SERIES DE LAURENT.

Diremos que la serie $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge si las series $\sum_0^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ y $\sum_{-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n$ son convergentes.

Supongamos que R_2, con $0 < R_2 \leq +\infty$ es el radio de convergencia de la serie $\sum_0^{\infty} a_n(z-z_0)^n$. Sea $\xi = \frac{1}{z-z_0}$ y R, con $0 < R \leq +\infty$, el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\xi^n = \sum_{-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n$. Entonces cuando $|\xi| < R$ (equivalentemente cuando $|z-z_0| > \frac{1}{R} = R_1$) la serie $\sum_{-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n$ converge absolutamente y uniformemente sobre toda parte acotada contenida en $|z-z_0| > \frac{1}{R} = R_1$. Si $R_1 < R_2$ obtenemos el anillo $R_1 < |z-z_0| < R_2$ en el que ambas series convergen. Obtenemos el siguiente resultado:

Teorema. *Sea*

$$A = \{z : R_1 < |z-z_0| < R_2; 0 \leq R_1 < R_2 \leq +\infty\}$$

el anillo común de convergencia de la serie $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$. *Entonces la serie converge absolutamente y uniformemente sobre todo acotado del anillo A, y su suma define una función holomorfa en A.*

Problema inverso.

Supongamos que f es holomorfa en

$$A = \{z : R_1 < |z-z_0| < R_2; 0 \leq R_1 < R_2 \leq +\infty\}.$$

¿Puede f representarse en dicho anillo por una serie del tipo $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$? La respùesta es afirmativa.

Vamos a denotar por $A = A^+ \cap A^-$ con $A^+ = D(z_0; R_2)$ y $A^- = \{z : |z-z_0| > R_1\}$.

Teorema. *Sea*

$$A = \{z : R_1 < |z-z_0| < R_2; 0 \leq R_1 < R_2 \leq +\infty\}.$$

Cada función f holomorfa en A es representable en A a través de una única serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

que converge normalmente en A hacia f. Además $\forall n \in \mathbb{Z}$ y $\forall \rho$ con $R_1 < \rho < R_2$ se verifica

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_\rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0)^{n+1}} d\xi ; S_\rho = \{z : |z - z_0| = \rho\}$$

D) Paso (1). Si f es holomorfa en A, entonces

$$\int_{S_\rho} f d\xi = \int_{S_\gamma} f d\xi, \forall \rho, \gamma \text{ con } R_1 < \rho \leq \gamma < R_2$$

D) Vamos a suponer $z_0 = 0$. Cada función f holomorfa en A se puede escribir de la forma $f(z) = z^{-1} g(z)$, $z \neq 0$, con g holomorfa en A. Luego es suficiente con probar que para cada g holomorfa en A la función

$$J(t) := \int_{S_t} \frac{g(\xi)}{\xi} d\xi = i \int_0^{2\pi} g(te^{i\varphi}) d\varphi ; t \in (R_1, R_2)$$

es constante.

$J(t)$ es diferenciable en sentido real y

$$J'(t) = i \int_0^{2\pi} \frac{d}{dt} \left(g(te^{i\varphi}) \right) d\varphi = i \int_0^{2\pi} g'(te^{i\varphi}) e^{i\varphi} d\varphi =$$

$$t^{-1} \int_{S_t} g'(\xi) d\xi = 0, t \in (R_1, R_2)$$

con lo que finalizamos la prueba. La idea es que

$$\int_{S_\rho} f d\xi = \int_{S_\gamma} f d\xi, \forall \rho, \gamma \text{ con } R_1 < \rho \leq \gamma < R_2$$

debido a que S_ρ y S_γ se pueden "deformar" de manera continua y pasar de uno a otro sin salirnos de A.

