El espacio $C(\Omega)$

Sea Ω un abierto del plano complejo y $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Denotaremos por $C(\Omega)$ el espacio vectorial de todas las funciones continuas de Ω en $\mathbb{k}$. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$K_n = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq n\} \cap \left\{z \in \mathbb{C} : d(z, \mathbb{C} \backslash \Omega) \geq \frac{1}{n}\right\}$$

resulta que:

-$\{K_n\}$ es una sucesión creciente de compactos en Ω.

-$\cup_n K_n = \Omega$.

-Para cada $n, K_n \subset int(K_{n+1})$.

-Para todo compacto K incluido en Ω, existe n tal que $K \subset K_n$.

Si $f, g \in C(\Omega)$ y $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$\varrho_n(f, g) = \sup\{|f(z) - g(z)| : z \in K_n\}$$

y

$$\varrho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\varrho_n(f, g)}{1 + \varrho_n(f, g)}$$

Se comprueba fácilmente que ϱ es una distancia en $C(\Omega)$ y por consiguiente podemos considerar el espacio métrico $(C(\Omega), \varrho)$.

La relación entre la proximidad de dos funciones respecto a la distancia ϱ y la proximidad de éstas cuando se restringen a un compacto viene dada por el siguiente lema.

Lema

(i) Para cada $\epsilon > 0$,existen $\delta > 0$ y $K \subset \Omega$ compacto, tales que si $f, g \in C(\Omega)$ y $\sup\{|f(z) - g(z)| : z \in K\} < \delta$, *entonces $\varrho(f, g) < \epsilon$.*

(ii) Para cada $\delta > 0$ y cada $K \subset \Omega$ compacto, existe un $\epsilon > 0$ tal que si $f, g \in C(\Omega)$ y $\varrho(f, g) < \epsilon$, entonces $\sup\{|f(z) - g(z)| : z \in K\} < \delta$.

Como corolario del resultado anterior se obtiene la siguiente caracterización de los abiertos y la convergencia de sucesiones para la distancia ϱ.

Corolario

(i) $A \subset C(\Omega)$ es $\varrho-$abierto $\Longleftrightarrow$ Para cada $f \in A$, existen $\delta > 0$ y $K \subset \Omega$ compacto, tales que

$$\{g \in C(\Omega) : |g(z) - f(z)| < \delta, \ z \in K\} \subset A$$

(ii) Una sucesión (f_n) en $C(\Omega)$ converge a $f \in C(\Omega)$ para $\varrho \Longleftrightarrow (f_n)$ converge a f uniformemente sobre los compactos de Ω.

Como consecuencia de los resultados anteriores resulta que la topología en $(C(\Omega), \varrho)$, denotada por τ_c , y llamada topología compacto abierta, no depende de la sucesión de compactos $\{K_n\}$ elegida. Además el espacio $(C(\Omega), \tau_c)$ es un espacio métrico completo.

La topología de la convergencia puntual

Si asociamos a cada $f \in C(\Omega)$ el conjunto $\{f(x) : x \in \Omega\}$ podemos mirar el espacio $C(\Omega)$ como un subconjunto del producto cartesiano K^{Ω}.

Definición

Definimos la toplogía τ_s, de la convergencia puntual, como la topología en $C(\Omega)$ inducida por la topología producto en K^{Ω}. Por consiguiente, dada $g \in C(\Omega)$, una base de entornos de g para τ_s viene dada por la familia:

$$V_{\{x_1,\ldots,x_n\},\epsilon}(g) = \{f \in C(\Omega) : |f(x_i) - g(x_i)| < \varepsilon, i = 1, ..., n\}$$

Como consecuencia $(f_n) \longrightarrow f$ para la topología $\tau_s \Longleftrightarrow (f_n) \longrightarrow f$ puntualmente.

Conjuntos equicontinuos en $C(\Omega)$

Diremos que un subconjunto H de $C(\Omega)$ es equicontinuo si para cada $z_0 \in \Omega$, y cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que toda $f \in H$ satisface

$$|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$$

si $z \in \Omega$ y $|z - z_0| < \delta$.

