x - y, y - z, x - y)$ $S \equiv$ frontera de $[0, 1]^3$.

Este problema es idéntico al 3.13 (b); resolución por aplicación del teorema de la divergencia.

Campo: $F(x, y, z) = (x - y, y - z, x - y)$; $\operatorname{div} F = 2$



$D = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$

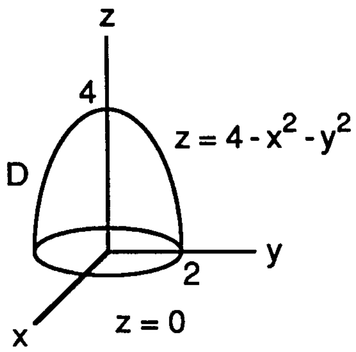
$S = \partial [0, 1]^3$

$$\iint_S F \cdot n\, dS = \iiint_D \operatorname{div} F\, dx\, dy\, dz = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 2\, dz\, dy\, dx = 2$$

(c) $\iint_S (x + y)\, dy \wedge dz + (y + z)\, dz \wedge dx + (x + z)\, dx \wedge dy$

$S \equiv$ superficie del cuerpo limitado por $z = 4 - x^2 - y^2$ y $z = 0$.

Este problema ya ha sido resuelto en 3.14 (a) calculando las integrales de superficie sobre cada una de las dos superficies regulares que limitan el cuerpo.



Descripción de D:

$$-2 \leq x \leq 2$$
$$-\sqrt{4 - x^2} \leq y \leq +\sqrt{4 - x^2}$$
$$0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2$$

$$S = \partial D$$

En cilíndricas $\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \\ z = z \end{array}\right\}$ $J(r, \theta, z) = r$, D se describe como:

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$
$$0 \leq r \leq 2$$
$$0 \leq z \leq 4 - r^2$$

Campo: $F(x, y, z) = (x + y, y + z, x + z)$; $\operatorname{div} F = 3$

Entonces, por el teorema de la divergencia:

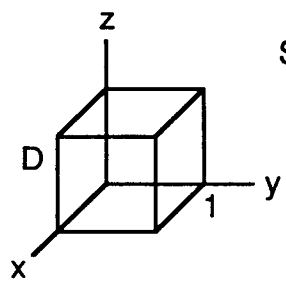
$$\iint_S (x + y)\, dy \wedge dz + (y + z)\, dz \wedge dx + (x + z)\, dx \wedge dy = \iiint_D \operatorname{div} F \; dx\, dy\, dz =$$

$$= \iiint_D 3\, dx\, dy\, dz = \int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_0^{4-r^2} 3\, r\, dz\, dr\, d\theta = 6\pi \int_0^2 r\,(4 - r^2)\, dr = 24\pi$$

(d) $\iint_S xy\, dy \wedge dz + y^2\, dz \wedge dx + y^2\, dx \wedge dy$

$S \equiv$ superficie del cuerpo $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1.$

En el problema 3.14 (b) se obtuvo el valor de esta integral calculando las integrales de superficie sobre las seis caras del cubo unidad; emplearemos ahora el teorema de la divergencia.



$S = \partial D$

Descripción de D:

$$0 \leq x \leq 1$$
$$0 \leq y \leq 1$$
$$0 \leq z \leq 1$$

Campo: $\quad F(x, y, z) = (xy, y^2, y^2)$; $\qquad \operatorname{div} F = y + 2y + 0 = 3y$

$$\iint_S xy\, dy \wedge dz + y^2\, dz \wedge dx + y^2\, dx \wedge dy = \iiint_D \operatorname{div} F \; dx\, dy\, dz =$$

$$= \iiint_D 3y\, dx\, dy\, dz = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 3y\, dz\, dy\, dx = \int_0^1 dx \int_0^1 3y\, dy \int_0^1 dz = \frac{3}{2}$$

4.23 Verificar el teorema de la divergencia para la región del espacio D limitada por el paraboloide $z = 2 - x^2 - y^2$ y el plano $z = 0$, y para el campo $F(x, y, z) = (2x + y, 2y^2, z)$.