Paso(2) **Fórmula integral de Cauchy para un anillo.**

Sea $f \in H(\Omega)$. Supongamos que el anillo A está incluído en Ω, con $\overline{A} \subset \Omega$. Entonces

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial A}\frac{f(\xi)}{(\xi - z)}d\xi =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial A^+}\frac{f(\xi)}{(\xi - z)}d\xi - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial A^-}\frac{f(\xi)}{(\xi - z)}d\xi, \forall z \in A$$

D) Fijemos $z \in A$. La función

$$g(\xi) := \begin{matrix} \frac{f(\xi)-f(z)}{\xi - z}, & \xi \in \Omega\setminus\{z\} \\ f'(\xi), & \xi = z \end{matrix}$$

es continua en Ω y holomorfa en $\Omega\setminus\{z\}$. Por el teorema de prolongación de Riemann, de hecho es holomorfa en Ω. Aplicamos el paso 1 y obtenemos

$$\int_{\partial A^+}\frac{f(\xi)-f(z)}{\xi - z}d\xi = \int_{\partial A^-}\frac{f(\xi)-f(z)}{\xi - z}d\xi,$$

en particular

$$\int_{\partial A^-}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi - f(z)\int_{\partial A^-}\frac{d\xi}{\xi - z} =$$

$$\int_{\partial A^+}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi - f(z)\int_{\partial A^+}\frac{d\xi}{\xi - z}$$

La prueba concluye si tenemos en cuenta que

$$\int_{\partial A^-}\frac{d\xi}{\xi - z} = 0 \text{ y } \int_{\partial A^+}\frac{d\xi}{\xi - z} = 2\pi i$$

Paso 3. Si f es holomorfa en $A = A^+ \cap A^-$, entonces existen dos funciones holomorfas $f^+ \in H(A^+)$ y $f^- \in H(A^-)$ tales que

$$f = f^+ + f^- \text{ en } A \text{ y } lim_{z\longrightarrow\infty} f^-(z) = 0.$$

estas condiciones determinan univocamente a las funciones f^+ y f^-. Además para cada ρ, con $R_1 < \rho < R_2$ se verifica

$$f^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{S_\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)} d\xi, z \in B(z_0;\rho)$$

$$f^-(z) = \frac{(-1)}{2\pi i}\int_{\partial A} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)} d\xi, z \in \mathbb{C}\backslash\overline{B}(z_0;\rho)$$

D) Existencia.

La función

$$f_\rho^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{S_\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)} d\xi, z \in B(z_0;\rho)$$

es holomorfa en $B(z_0;\rho)$. (Ver holomorfía de las funciones definidas por integrales). Por el paso 1,

$$\forall\sigma(\rho, R_2), f_\rho^+ = f^+_{\sigma|B(z_0;\rho)}.$$

Por consiguiente existe una función $f^+ \in H(A^+)$ que coincide con $f_\rho^+(z)$ en cada $B(z_0;\rho)$. Analogamente existe una función $f^- \in H(A^-)$, definida por

$$f^-(z) := f_\rho^-(z) := \frac{(-1)}{2\pi i}\int_{S_\sigma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)} d\xi, .$$

$$R_1 < \sigma < \min\{R_2, |z - z_0|\}$$

Aplicando este proceso a todos los anillos A' centrados en z_0, con $\overline{A'} \subset A$, probamos que la representación $f = f^+ + f^-$ se verifica en A. Además

$$\left|f^-(z)\right| \leq \sigma \max_{\xi \in S_\sigma} \left|f(\xi)(\xi - z)^{-1}\right| \leq \frac{\sigma}{|z - z_0| - \sigma} \left|f\right|_{S_\sigma}.$$

Por consiguiente

$$lim_{z \longrightarrow \infty} f^-(z) = 0$$

Unicidad. Sean $g^+ \in H(A^+)$ y $g^- \in H(A^-)$ tales que

$$f = g^+ + g^- \text{ en } A \text{ y } lim_{z \longrightarrow \infty} g^-(z) = 0.$$

Entonces

$$f^+ - g^+ = g^- - f^- \text{ en } A.$$

Por consiguiente la función

$$h := \begin{array}{ll} f^+ - g^+ & \text{en } A^+ \\ g^- - f^- & \text{en } A^- \end{array}$$

es entera y

$$lim_{z \longrightarrow \infty} h(z) = 0.$$

El teorema de Liouville nos dice que h es identicamente nula, es decir $f^+ = g^+$ y $g^- = f^-$.