Lema

(i) Sobre los subconjuntos equicontinuos de $C(\Omega)$ las topologías τ_c y τ_s coinciden.

(ii) La clausura de todo subconjunto equicontinuo, respecto a la topología τ_s, es también un subconjunto equicontinuo.

Estamos ya en condiciones de probar uno de los teoremas, sobre compacidad, más importantes de la teoría de los espacios de funciones.

Teorema de Ascoli

Sea H un subconjunto de $C(\Omega)$. Se verifica:

$$H \text{ es } \tau_c - \text{relativamente compacto} \iff H \text{ es equicontinuo y}$$

$$\text{para cada } z \in \Omega \text{ el conjunto } H(z) = \{f(z) : f \in H\} \text{ es acotado en } \Bbbk$$

Demostración

$\Longleftarrow$) Por el lema anterior $\overline{H}^{\tau_s} = \overline{H}^{\tau_c}$. Por otra parte

$$\overline{H}^{\tau_s} \subset \Pi_{z\in\Omega}\overline{H(z)} \text{ que es compacto en } K^{\Omega} \text{ (Teorema de Tichonov)}$$

de lo que se deduce que $\overline{H}^{\tau_s}$ es τ_s-compacto. De la equicontinuidad de $\overline{H}^{\tau_s}$, obtenemos que $\overline{H}^{\tau_s}$ es τ_c-compacto, es decir

$$\overline{H}^{\tau_s} = \overline{H}^{\tau_c} \text{ es } \tau_c - \text{ compacto}$$

$\Longrightarrow$) Para cada $z \in \Omega$ la aplicación $\pi_z : K^{\Omega} \longrightarrow \Bbbk$ definida por $\pi_z(f) = f(z)$ es continua para la topología producto. Como consecuencia $H(z) = \pi_z(H)$ es relativamente compacto, y en particular acotado en $\Bbbk$.

Finalmente probemos que H es equicontinuo. Sea $z \in \Omega$ y $\epsilon > 0$. Sea K un entorno compacto de z. Como H es τ_c-relativamente compacto, es en particular totalmente acotado para la topología τ_c. Luego existen $f_1, ..., f_n$ funciones en H tales que para cada $f \in H$, existe $j, 1 \leq j \leq n$, tal que para cada $y \in K$ se verifica $|f(y) - f_j(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Por otra parte, por la continuidad de las f_i, existen $U_1, ..., U_n$ entornos de z tales que

$$|f_i(z) - f_i(y)| \leq \frac{\epsilon}{3} \text{ si } y \in U_i$$

Luego si $f \in H$ e $y \in K \cap U_1, ..., U_n$ se verifica

$$|f(z) - f(y)| \leq |f(z) - f_j(z)| + |f_j(z) - f_j(y)| + |f_j(y) - f(y)| \leq 3.\frac{\epsilon}{3} = \epsilon,$$

es decir H es equicontonuo.

Familias normales

Una familia de funciones Φ en $(C(\Omega), \tau_c)$, diremos que es *normal* si cada sucesión en Φ admite una subsucesión convergente hacia una función de $C(\Omega)$.

Decir que Φ es normal equivale a decir que $\overline{\Phi}$ es compacto, es decir el concepto de familia normal equivale al concepto de relativamente compacto

Diremos que $H \subset C(\Omega)$ es *acotado* si para cada compacto K en Ω existe una constante $\mu_K > 0$ tal que

$$\text{Para cada } f \text{ de } H \text{ y cada } z \text{ de } K \text{ se verifica } |f(z)| \leq \mu_K$$

Estamos ya en condiciones de abordar el famoso teorema de Weierstrass.

Teorema de Weierstrass

Si una sucesión de funciones (f_n) holomorfas en Ω converge en la topología τ_c hacia una función $f \in C(\Omega)$, entonces f es holomorfa en Ω y para cada $k \geq 1$, (f_n^k) converge en la topología τ_c a f^k.