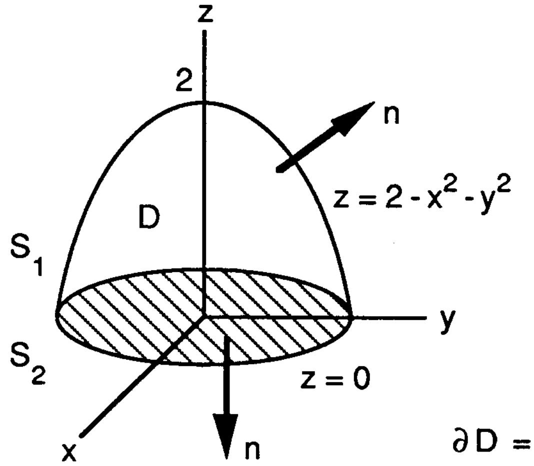
El teorema de la divergencia afirma que $\displaystyle\iint_S F \cdot n\, dS = \iiint_D \operatorname{div} F\, dx\, dy\, dz$ siendo $S = \partial D$ y cumpliéndose las demás condiciones de su enunciado.

Para verificar el teorema calcularemos ambos miembros de la igualdad en este problema concreto.

Campo: $\quad F(x, y, z) = (2x + y, 2y^2, z)$; $\qquad \operatorname{div} F = 4y + 3$

Curva intersección del paraboloide y el plano:

$$\left.\begin{array}{l} z = 2 - x^2 - y^2 \\ z = 0 \end{array}\right\} \qquad x^2 + y^2 = (\sqrt{2}\,)^2$$



En coordenadas cilíndricas:

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\theta \\ z = z \end{array}\right\} \quad J(r, \theta, z) = r$$

D se describe como:

$$\begin{array}{l} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le \sqrt{2} \\ 0 \le z \le 2 - r^2 \end{array}$$

$$\partial D = S_1 \cup S_2$$

$$\iiint_D \operatorname{div} F \, dx\, dy\, dz = \iiint_D (4y+3)\, dx\, dy\, dz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{2-r^2} (4r \operatorname{sen}\theta + 3)\, r\, dz\, dr\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} (4\, r^2 \operatorname{sen}\theta + 3\, r)\,(2 - r^2)\, dr\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\theta\, d\theta \int_0^{\sqrt{2}} 4\, r^2\,(2 - r^2)\, dr + 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} (6\, r - 3\, r^3)\, dr =$$

$$= 0 + 2\pi \left[3\, r^2 - \frac{3}{4}\, r^4 \right]_0^{\sqrt{2}} = 6\pi$$

Hacemos ahora el cálculo directo de las integrales de superficie.

S_1 paraboloide
$$\left.\begin{array}{l} x = v\cos u \\ y = v \operatorname{sen} u \\ z = 2 - v^2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 0 \le u \le 2\pi \\ 0 \le v \le \sqrt{2} \end{array}$$

$$\frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v} = (-2\, v^2 \cos u\, ,\, -2\, v^2 \operatorname{sen} u\, ,\, -v)$$

vector normal exterior: $(2\, v^2 \cos u\, ,\, 2\, v^2 \operatorname{sen} u\, ,\, v)$

$$\iint_{S_1} F \cdot n\, dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} (2\, v\cos u + v \operatorname{sen} u\, ,\, 2\, v^2 \operatorname{sen}^2 u\, ,\, 2 - v^2)\, \cdot$$

$$\cdot\, (2\, v^2 \cos u\, ,\, 2\, v^2 \operatorname{sen} u\, ,\, v)\, dv\, du =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} (4\, v^3 \cos^2 u + 2\, v^3 \operatorname{sen} u \cos u + 4\, v^4 \operatorname{sen}^3 u + 2\, v - v^3)\, dv\, du =$$

$$= \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2u)\, du \int_0^{\sqrt{2}} 2\, v^3\, dv + \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} u \cos u\, du \int_0^{\sqrt{2}} 2\, v^3\, dv +$$

$$+ \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 u) \operatorname{sen} u\, du \int_0^{\sqrt{2}} 4\, v^4\, dv + 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} (2\, v - v^3)\, dv =$$

$$= 2\pi\left[\frac{1}{2}v^4\right]_0^{\sqrt{2}} + 0 + 0 + 2\pi\left[v^2 - \frac{1}{4}v^4\right]_0^{\sqrt{2}} = 6\pi$$