Paso 4. Sea $f = f^+ + f^-$ en $A = A^+ \cap A^-$. (Paso 3).

Es conocido que f^+ tiene un desarrollo de Taylor $\sum a_n(z - z_0)^n$ en $A^+ = D(z_0; R_2)$.

La aplicación

$$\omega \longrightarrow z := z_0 + \omega^{-1} \text{ de } D(0; R_1^{-1}) \setminus \{0\}$$

$$\text{sobre } A^- = \{z : |z - z_0| > R_1\}$$

es biholomorfa con inversa

$$z \longrightarrow \omega = (z - z_0)^{-1}.$$

Por consiguiente la función

$$g(\omega) := f^-(z_0 + \omega^{-1}); \omega \in D(0; R_1^{-1}) \setminus \{0\}$$

es holomorfa y

$$\lim_{\omega \longrightarrow 0} g(\omega) = lim_{z \longrightarrow \infty} f^-(z) = 0.$$

El teorema de prolongación de Riemann nos dice que haciendo $g(0) = 0$, $g \in H(D(0; R_1^{-1}))$. Por consiguiente g admite en dicho disco un desarrollo $g(\omega) = \sum_{m \geq 1} b_m \omega^m$ que converge normalmente en $D(0; R_1^{-1})$. Es decir,

$$f^-(z) = g((z - z_0)^{-1}) = \sum_{n \geq 1} b_n (z - z_0)^{-n},$$

$z \in A^-$ con convergencia normal.

Con la notación $b_n = a_{-n}$, $n \geq 1$, obtenemos $f^-(z) = \sum_{-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n$ y en conclusión

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \text{ con convergencia normal en } A.$$

Unicidad.

La unicidad del desarrollo anterior queda probada sin más que observar que

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \text{ si } R_1 < \rho < R_2; n \in \mathbb{Z}$$

En efecto, sea $m \in \mathbb{Z}$. Entonces

$$(z-z_0)^{-m-1}f(z) = \sum_{-\infty}^{-1} a_{n+m+1}(z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m+1}(z-z_0)^n.$$

Al ser la convergencia normal, podemos integrar término a término para obtener (sólo los sumandos con $n = -1$ sobreviven)

$$\int_{S_\rho} (z-z_0)^{-m-1} f(z)dz = a_m \int_{S_\rho} (z-z_0)^{-1} dz = 2\pi i a_m.$$

En el desarrollo

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n + f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n,$$

llamaremos a

$$\sum_{-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n \equiv \text{Parte principal}$$

y

$$\sum_{0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \equiv \text{Parte regular}$$

Ejemplos.

Sólo en casos muy raros se utiliza la fórmula anterior de los coeficientes para determinar de desarrollo de Laurent de una función holomorfa en un anillo.

Ejemplos.

Sea $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$. Sea z_0 con $\operatorname{Im} z_0 > 0$. Si $R_1 = |i - z_0|$ y $R_2 = |z_0 + i|$, f es holomorfa en el anillo

$$A = \{z : R_1 < |z - z_0| < R_2\}.$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2i}\frac{1}{z-i} + \frac{(-1)}{2i}\frac{1}{z+i},$$

si

$$f^+(z) = \frac{(-1)}{2i}\frac{1}{z+i} \text{ y } f^-(z) = \frac{1}{2i}\frac{1}{z-i},$$

resulta que

$$f = f^+_{|A} + f^-_{|A}$$

es el desarrollo de Laurent de f en A.

