La función exponencial.

La serie

$$\exp(z) = \sum_0^\infty \frac{z^n}{n!}$$

converge normalmente en $\mathbb{C}$ y por consiguiente lo hace uniformemente sobre cada subconjunto acotado de $\mathbb{C}$. En particular $\exp(z)$ es una función continua. La convergencia normal nos permite afirmar que:

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{a^k}{k!}.\sum_{m=0}^\infty \frac{b^m}{m!} = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!}a^k b^{n-k} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(a+b)^n}{n!}$$

es decir

$$\forall a, b \in \mathbb{C}, \exp(a).\exp(b) = \exp(a+b)$$

Def.

$$e = \exp(1), \exp(z) = e^z, e^0 = \exp(0) = 1$$

Teorema. (Propiedades de la función exponencial)

(i)

$$\forall z \in \mathbb{C}, e^z \neq 0$$

(ii)

$$\forall z \in \mathbb{C}, \exp'(z) = \exp(z)$$

(iii)

$e^z \mid_{\mathbb{R}}$ es la función exponencial real conocida, es decir:

$e^x > 0, e^x \longrightarrow \infty$ si $x \longrightarrow \infty, e^x \longrightarrow 0$ si $x \longrightarrow -\infty$

(iv)

$$\exists \pi \in \mathbb{R}, \pi > 0 : e^{\frac{\pi i}{2}} = i.$$

Además

$$e^z = 1 \Longleftrightarrow \frac{z}{2\pi i} \in \mathbb{Z}$$

(v)

$$e^z \text{ es periódica de período } 2\pi i$$

(vi)

$$t \longrightarrow e^{it} \text{ aplica } \mathbb{R} \text{ sobre } \{z : |z| = 1\}$$

(vii)

$$\forall \omega \in \mathbb{C}, \omega \neq 0, \exists z \in \mathbb{C} : e^z = \omega$$

D) Libro de Rudin, Análisis Real y Complejo, Pág. 1.
Observación.

Podemos definir las funciones reales $\sin t$ y $\cos t$ por las fórmulas

$$\cos, t = \operatorname{Re}(e^{it}) \wedge \sin t = \operatorname{Im}(e^{it}), t \in \mathbb{R}.$$

Obtenemos:

$$\begin{aligned} e^{it} &= \cos t + i \sin t \\ \cos t &= 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + ... \\ \sin t &= t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + ... \end{aligned}$$

Ejemplos: Sea

$$\begin{aligned} t &\longrightarrow \log t, t \in \{t \in \mathbb{R} : t > 0\} \\ t &\longrightarrow \arctan t, t \in \mathbb{R} \text{ (rama principal, } \arctan t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Def.

$$\widetilde{l}(z) := \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + i \arctan\frac{y}{x}.$$

La función $\widetilde{l}(z)$ es $\mathbb{R}$-derivable en $\mathbb{C}\setminus\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 0\}$. $\widetilde{l}(z)$ satisface las Ec. de C-R en este dominio, consecuencia de que

$$\log'(t) = \frac{1}{t} \wedge \arctan'(t) = \frac{1}{1+t^2}.$$

Entonces $\widetilde{l}(z)$ es holomorfa en los semiplanos derecha e izquierda del eje imaginario. Calculemos $\widetilde{l}'(z)$:

$$\widetilde{l}'(z) = u_x(z)+iv_x(z) = \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+y^2}+i\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\frac{(-1)}{x^2}y = \frac{x}{x^2+y^2}-\frac{iy}{x^2+y^2} = \frac{1}{z},$$

es decir,

$$\widetilde{l}'(z) = \frac{1}{z}, z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z \neq 0$$

Funciones logaritmo.

Def.

$b \in \mathbb{C}$ es un logaritmo de $a \in \mathbb{C}$ si $e^b = a$. (Escribimos $b = \log a$).

De las propiedades de la función exponencial deducimos:

-El número 0 no tiene logaritmo

-Cada $r \in \mathbb{R}, r > 0$, tiene exactamente un logaritmo real, $\log r$.

-Cada número complejo $c = re^{i\varphi}, c \neq 0$, tiene una cantidad numerable de logaritmos:

$$\log r + i\varphi + i2\pi n; \ \ \log r \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$$

Funciones logaritmo.

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región (abierto y conexo). Diremos que $l : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función logaritmo en Ω si l es holomorfa en Ω y para cada $z \in \Omega, e^{l(z)} = z$.

Ejemplo.

$$\begin{aligned} \Omega &= \left\{ z = re^{i\varphi} : r > 0; \alpha < \varphi < \alpha + 2\pi \right\} \\ \alpha &\in \mathbb{R} \text{ fijo; } l(z) := \log r + i\varphi \end{aligned}$$

Si conocemos una función logaritmo en Ω, entonces las conocemos todas. En efecto:

Teorema. *Sea $l : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función logaritmo en Ω. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $\widehat{l} : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función logaritmo en Ω.

(ii) $\widehat{l} = l + 2\pi i\widehat{n}$ para un entero $\widehat{n}$.