S_2 plano $\left.\begin{array}{l} x = x \\ y = y \\ z = 0 \end{array}\right\}$ $x^2 + y^2 \leq 2$

vector normal exterior: (0, 0, -1)

$$\iint_{S_2} F \cdot n \, dS = \iint_{S_2} (2x + y, 2y^2, 0) \cdot (0, 0, -1) \, dx \, dy = 0$$

Por lo tanto: $\iint_S F \cdot n \, dS = \iint_{S_1} F \cdot n \, dS + \iint_{S_2} F \cdot n \, dS = 6\pi$

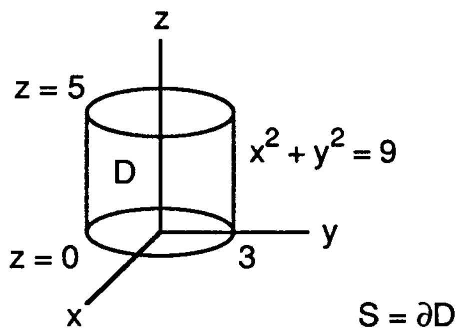
y queda comprobado que: $\iint_S F \cdot n \, dS = \iiint_D \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz$

4.24 Calcular las integrales de superficie de los campos vectoriales F sobre las superficies S que se indican:

(a) F (x, y, z) = (x + y , y + z , x + z)
S ≡ frontera del sólido limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 9$ y los planos $z = 0$, $z = 5$.

Al tratarse de una superficie cerrada podemos aplicar el teorema de la divergencia.

Campo: F (x, y, z) = (x + y , y + z , x + z) ; div F = 3



En coordenadas cilíndricas:

$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{array}\right\}$ $J(r, \theta, z) = r$

Descripción de D: $\begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 3 \\ 0 \leq z \leq 5 \end{array}$

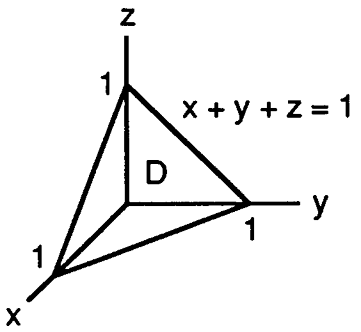
$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_D \operatorname{div}\mathbf{F}\;dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^{3}\int_0^{5} 3\,r\,dz\,dr\,d\theta =$$

$$= 3\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{3} r\,dr \int_0^{5} dz = 135\pi$$

(b) F (x, y, z) = ($3x^2$, xy , z)

S ≡ tetraedro limitado por el plano x + y + z = 1 y los planos de coordenadas.

Campo: F (x, y, z) = ($3x^2$, xy , z) ; div F = 7x + 1



Descripción de D:

$0 \le x \le 1$
$0 \le y \le 1 - x$
$0 \le z \le 1 - x - y$

S = ∂D

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_D \operatorname{div}\mathbf{F}\;dx\,dy\,dz = \int_0^{1}\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} (7x+1)\,dz\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^{1}\int_0^{1-x} (7x+1)(1-x-y)\,dy\,dx = \int_0^{1} (7x+1)\left[(1-x)y - \frac{1}{2}y^2\right]_0^{1-x} dx =$$

$$= \int_0^{1} (7x+1)\,\frac{1}{2}\,(1-x)^2\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{1} (7x^3 - 13x^2 + 5x + 1)\,dx = \frac{11}{24}$$

(c) F (x, y, z) = (3y , - xz , yz^2)

S ≡ frontera de la región limitada por el paraboloide $2z = x^2 - y^2$ y el plano z = 2.

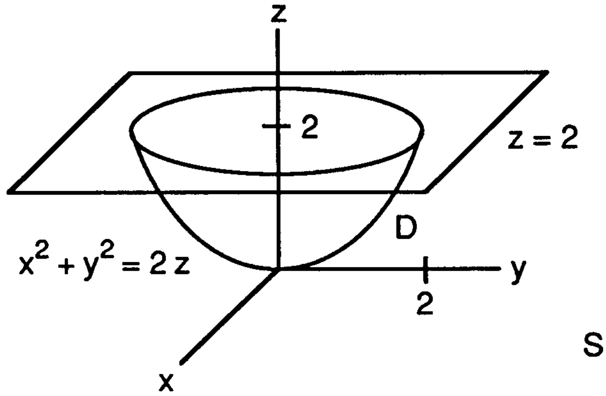
Campo: F (x, y, z) = (3y , - xz , yz^2) ; div F = 2yz

Podemos aplicar el teorema de la divergencia por tratarse de una superficie cerrada.