$$f^+(z) = \frac{(-1)}{2i(i+z_0)}\frac{1}{1+\frac{z-z_0}{i+z_0}} =$$

$$\sum_0^\infty \frac{1}{2i}\frac{(-1)^{n+1}}{(i+z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n, |z-z_0| < R_2$$

$$f^-(z) = \frac{1}{2i(z-z_0)}\frac{1}{1-\frac{i-z_0}{z-z_0}} =$$

$$\sum_{-\infty}^{-1} \frac{1}{2i}\frac{1}{(i-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n, |z-z_0| > R_1$$

En el anillo $0 < |z| < \infty$ obtenemos:

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + ... + (-1)^{n-1}\frac{z^{2n-2}}{(2n-1)!} + ...$$

$$\frac{\sin z}{z^2} = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + ... + (-1)^{n-1}\frac{z^{2n-3}}{(2n-1)!} + ...$$

$$\sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + ... + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!z^{2n-1}} + ...$$

En el caso de funciones del tipo

$$f(z) = \frac{z+1}{2z^2 - z - 6}$$

los anillos máximos para el desarrollo de Laurent son

$$3/2 < |z| < 2 \text{ y } 2 < |z| < \infty$$

Singularidades.

Diremos que z_0 es una singularidad aislada de f si existe un abierto Ω con $z_0 \in \Omega$ y $f \in H(\Omega \backslash \{z_0\}$. En particular en este caso existe $r > 0$ con $f \in H(D^*)$, $D^* = (D(z_0; r) \backslash \{z_0\}) \subset \Omega$.

Teniendo en cuenta el desarrollo de Laurent, en el caso de ser z_0 una singularidad aislada de f, podemos escribir:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, 0 < |z - z_0| < r \\ a_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{S_\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi; n = 0, {}^{+}_{-}1, {}^{+}_{-}2, {}^{+}_{-}3, ... \end{aligned}$$

S_ρ es cualquier círculo de centro z_0 y radio ρ, con $0 < \rho < r$.

Def.

$$a_{-1} \equiv \operatorname{Re} s(f; z_0) \equiv \text{residuo de } f \text{ en } z_0.$$

Si $a_n = 0$ para $n = -1, -2, -3, ...$obtenemos que

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, 0 < |z - z_0| < r.$$

En este caso si definimos $f(z_0) = a_0$, resulta que

$$f(z) = \sum_0^{\infty} a_n (z - z_0)^n, 0 \leq |z - z_0| < r$$

y f es holomorfa en un entorno de z_0. Cuando esto ocurra diremos que z_0 es una singularidad aislada evitable.

Para las singularidades evitables las series de Laurent y de Taylor coinciden.

Ejemplos.

- $z_0 = 1$ es evitable para la función $\frac{z^2-1}{z-1}$
- $z_0 = 0$ es evitable para la función $\frac{z}{e^z-1}$.

Si la serie de Laurent tiene un número finito de potencias negativas de $(z - z_0)$, es decir si

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-(m-1)}}{(z-z_0)^{m-1}} + ... + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} +$$

$$\sum_0^{\infty} a_n (z - z_0)^n; a_{-m} \neq 0, 0 < |z - z_0| < r$$

diremos que z_0 es un polo de orden m. (Polo simple cuando $m = 1$). En este caso la función

$$(z - z_0)^m f(z)$$

tiene en z_0 una singularidad evitable y se verifica

$$a_{-m} = \lim_{z \longrightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z)$$

Observación

Sea $m \geq 1, f \in H(\Omega \setminus \{z_0\}), z_0 \in \Omega$. TFAE

(i) f tiene en z_0 un polo de orden m.

(ii) Existe $g \in H(\Omega)$ con $g(z_0) \neq 0$, tal que

$$f(z) = g(z)(z - z_0)^{-m}, z \in \Omega \setminus \{z_0\}$$

(iii) Existe U entorno de $z_0, U \subset \Omega$, y existe $h \in H(U)$, sin ceros en $U \setminus \{z_0\}$, con z_0, un cero de orden m para h, tales que

$$f = 1/h \text{ en } U \setminus \{z_0\}$$

(iv) Existen U entorno de $z_0, U \subset \Omega$ y constantes positivas M_* y M^* tales que para cada $z \in U \setminus \{z_0\}$ se verifica

$$M_* |z - z_0|^{-m} \leq |f(z)| \leq M^* |z - z_0|^{-m}$$

D) (i) implica (ii).

