Análisis de Funciones de Variable Compleja. Grupo U. Curso 2014-15
Práctica 3.

1.- Probar el Teorema Fundamental del Álgebra utilizando:

(i) La Fórmula de Contar Ceros y Polos.

(ii) El Teorema de Rouché.

2.- Sea $\lambda > 1, \lambda \in \mathbb{R}$ y $f(z) = \lambda - z - e^{-z}$. Probar que f tiene exactamente un cero en $\operatorname{Re} z \geq 0$. Demostrar que dicho cero es real y pertenece a $\{z : |z - \lambda| < 1\}$

3.- Sea $\lambda > 1, \lambda \in \mathbb{R}$ y $f(z) = ze^{\lambda - z} - 1$. Probar que f tiene exactamente un cero en el disco unidad. Demostrar que dicho cero es real y positivo.

4.- Sea $\Omega = \mathbb{C} \backslash T$, donde $T = \{z : |z| < R\}, 0 \in T$ y T es cerrado y conexo. Probar que si f tiene una primitiva en $A = \{z : |z| > R\}$ también la tiene en Ω. Aplicar lo anterior para probar que la función

$$g(z) = \frac{e^{1/z^2}}{z^2 - 1}$$

tiene una primitiva en $\mathbb{C} \backslash [-1, 1]$.

5.- Sea $A \subset \mathbb{C} \backslash \{0\}$ finito y $f \in H(\mathbb{C} \backslash A)$. Se considera la función $g(z) = zf(z^2)$, definida en $\mathbb{C} \backslash B$, donde $B = \{b : b^2 \in A\}$. Demostrar que g presenta en cada $b \in B$ el mismo tipo de singularidad que f presenta en $a = b^2$ (si es polo con la misma multiplicidad) y que $\operatorname{Re} s(g; b) = (1/2) \operatorname{Re} s(f; a)$

6.- Singularidades aisladas en el ∞.

Sea $D^*(\infty; r) = \{z : |z| > 1/r\}$ y $D(\infty; r) = D^*(\infty; r) \cup \{\infty\}$

Diremos que f tiene una singularidad aislada en ∞ si $f \in H(\Omega)$ y $D^*(\infty; r) \subset \Omega$.

- Diremos que ∞ es evitable si $f(1/z)$ tiene en $z = 0$ una singularidad evitable.

- Diremos que ∞ es un polo si $f(1/z)$ tiene en $z = 0$ un polo.

- Diremos que ∞ es esencial si $f(1/z)$ tiene en $z = 0$ una singularidad esencial.

Si

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

es el desarrollo de Laurent de f en $D^*(\infty; r) \subset \Omega$ y $M = \{n \in \mathbb{Z} : a_n \neq 0\}$ obtenemos:

a) ∞ es evitable si, y sólo si, $SupM \leq 0$.

b) ∞ es polo de oreden m si, y sólo si, $SupM = m > 0$.

c) ∞ es esencial si, y sólo si, $SupM = +\infty$.

∞ es polo de orden m de $f \Longleftrightarrow f(1/z)$ tiene en $z = 0$ un polo de orden $m \Longleftrightarrow 1/f$ es holomorfa en $D(\infty; r)$, con un cero de multiplicidad m en $\infty \Longleftrightarrow 1/f(1/z)$ tiene en $z = 0$ un cero de multiplicidad m.

Definimos $\operatorname{Re} s(f; \infty) = \operatorname{Re} s(g; 0)$ donde $g(z) = -f(1/z)/z^2$.

Si $S \subset \mathbb{C}$ es finito y $f \in H(\mathbb{C} \backslash S)$ probar que

$$\sum_{a \in S} \operatorname{Re} s(f; a) + \operatorname{Re} s(f; \infty) = 0$$

7.- Probar que para cada $n \in \mathbb{N}$, la función

$$f(z) = \frac{1}{z \sin \pi z}$$

no tiene primitiva en

$$A_n = \{z : n + 1/2 < |z - 1/2| < n + 3/2\}$$

8.- Sea f holomorfa en $\mathbb{C}$ tal que

$$\frac{f(z)}{z^2 + 1}$$

posee raíz cúbica holomorfa en $|z| > 1$. Probar que f se anula en algún punto del disco $|z| \leq 1$.

9.- Sea $r > 1$ y $f \in H(D(0; r))$ tal que $|f(z)| < 1$ si $|z| = 1$. Probar que existe $a \in D(0; 1)$ tal que $f(a) = a$ y $f'(a) \neq 1$.

10.- Determinar el número de ceros de cada polinomio en el abierto que se indica:

$$z^8 - 4z^5 + z^2 - 1 \text{ en } D(0; 1)$$

$$z^5 - z + 16 \text{ en } \{z : 1 < |z| < 2\}$$

$$z^4 + 26z + 2 \text{ en } \{z : 3/2 < |z| < 3\}$$

11.- Demostrar que desde un valor de n en adelante todos los ceros del polinomio

$$p_n(z) = 1 + 2z + ... + nz^{n-1}$$

están en $\{z : |z| > \rho\}$ con $0 < \rho < 1$.

12.- Sea Ω abierto y conexo, $(f_n) \subset H(\Omega)$, $f \in H(\Omega)$.Si cada f_n no tiene ceros en Ω y (f_n) converge a f uniformemente sobre los compactos de Ω , probar que $f \equiv 0$ en Ω o f no tiene ceros en Ω.

13.- Sea Ω abierto y conexo, $(f_n) \subset H(\Omega)$, $f \in H(\Omega)$.Si cada f_n es inyectiva y (f_n) converge a f uniformemente sobre los compactos de Ω, probar que f es constante en Ω o f es inyectiva en Ω.