Para determinar el dominio D interior de la superficie, buscamos la curva intersección del paraboloide y el plano:

$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=2z \\ z=2 \end{array}\right\} \qquad x^2+y^2=2^2$$

En coordenadas cilíndricas:
$$\left.\begin{array}{l} x=r\cos\theta \\ y=r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z=z \end{array}\right\} \quad J(r,\theta,z)=r$$



Descripción de D:

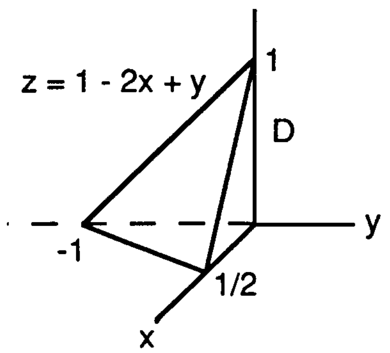
$$0\le\theta\le 2\pi$$
$$0\le r\le 2$$
$$\frac{1}{2}r^2\le z\le 2$$

$S=\partial D$

$$\iint_S F\cdot n\,dS = \iiint_D 2yz\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{r^2/2}^{2} 2\,(r\,\mathrm{sen}\,\theta)\,z\;r\,dz\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\;[\,z^2\,]_{r^2/2}^{2}\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta\int_0^2\left(4r^2-\frac{1}{4}r^6\right)dr = 0$$

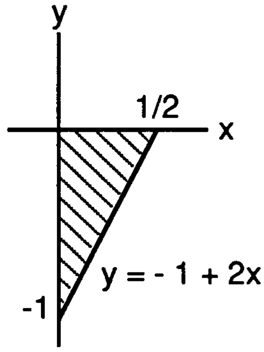
4.25 Calcular la integral del campo $F(x,y,z) = (xyz\,,\ \mathrm{sen}\,(x^2-z^2)\,,\ z-1/2\,yz^2)$ sobre la superficie formada por el plano $2x-y+z=1$ y los planos de coordenadas.



Descripción de D:

$$0\le x\le 1/2$$
$$-1+2x\le y\le 0$$
$$0\le z\le 1-2x+y$$

$S=\partial D$



Como se trata de una superficie cerrada podemos aplicar el teorema de la divergencia.

Campo: $F(x, y, z) = (xyz, \operatorname{sen}(x^2 - z^2), z - 1/2\, yz^2)$

$$\operatorname{div} F = yz + 0 + 1 - yz = 1$$

$$\iint_S F \cdot n\, dS = \iiint_D \operatorname{div} F\, dx\, dy\, dz = \int_0^{1/2} \int_{-1+2x}^{0} \int_0^{1-2x+y} 1\, dz\, dy\, dx =$$

$$= \int_0^{1/2} \int_{-1+2x}^{0} (1 - 2x + y)\, dy\, dx = \int_0^{1/2} \left[-(-1 + 2x)\, y + \frac{1}{2} y^2 \right]_{-1+2x}^{0} dx =$$

$$= \int_0^{1/2} \frac{1}{2} (-1 + 2x)^2 dx = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{3} (-1 + 2x)^3 \right]_0^{1/2} = \frac{1}{12}$$

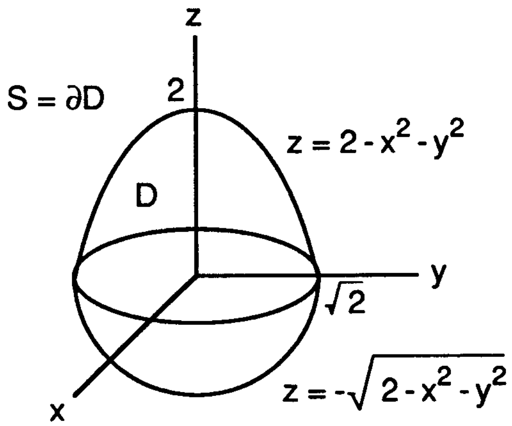
4.26 Calcular la integral del campo vectorial $F(x, y, z) = (x^2, e^x - y, 3x - \operatorname{sen} xy)$ sobre la superficie limitada por la porción del paraboloide $z - 2 = -x^2 - y^2$, para $z \geq 0$, y la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, para $z \leq 0$. ¿ Puede aplicarse el teorema de la divergencia?