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{a_{-(m-1)}}{(z - z_0)^{m-1}} + ... + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} +$$

$$\sum_0^\infty a_n (z - z_0)^n ; a_{-m} \neq 0, 0 < |z - z_0| < r$$

Si definimos

$$g(z) = (z - z_0)^m f(z), z \in \Omega \setminus \{z_0\}$$

obtenemos que $g \in H(\Omega \setminus \{z_0\})$. Por otro lado

$$\lim_{z \longrightarrow z_0} g(z) = a_{-m} \neq 0,$$

es decir, el teorema de prolongación de Riemann nos dice que g admite una extensión holomorfa a Ω.

(ii) implica (iii). Consideramos $U \subset \Omega$ un entorno de z_0 en el que $g(z) \neq 0, \forall z \in U$. En este caso la función

$$h(z) = \frac{(z - z_0)^m}{g(z)} \in H(U),$$

por consiguiente $f = 1/h$ en $U\setminus\{z_0\}$ y z_0 es un cero de h de orden m.

(iii) implica (iv)

Sabemos que en $U\setminus\{z_0\}$, $f(z) = \frac{1}{h(z)}$, que h no tiene ceros en $U\setminus\{z_0\}$ y que z_0 es un cero de orden m para h. Por consiguiente $h(z) = (z - z_0)^m h_1(z)$ con h_1 holomorfa en un entorno de z_0 y $h_1(z_0) \neq 0$. Sea W entorno de z_0, r y s tales que

$$\forall z \in W, 0 < r < |h_1(z)| < s.$$

En este caso

$$\forall z \in W, 0 < \frac{1}{s} < \frac{1}{|h_1(z)|} < \frac{1}{r}.$$

Definimos

$$M_* = \inf\left\{|h_1(z)|^{-1} : z \in W\right\} \geq \frac{1}{s} > 0$$

$$M^* = \sup\left\{|h_1(z)|^{-1} : z \in W\right\} \leq \frac{1}{r} < \infty$$

Concluímos que

$$\forall z \in W\setminus\{z_0\}, M_* |z - z_0|^{-m} \leq |f(z)| \leq M^* |z - z_0|^{-m}$$

(iv) implica (i) Por hipótesis $(z - z_0)^m f(z)$ está acotada en $U\setminus\{z_0\}$ y $(z - z_0)^{m-1} f(z)$ no está acotada en ningún disco perforado de centro z_0, y por consiguiente z_0 es un polo de oreden m.

Corolario. Si z_0 es una singularidad aislada de f, entonces

$$z_0 \text{ es un polo de } f \iff \lim_{z \longrightarrow z_0} f(z) = \infty$$

En este caso si definimos $f(z_0) = \infty$, hacemos a f una función continua en un entorno de z_0 con valores en el plano ampliado.

Observación. Si f tiene en z_0 un polo de orden m, entonces

$$f'(z) = \frac{-ma_{-m}}{(z-z_0)^{m+1}} + ... + \frac{-a_{-1}}{(z-z_0)^2} + \widetilde{f}'(z); 0 < |z - z_0| < r$$

con

$$\widetilde{f}(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, ma_{-m} \neq 0 \text{ y } \operatorname{Re} s(f' : z_0) = 0$$

Conclusión: El 1 nunca es el orden de un polo de la derivada de una función holomorfa cuyas singularidades aisladas son polos. Esta afirmación puede mejorarse, en efecto

Proposición. No existe función holomorfa, con singularidades aisladas de cualquier naturaleza, cuya derivada tenga un polo de orden 1.