Demostración

Sea Δ un triángulo contenido en un disco $D \subset \Omega$. La convergencia uniforme de (f_n) a f sobre $\partial\Delta$ nos dice que

$$\int_{\partial\Delta} f = \lim_n \int_{\partial\Delta} f_n = 0$$

Luego $f \in H(D)$. El disco D era arbitrario, luego obtenemos $f \in H(\Omega)$.

Consideremos ahora

$$\overline{D}(z_0; r) \subset \overline{D}(z_0; R) \subset \Omega \text{ con } r < R$$

y γ la circunferencia $|z - z_0| = R$. La fórmula integral de Cauchy nos dice

$$f_n^k(z) - f^k(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f_n(\xi) - f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} d\xi \text{ si } z \in \overline{D}(z_0; r).$$

Luego

$$\left| f_n^k(z) - f^k(z) \right| \leq k! \frac{R.M_n}{(R - r)^{k+1}} \text{ si } z \in \overline{D}(z_0; r),$$

donde

$$M_n = \sup \left\{ |f_n(\xi) - f(\xi)| : |\xi - z_0| = R \right\}.$$

Por la convergencia uniforme sobre compactos

$(M_n) \to 0$ y por consiguiente $(f_n^k) \to f^k$ uniformemente sobre $|z - z_0| \leq r$.

Para obtener el resultado en general basta observar que si K es un compacto de Ω y $0 < r < d(K, \partial\Omega)$, podemos elegir $\{a_1, ..., a_n\} \subset K$ tales que

$$K \subset \cup_{j=1}^{n} D(a_j; r)$$

De la convergencia uniforme de $(f_n^k) \to f^k$ sobre cada $\overline{D}(a_j; r)$ se obtiene el resultado.

Corolario

$H(\Omega)$ es un subespacio vectorial cerrado de $C(\Omega)$, y por consiguiente $(H(\Omega), \tau_c)$ es completo.

El siguiente teorema es fundamental en relación a la caracterización de los compactos en el espacio $H(\Omega)$.

Teorema de Montel

Sea $\Phi \subset H(\Omega)$. Entonces

$$\Phi \text{ es normal } \iff \Phi \text{ es acotada}$$

Demostración.

$\Longrightarrow$) Si Φ no es acotada podemos elegir un compacto $K \subset \Omega$ tal que

$$\sup\{|f(z)| : z \in K, f \in \Phi\} = \infty.$$

Sea $\{f_n\} \subset \Omega$ tal que

$$\sup\{|f_n(z)| : z \in K\} \geq n.$$

De la normalidad de Φ deducimos la existencia de una subsucesión $\{f_{n_j}\}$ de $\{f_n\}$ tal que

$$f_{n_j} \longrightarrow f \text{ uniformemente sobre los compactos de } \Omega.$$

Por el Teorema de Weierstrass $f \in H(\Omega)$ y

$$\sup_{z \in K}\{|f_{n_j}(z) - f(z)|\} \longrightarrow 0, j \longrightarrow \infty.$$

Si

$$\text{para todo } z \in K, \; |f(z)| \leq M \;,$$

resulta que

$$n_j \leq \sup_{z \in K} \left\{ \left| f_{n_j}(z) \right| \right\} \leq \sup_{z \in K} \left\{ \left| f_{n_j}(z) - f(z) \right| \right\} + M$$

con lo que

$$\lim_j n_j \leq M$$

que es una contradicción.