Para $z \geq 0$ la superficie es el paraboloide $z - 2 = -x^2 - y^2$. Su intersección con el plano $z = 0$ es la circunferencia $x^2 + y^2 = 2$.

Para $z \leq 0$ la superficie es la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Su intersección con el plano $z = 0$ es también la circunferencia $x^2 + y^2 = 2$.

Así pues, ambas superficies intersecan el plano $z = 0$ en una misma circunferencia de centro el origen y de radio $2^{1/2}$. La unión de ambas superficies es una superficie cerrada y podrá aplicarse el teorema de la divergencia.

Campo: $F(x, y, z) = (x^2, e^x - y, 3x - \operatorname{sen} xy)$; $\operatorname{div} F = 2x + 2$



En coordenadas cilíndricas:

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{array}\right\} \quad J(r, \theta, z) = r$$

D se describe como:

$$0 \le \theta \le 2\pi$$
$$0 \le r \le \sqrt{2}$$
$$-\sqrt{2 - r^2} \le z \le 2 - r^2$$

$$\iint_S F \cdot n \, dS = \iiint_D \operatorname{div} F \, dx\,dy\,dz = \iiint_D (2x + 2)\, dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-r^2}}^{2-r^2} (2r\cos\theta + 2)\; r \; dz\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-r^2}}^{2-r^2} 2r^2\, dz\,dr + 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-r^2}}^{2-r^2} 2r\, dz\,dr =$$

$$= 0 + 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} (4r - 2r^3 + 2r\sqrt{2 - r^2})\, dr =$$

$$= 2\pi \left[2r^2 - \frac{1}{2} r^4 - \frac{1}{3/2} (2 - r^2)^{3/2} \right]_0^{\sqrt{2}} = 2\pi\,(2 + \frac{4}{3}\sqrt{2})$$

4.27 Calcular las integrales de superficie de los campos vectoriales F sobre las superficies S que se indican:

(a) $\iint_S x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy$

$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \}$

Por tratarse de una superficie cerrada, esfera de centro (0, 0, 0) y radio a, podemos aplicar el teorema de la divergencia.

Campo: $F(x, y, z) = (x, y, z)$; $\quad \operatorname{div} F = 3$

$$\iint_S x\, dy \wedge dz + y\, dz \wedge dx + z\, dx \wedge dy = \iiint_D \operatorname{div} F \; dx\, dy\, dz =$$

$$= \iiint_D 3\, dx\, dy\, dz = 3 \iiint_D 1\, dx\, dy\, dz = 3 \operatorname{Vol}(D) = 3 \frac{4}{3} \pi a^3 = 4\pi a^3$$

$S = \partial D$; D es la bola de centro el origen y radio a.

(b) $\iint_S xyz\, dy \wedge dz$

$S = \partial\, [0, 1]^3$

Como en el caso anterior, $S = \partial\, [0, 1]^3$, es una superficie cerrada por lo que podemos aplicar el teorema de la divergencia. $D = [0, 1]^3$, cubo recto de aristas de longitud 1.

Campo: $F(x, y, z) = (xyz, 0, 0)$; $\quad \operatorname{div} F = yz$

$$\iint_S xyz\, dy \wedge dz = \iiint_D \operatorname{div} F(x, y, z)\; dx\, dy\, dz = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 yz\, dz\, dy\, dx =$$

$$= [\,x\,]_0^1 \, [\,y^2/2\,]_0^1 \, [\,z^2/2\,]_0^1 = \frac{1}{4}$$

(c) $\iint_S (y \cos^2 x + y^3)\, dz \wedge dx + (x \operatorname{sen}^2 x - 3zy^2)\, dx \wedge dy$

$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x^2 + y^2 + z^2 = 4 \}$

La superficie S es la esfera de centro (0, 0, 0) y radio 2; es una superficie cerrada y podemos aplicar el teorema de la divergencia.