D) (i)$\Longrightarrow$(ii)

$$e^{\widehat{l}(z)} = e^{l(z)} = z, \forall z \in \Omega,$$

luego

$$e^{\widehat{l}(z) - l(z)} = 1, \forall z \in \Omega,$$

es decir,

$$\frac{\widehat{l}(z) - l(z)}{2\pi i}$$

es una función continua en Ω que toma valores enteros y por consiguiente tiene que ser constante. Es decir,

$$\exists \widehat{n} \in \mathbb{Z} : \forall z \in \Omega, \widehat{l}(z) - l(z) = 2\pi i\widehat{n}$$

(ii)$\Longrightarrow$(i) $\widehat{l}(z)$ es holomorfa en Ω y verifica:

$$e^{\widehat{l}(z)} = e^{l(z)}.e^{2\pi i\widehat{n}} = e^{l(z)} = z, \forall z \in \Omega$$

Las funciones logaritmo en Ω se caracterizan por sus derivadas:

Teorema. *Sea $l : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
(i) l es una función logaritmo en Ω.
(ii) $l'(z) = 1/z, \forall z \in \Omega$ y $e^{l(a)} = a$ para al menos un $a \in \Omega$.
D) (i)$\Longrightarrow$(ii)

$$\forall z \in \Omega, e^{l(z)} = z.$$

Si derivamos obtenemos:

$$\forall z \in \Omega, e^{l(z)}.l'(z) = 1,$$

luego

$$\forall z \in \Omega, l'(z) = 1/z$$

(ii)$\Longrightarrow$(i) La función

$$g(z) = z.e^{-l(z)}, z \in \Omega$$

es holomorfa en Ω y

$$g'(z) = e^{-l(z)} - ze^{-l(z)}l'(z) = e^{-l(z)} - e^{-l(z)} = 0, z \in \Omega.$$

De aquí se deduce que g es constante en Ω, es decir, existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $g(z) = z_0, \forall z \in \Omega$. De la definición de g se deduce que $z_0 \neq 0$ y que

$$\forall z \in \Omega, z_0.e^{l(z)} = z$$

La hipótesis $e^{l(a)} = a$, nos permite afirmar que $z_0 = 1$ y por consiguiente

$$\forall z \in \Omega, e^{l(z)} = z$$

Teorema.

$$\log z = \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n$$

es una función logaritmo en $B_1(1)$.

D) La función

$$\lambda(z) = \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$$

es holomorfa en $B_1(0)$ y verifica

$$\lambda'(z) = \sum_1^\infty (-1)^{n-1} z^{n-1} = \frac{1}{1+z}, |z| < 1.$$

Derivando en la expresión $\log z = \lambda(z-1)$, obtenemos

$$\log'(z) = \lambda'(z-1) = 1/z, z \in B_1(1).$$

La prueba finaliza sin más que observar

$$e^{\log 1} = e^0 = 1.$$

Observación.

Si $a \neq 0$ y $b \in \mathbb{C}$ verifica $b = \log a$, entonces $\log(za^{-1}) + b$ es una función logaritmo en $B_{|a|}(a)$.

En la definición de función logaritmo la exigencia de continuidad para la función l es suficiente. En fecto,

Teorema. *Sea* $l : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ *una función continua que verifica* $\forall z \in \Omega, e^{l(z)} = z$. *Entonces* l *es holomorfa y por consiguiente es una función logaritmo en* Ω.

D) Sea $a \in \Omega, a \neq 0$, fijo. Sea $l_a(z) = \log(za^{-1}) + b$ la función logaritmo anterior en $B_{|a|}(a)$, con $b = \log a$ cualquiera. Entonces

$$e^{l(z)-l_a(z)} = 1, \forall z \in \Omega$$

y por consiguiente

$$(l(z) - l_a(z)) \in 2\pi i\mathbb{Z}, \forall z \in \Omega \cap B_{|a|}(a).$$

La continuidad de $l(z) - l_a(z)$ nos dice que dicha función es constante en $\Omega \cap B_{|a|}(a)$, es decir l es una función holomorfa en a.

Rama principal del logaritmo.

Vamos a considerar la región

$$\mathbb{C}^- = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0 \text{ y } \operatorname{Im} z = 0\}$$

Sea $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ y $\log : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ la función logaritmo real, que es continua en $\mathbb{R}^+$. Cada $z \in \mathbb{C}^-$ se representa de forma única como

$$z = |z| e^{i\varphi}, |z| > 0, -\pi < \varphi < \pi$$

Teorema. *La función*

$$z = |z| e^{i\varphi} \longrightarrow \log |z| + i\varphi$$

es una función logaritmo en $\mathbb{C}^-$. *En* $B_1(1)$ *coincide con la función definida por la serie de potencias*

$$\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n$$

D) Primero vamos a establecer la continuidad de nuestra función. Para ello sólo es necesario probar que la función $z \longmapsto \varphi$ es continua en $\mathbb{C}^-$. Sea $z_n = |z_n| e^{i\varphi_n} \in \mathbb{C}^-$ tal que $z_n \longrightarrow z = |z| e^{i\varphi} \in \mathbb{C}^-$, y supongamos que $\varphi_n \nrightarrow \varphi$. Por compacidad existe una subsucesión $\varphi_{n_j} \longrightarrow \theta \in [-\pi, \pi]$ con $\theta \neq \varphi$. La continuidad de la función exponencial nos permite afirmar:

$$z_{n_j} = \left| z_{n_j} \right| e^{i\varphi_{n_j}} \longrightarrow |z| e^{i\theta}.$$