$\Longleftarrow$) Por el Teorema de Ascoli necesitamos probar que Φ es equicontinuo. Sea $z_0 \in \Omega$ y $\epsilon > 0$. Por la hipótesis podemos elegir un $r > 0$ y $M > 0$ tales que

$$\overline{D}(z_0; r) \subset \Omega, \text{ y para cada } f \in \Phi \text{ y cada } z \in \overline{D}(z_0; r), \; |f(z)| \leq M.$$

Sea

$$|z - z_0| < \frac{r}{2}, f \in \Phi \text{ y } \gamma(t) = z_0 + re^{it}, t \in [0, 2\pi] \,.$$

Por la fórmula integral de Cauchy

$$|f(z_0) - f(z)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_\gamma \left(\frac{f(\xi)}{\xi - z_0} - \frac{f(\xi)}{\xi - z} \right) d\xi \right| =$$

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_\gamma \frac{f(\xi)(z_0 - z)}{(\xi - z_0)\,(\xi - z)} d\xi \right| \leq$$

$$\frac{1}{2\pi} \frac{M}{\frac{r}{2}.r} \, |z - z_0| \, 2\pi r = \frac{2M}{r} \, |z - z_0|$$

Luego si

$$\delta = \min \left(\frac{r}{2}, \frac{r\epsilon}{2M} \right)$$

resulta que para cada $f \in \Phi$

$$|f(z_0) - f(z)| < \epsilon \text{ cuando } |z - z_0| < \delta$$

Corolario

$$\Phi \subset H(\Omega) \text{ es compacto} \Longleftrightarrow \Omega \text{ es cerrado y acotado}$$

Teorema de Riemann

Todo abierto simplemente conexo y propio del plano complejo es biholomorfo al disco unidad abierto. De forma más precisa:

Sea Ω un abierto del plano complejo, simplemente conexo, propio y a un punto de Ω. Entonces existe una única función holomorfa f en Ω tal que:

$$(i)\ f(a) = 0 \text{ y } f'(a) > 0$$

$$(ii)\ f \text{ es inyectiva}$$

$$(iii)\ f(\Omega) = U = \{z : |z| < 1\}$$

Demostración.

Sea

$$\mathcal{F} = \{f \in H(\Omega) : f \text{ es inyectiva, } f(a) = 0, f'(a) > 0 \text{ y } f(\Omega) \subset U\}.$$

Se verifica:

$$(a)\ \mathcal{F} \text{ es no vacío}$$

$$(b)\ \overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \cup \{0\}, \text{ clausura de } \mathcal{F} \text{ en la topología } \tau_c.$$

Supongamos que (a) y (b) son ciertas. Consideramos la aplicación

$$f \longrightarrow f'(a) \text{ de } H(\Omega) \text{ en } \mathbb{C}.$$

Por el Teorema de Weierstrass esta aplicación es continua. Además

$$\forall f \in \mathcal{F} \text{ el } \sup\{|f(z)| : z \in \Omega\} \leq 1,$$

lo que nos dice que $\mathcal{F}$ es acotada en $H(\Omega)$. El Teorema de Montel nos asegura entonces que $\mathcal{F}$ es normal, es decir, τ_c-relativamente compacta. De la compacidad de $\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \cup \{0\}$ deducimos la existencia de $f \in \overline{\mathcal{F}}$ tal que $f'(a) \geq g'(a)$ para cada $g \in \mathcal{F}$. Si $\mathcal{F}$ es no vacía, resulta que $f \neq 0$, es decir $f \in \mathcal{F}$. Para finalizar la prueba sólo falta ver que $f(\Omega) = U$, pues la unicidad es inmediata.

Supongamos que existe $\omega \in U$ tal que $\omega \notin f(\Omega)$. Vamos a construir una función $g \in \mathcal{F}$ tal que $g'(a) > f'(a)$, lo que constituye una contradicción con la elección de f.

Consideramos la función

$$\varphi_\omega \circ f(z) = \frac{f(z) - \omega}{1 - \overline{\omega} f(z)},$$

holomorfa en Ω, sin ceros en Ω, y por consiguiente una unidad. El Teorema de Cauchy nos dice que existe $h \in H(\Omega)$ tal que:

$$\forall z \in \Omega, [h(z)]^2 = \varphi_\omega \circ f(z).$$

Los puntos $\omega, f(z)$ son de U, luego $[h(z)]^2 \in U$, es decir $\forall z \in \Omega, h(z) \in U$.