Campo: $F(x, y, z) = (0, y \cos^2 x + y^3, z \operatorname{sen}^2 x - 3zy^2)$

$$\operatorname{div} F = \cos^2 x + 3y^2 + \operatorname{sen}^2 x - 3y^2 = 1$$

$S = \partial D$; D es una bola de radio 2. Así pues:

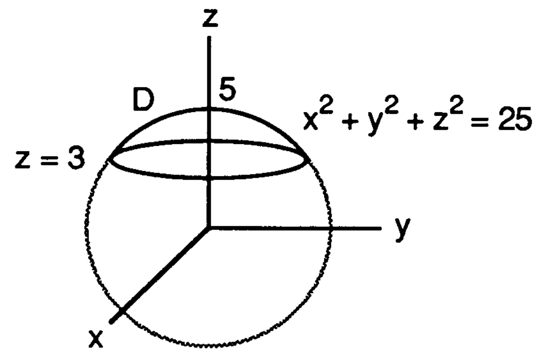
$$\iint_S (y \cos^2 x + y^3)\, dz \wedge dx + (x \operatorname{sen}^2 x - 3zy^2)\, dx \wedge dy =$$

$$= \iiint_D \operatorname{div} F \; dx\,dy\,dz = \iiint_D 1\; dx\,dy\,dz = \frac{4}{3}\pi\, 2^3 = \frac{32}{3}\pi$$

(d) $\iint_S xz\, dy \wedge dz + yz\, dz \wedge dx + dx \wedge dy$

$S = \partial D$, $D = \{ (x, y, z) \in IR^3 \;/\; x^2 + y^2 + z^2 \leq 25,\; 3 \leq z \leq 5 \}$

Se trata también de una superficie cerrada.



Curva intersección de la esfera con el plano $z = 3$:

$$\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ z = 3 \end{array}\right\} \qquad x^2 + y^2 = 4^2 \qquad \text{en } z = 3$$

Descripcion de D, interior de S, en coordenadas cilíndricas:

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{array}\right\} \quad J(r, \theta, z) = r. \qquad D \text{ resulta ser: } \begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 4 \\ 3 \leq z \leq \sqrt{25 - r^2} \end{array}$$

Campo: $F(x, y, z) = (xz, yz, 1)$; $\qquad \operatorname{div} F = 2z$

Aplicando el teorema de la divergencia:

$$\iint_S xz\, dy \wedge dz + yz\, dz \wedge dx + dx \wedge dy = \iiint_D \operatorname{div} F \; dx\,dy\,dz =$$

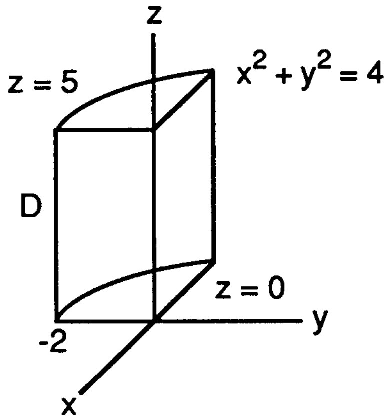
$$= \iiint_D 2z\; dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^4\int_3^{\sqrt{25-r^2}} 2z\, r\, dz\, dr\, d\theta = 2\pi \int_0^4 [\, r z^2 \,]_3^{\sqrt{25-r^2}}\, dr =$$

$$= 2\pi \int_0^4 (16\, r - r^3)\, dr = 2\pi \left[8\, r^2 - \frac{1}{4}\, r^4 \right]_0^4 = 128\, \pi$$

(e) $\iint_S 2x\, dy \wedge dz + yz\, dz \wedge dx + 3z\, dx \wedge dy$

$S = \partial D$, $D = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x^2 + y^2 \leq 4,\ x \leq 0,\ y \leq 0,\ 0 \leq z \leq 5 \}$

Al tratarse de una superficie cerrada podemos aplicar el teorema de la divergencia.