D) Si f es holomorfa en $\Omega \backslash \{z_0\}$, $z_0 \in \Omega$ y f' tiene un polo de orden k en z_0, entonces $k \geq 2$ y f tiene en z_0 un polo de orden $(k-1)$ ya que (supongamos $z_0 = 0$)

$$f'(z) = d_k z^{-k} + ... + d_1 z^{-1} + h(z); 0 < |z - z_0| < r, h \in H(D(z_0; r)).$$

Sea D_1 un disco incluído en $D = D(z_0; r)$ con $\overline{D_1} \subset D(z_0; r)$. Entonces

$$\int_{\partial D_1} f' d\xi = 0 = 2\pi i d_1 + \int_{\partial D_1} h d\xi.$$

Sabemos que $\int_{\partial D_1} h d\xi = 0$, de donde deducimos que $d_1 = 0$. De la propiedad $d_k \neq 0$ deducimos $k \geq 2$.

Sea $F \in H(D)$ una primitiva de $h_{|D}$. Si

$$G(z) = \frac{-1}{k-1} d_k z^{-(k-1)} + ... + (-d_2) z^{-1} + F(z); z \in D \backslash \{0\}$$

entonces $f' = G'$ y $f = G + const.$ en $D \setminus \{0\}$. Concluímos que $z = 0$ es un polo de f de orden $(k-1)$.

Ejemplos.
- $z = 0$ es un polo simple de $\frac{\sin z}{z^2}$
- $z = i$ es un polo de oreden 4 de $\frac{1}{(z-i)^4}$

Singularidades esenciales. Sea

$$f \in H(\Omega \setminus \{z_0\}), z_0 \in \Omega, f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n 0 < |z-z_0| < r.$$

Si existen infinitos coeficientes $a_n \neq 0$, con $n = -1, -2, -3, ...$diremos que z_0 es una singularidad aislada esencial

Ejemplos.
- $z = 0$ es esencial para $e^{1/z}$.
- $z = 0$ es esencial para $sin\,(1/z)$.

Observación.

Si z_0 es una singularidad aislada de f, entonces la parte principal $\sum_{-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n$ es una función holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ y $\lim_{z \longrightarrow \infty} (\sum_{-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n) = 0$. (Es la f^- holomorfa en A^-).

Sea

$$f \in H(\Omega \setminus \{z_0\}), z_0 \in \Omega, f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, 0 < |z-z_0| < r.$$

Sea $\Gamma = \{z : |z-z_0| = r\}$. Entonces

$$\int_\Gamma f(z)dz = a_{-1} \int_\Gamma \frac{d\xi}{(\xi - z_0)} = 2\pi i a_{-1}.$$

Por consiguiente

$$Res(f : z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z)dz.$$

Por otra parte si

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n, 0 < |z - z_0| < r,$$

entonces

$$f(z) - \frac{a_{-1}}{(z - dz_0)} \text{ admite una primitiva en } 0 < |z - z_0| < r$$

ya que

$$F(z) = \sum_{n \neq -1} \frac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1} \text{ es holomorfa en } 0 < |z - z_0| < r$$

y

$$F'(z) = f(z) - \frac{a_{-1}}{(z - z_0)}.$$

Teorema de Casorati-Weierstrass.

Si z_0 es una singularidad aislada esencial de f en Ω, entonces para cada $r > 0$ con $D^*(z_0; r) \subset \Omega$ se verifica

$$f(D^*(z_0; r)) \text{ es denso en } \mathbb{C}.$$

D) En caso contrario existirian $r > 0, z_1 \in \mathbb{C}$ y $\epsilon > 0$ tales que $|f(z) - z_1| \geq \epsilon, \forall z \in D^*(z_0; r)$. En este caso la función

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - z_1} \text{ es holomorfa en } D^*(z_0; r) \text{ y acotada por } \epsilon^{-1}.$$

Es decir z_0 es evitable para g. Por consiguiente $f(z) = z_1 + \frac{1}{g(z)}$ tiene en z_0 una singularidad evitable, si $\lim_{z \longrightarrow z_0} g(z) \neq 0$, y tiene un polo si $\lim_{z \longrightarrow z_0} g(z) = 0$. En ambos casos llegamos a una contradicción con la hipótesis.