Veamos ahora que $h'(a) \neq 0$. Para ello derivando la relación anterior obtenemos:

$$2h(a)h'(a) = \frac{f'(a)\left(1 - \overline{\omega} f(a)\right) - \left(f(a) - \omega\right)\left(-\overline{\omega} f'(a)\right)}{\left(1 - \overline{\omega} f(a)\right)^2} =$$

$$f'(a) - |\omega|^2 f'(a) = f'(a)\left(1 - |\omega|^2\right) \neq 0$$

pues $f'(a) > 0$. En conclusión $h'(a) \neq 0$. Esto nos permite definir

$$g : \Omega \longrightarrow U,\; g(z) = \frac{|h'(a)|\left(h(z) - h(a)\right)}{h'(a)\left(1 - \overline{h(a)} h(z)\right)}.$$

La función g esta bien definida ya que $\forall z \in \Omega, h(z) \in U$; $g(a) = 0$ y g es inyectiva por ser una transformación racional. Calculemos $g'(a)$.

$$g'(a) = \frac{|h'(a)|}{h'(a)} . \frac{h'(a)\left(1 - |h(a)|^2\right)}{\left(1 - |h(a)|^2\right)^2} = \frac{|h'(a)|}{1 - |h(a)|^2}.$$

La relación

$$[h(a)]^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{f(a) - \omega}{1 - \overline{\omega} f(a)}\right) = -\omega$$

nos dice que

$$|h(a)|^2 = |-\omega| = |\omega|\,.$$

Por otra parte

$$2h(a)h'(a) = f'(a)\left(1 - |\omega|^2\right),$$

luego

$$g'(a) = \frac{1}{2} . \frac{f'(a)\left(1 - |\omega|^2\right)}{|h(a)|} . \frac{1}{(1 - |\omega|)} = \frac{f'(a)\left(1 + |\omega|\right)}{2\sqrt{|\omega|}} > f'(a).$$

Prueba de (a).

Sea $b \in \mathbb{C} \backslash \Omega$. La función $(z-b)$ es una unidad en Ω, luego existe

$$g \in H(\Omega) : \forall z \in \Omega, [g(z)]^2 = z - b.$$

La inyectividad de g y el Teorema de la Aplicación Abierta, nos permiten afirmar la existencia de

$$r > 0 : D(g(a); r) \subset g(\Omega).$$

Veamos que

$$g(\Omega) \cap D(-g(a); r) = \varnothing.$$

En efecto, si existiera $z \in \Omega :$

$$|g(z) + g(a)| < r,$$

entonces existiria $\omega \in \Omega :$

$$g(\omega) = -g(z),$$

es decir

$$\omega - b = z - b,$$

lo que nos dice $\omega = z, g(z) = 0$ y $z = b \in \Omega$, lo que es una contradicción.

La relación

$$g(\Omega) \cap D(-g(a); r) = \varnothing$$

nos permite definir

$$T : g(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}, T(z) = \frac{r}{g(a) + z}.$$

La función

$$g_1 = T \circ g : \Omega \longrightarrow U, \text{ es holomorfa en } \Omega.$$

Si $\alpha = g_1(a)$, la función

$$g_2 = \varphi_\alpha \circ g_1 \text{ es holomorfa en } \Omega \text{ e inyectiva.}$$

Si elegimos $c \in \mathbb{C}$, con $|c| = 1$, tal que $g_3 = cg_2$ tenga $g_3'(a) > 0$, resulta que $g_3 \in \mathcal{F}$ y por consiguiente $\mathcal{F}$ es no vacía.

Prueba de (b).

Sea $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ tal que $\{f_n\} \longrightarrow f$ en la topología τ_c. Por el Teorema de Hurwitz f es constante en Ω o f es inyectiva. En el primer caso $f(a) = 0$ implica que f es identicamente nula. Si f es inyectiva, $\forall z \in \Omega, f'(z) \neq 0$, luego $f'(a) > 0$ y $f \in \mathcal{F}$.

Obsérvese que al ser f abierta, la condición $f(\Omega) \subset \overline{U}$ implica $f(\Omega) \subset U$.