Descripción de D en cilíndricas:

$$\left. \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \theta \\ z = z \end{array} \right\} \quad J\,(r, \theta, z) = r$$

$$\pi \leq \theta \leq 3\pi/2$$
$$0 \leq r \leq 2$$
$$0 \leq z \leq 5$$

Campo: $F\,(x, y, z) = (\, 2x\, , yz\, , 3z\,)$; $\qquad$ $\operatorname{div} F = 5 + z$

$$\iint_S 2x\, dy \wedge dz + yz\, dz \wedge dx + 3z\, dx \wedge dy = \iiint_D \operatorname{div} F \ dx\, dy\, dz =$$

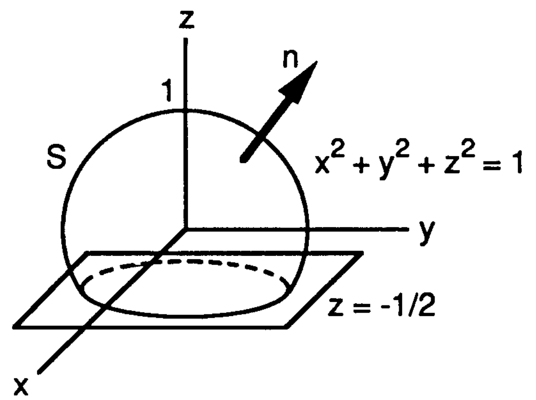
$$= \iiint_D (5 + z)\, dx\, dy\, dz = \int_\pi^{3\pi/2} \int_0^2 \int_0^5 (5 + z)\, r\, dz\, dr\, d\theta =$$

$$= \int_\pi^{3\pi/2} d\theta \int_0^2 r\, dr \int_0^5 (5 + z)\, dz = \frac{\pi}{2}\, 2\, \left(25 + \frac{25}{2} \right) = \frac{75}{2}\, \pi$$

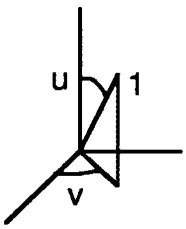
4.28 Calcular la integral de superficie $\iint_S (\operatorname{rot} F) \cdot n \ dS$ siendo el campo: $F\,(x, y, z) = (\, -y\, , x^2\, , z^3\,)$ y la superficie S: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $-1/2 \leq z \leq 1$.

S no es una superficie cerrada. No puede aplicarse directamente el teorema de la divergencia.

El enunciado se refiere exclusivamente a la superficie de la esfera, como se muestra en el dibujo:



Método de resolución 1



Parametrización de la superficie S. r = r (u, v):

$$\left.\begin{array}{l} x = \text{sen } u \cos v \\ y = \text{sen } u \text{ sen } v \\ z = \cos u \end{array}\right\} \qquad u, v \in T$$

Determinación del dominio de parámetros T:

$$\frac{-1}{2} \leq z \leq 1 \qquad \leftrightarrow \qquad \frac{-1}{2} \leq \cos u \leq 1$$

$$\cos u = 1 \ , \ u = 0 \ ; \ \cos u = -1/2 \ , \ u = 2\pi/3 \ ; \ \text{ por lo tanto: } \ u \in (0, 2\pi/3]$$

$$T = \{ \ (u, v) \ / \ 0 < u \leq 2\pi/3 \ , \ 0 \leq v \leq 2\pi \ \}$$

Determinación del vector normal a la superficie:

$$\frac{\partial r}{\partial u} = (\cos u \cos v \ , \cos u \text{ sen } v \ , - \text{sen } u)$$

$$\frac{\partial r}{\partial v} = (- \text{sen } u \text{ sen } v \ , \text{sen } u \cos v \ , 0)$$

$$\frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v} = (\text{sen}^2 u \cos v \ , \text{sen}^2 u \text{ sen } v \ , \text{sen } u \cos u)$$

que es el vector normal ascendente.

Campo: $F(x, y, z) = (-y \ , x^2 \ , z^3)$; $\quad$ rot $F = (0 \ , 0 \ , 2x + 1)$

En función de los parámetros u, v: $\quad \text{rot } F\,(u, v) = (\,0\,,0\,,2 \text{ sen } u \cos u + 1\,)$

$$\iint_S \text{rot } F \cdot n\, dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi/3} (\,0, 0, 2 \text{ sen } u \cos v + 1\,) \cdot$$

$$\cdot\,(\,\text{sen}^2 u \cos v,\ \text{sen}^2 u \text{ sen } v,\ \text{sen } u \cos u\,)\, du\, dv =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi/3} (\,2 \text{ sen}^2 u \cos u \cos v + \text{sen } u \cos u\,)\, du\, dv =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{2}{3} \text{ sen}^3 u \cos v + \frac{1}{2} \text{ sen}^2 u \right]_0^{2\pi/3} dv = \int_0^{2\pi} (\,\sqrt{3}/4 \cos v + 3/8\,)\, dv =$$

$$= \left[\frac{\sqrt{3}}{4} \text{ sen } v + \frac{3}{8}\, v \right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{4}$$

<u>Método de resolución 2</u>

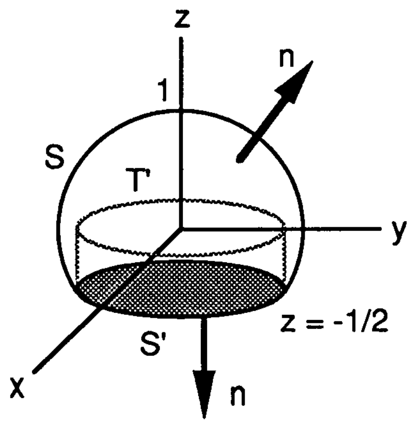
La superficie S no es cerrada, pero si consideramos $S \cup S'$ donde S' es el disco que en $z = -1/2$ tapa el agujero que deja S, podemos considerar $S \cup S'$ como superficie cerrada y allí aplicar el teorema de la divergencia.

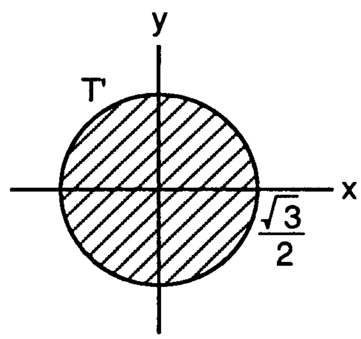
$$\iint_{S \cup S'} \text{rot } F \cdot n\, dS = \iint_S \text{rot } F \cdot n\, dS + \iint_{S'} \text{rot } F \cdot n\, dS = \iiint_D \text{div}\,(\text{rot } F)\, dx\, dy\, dz$$

siendo D tal que $\partial D = S \cup S'$

Según el problema 4.21, $\text{div}\,(\text{rot } F) = 0$, por lo que la última integral es nula y, por lo tanto:

$$\iint_S \text{rot } F \cdot n\, dS = -\iint_{S'} \text{rot } F \cdot n\, dS$$





Parametrización de S': $\left.\begin{array}{l} x = x \\ y = y \\ z = -1/2 \end{array}\right\} \quad (x, y) \in T'$

vector normal exterior: $(0, 0, -1)$

La frontera del dominio de parámetros T' resulta de la proyección sobre el plano xy de la curva intersección de la esfera con el plano $z = -1/2$.

$$\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z = -1/2 \end{array}\right\} \qquad x^2 + y^2 = 3/4$$

$$T' = \{ (x, y) \ / \ x^2 + y^2 \leq (\sqrt{3}/2)^2 \}$$

entonces:

$$\iint_S \text{rot } F \cdot n \, dS = -\iint_{S'} \text{rot } F \cdot n \, dS = -\iint_{T'} (0, 0, 2x + 1) \cdot (0, 0, -1) \, dx \, dy =$$

$$= \iint_{T'} (2x + 1) \, dx \, dy$$

En polares $\left.\begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \theta \end{array}\right\}$ $J(r, \theta) = r$, T se describe como: $\begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq \sqrt{3}/2 \end{array}$

$$\iint_S \text{rot } F \cdot n \, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}/2} (2 r \cos \theta + 1) \, r \, dr \, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos \theta \, d\theta \int_0^{\sqrt{3}/2} 2 r^2 \, dr + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}/2} r \, dr = 0 + 2\pi \frac{3}{8} = \frac{3\pi}{4}$$