Por consiguiente el número complejo $z = |z| e^{i\varphi}$ satisface:

$$e^{i(\varphi-\theta)} = 1$$

lo que nos permite afirmar que $(\varphi - \theta)$ es del tipo $2\pi n$ para un entero n. Si tenemos en cuenta que $0 < |\varphi - \theta| < 2\pi$, podemos concluir que $n = 0$ con lo que $\varphi = \theta$.

La relación

$$e^{\log|z|+i\varphi} = |z| e^{i\varphi} = z, \forall z \in \mathbb{C}^-$$

prueba que, en efecto, la función de partida es una función logaritmo en $\mathbb{C}^-$. Finalmente, ya sabemos que la función

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n$$

es una función logaritmo en $B_1(1)$. Por consiguiente difiere de nuestra función, en $B_1(1)$, en una constante. Dicha constante tiene que ser cero pues ambas funciones valen 0 en $z = 1$.

Def.

Llamaremos rama principal del logaritmo a la función: $\log : \mathbb{C}^- \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$|z| e^{i\varphi} = z \longrightarrow \log|z| + i\varphi, -\pi < \varphi < \pi$$

Para ella el $\log i = \frac{i\pi}{2}$.

Las otras ramas (infinitas) del logaritmo en $\mathbb{C}^-$, todas del tipo $\log z + 2\pi i, n \in \mathbb{Z}$, las llamaremos ramas secundarias.

Observación.

La función

$$\widetilde{l}(z) = \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2) + i \arctan \frac{y}{x}$$

considerada anteriormente coincide, en $\operatorname{Re} z > 0$ con la rama principal del logaritmo ya que $x^2 + y^2 = |z|^2$ y $\arctan y/x = \varphi$ si $x > 0$. Por contraste $\widetilde{l}(z)$ no es una función logaritmo en el semiplano $\operatorname{Re} z < 0$ ya que en este caso $\arctan y/x = \varphi + \pi$, y por consiguiente

$$e^{\widetilde{l}(z)} = e^{|z|}e^{i\varphi}e^{i\pi} = -|z|\, e^{i\varphi} = -z, z \in \operatorname{Re} z < 0$$

Observación.

Hemos definido la rama principal del logaritmo en $\mathbb{C}^-$. Podíamos haber seguido un procedimiento semejante en un dominio obtenido excluyendo del plano complejo los puntos de una semirecta que sale del origen.

No existe una función logaritmo en $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ pues una tal función debe de coincidir en $\mathbb{C}^-$ con alguna rama $\log z + 2\pi i n$ y por consiguiente falla la continuidad en cada punto del eje real negativo.

Sobre la identidad $\log(wz) = \log w + \log z$

Para números complejos $w, z \in \mathbb{C}^-$ y $w.z \in \mathbb{C}^-$ con $w = |w|\, e^{i\varphi}, z = |z|\, e^{i\psi}, wz = |wz|\, e^{i\chi}$, donde $\varphi, \psi, \chi \in (-\pi, \pi)$, existe $\eta \in \{-2\pi, 0, 2\pi\}$ tal que $\chi = \varphi + \psi + \eta$. Por consiguiente

$$\log(wz) = \log(|w|\,|z|) + i\chi = \log w + \log z + i\eta.$$

En particular

$$\log(wz) = \log w + \log z \Longleftrightarrow \varphi + \psi \in (-\pi, \pi)\,.$$

Esta condición se cumple cuando $\operatorname{Re} w > 0$ y $\operatorname{Re} z > 0$.

La ecuación $\log(\exp z) = z$**.**

Para estudiar la ecuación anterior hemos de fijarnos en la necesidad de determinar el conjunto de los $z \in \mathbb{C}$ tales que $\exp z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{C}^-$. En este conjunto no tendrá sentido hablar de $\log(\exp z)$.Teniendo en cuenta que

$$e^z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{C}^- \Longleftrightarrow e^x \cos y \leq 0 \text{ y } e^x \sin y = 0 \Longleftrightarrow y = (2n+1)\,\pi \text{ para algún } n \in \mathbb{Z}$$

obtenemos que la función $\log(\exp z)$ está bien definida en el dominio

$$B := \mathbb{C} \backslash \{z : \operatorname{Im} z = (2n+1)\,\pi, n \in \mathbb{Z}\} = \cup_{n \in \mathbb{Z}} G_n$$

con

$$G_n = \{z : (2n-1)\,\pi < \operatorname{Im} z < (2n+1)\,\pi\}$$

(bandas de amplitud 2π paralelas al eje OX). Para cada $z = x + iy \in G_n$, tenemos:

$$e^z = e^x e^{i(y-2n\pi)}, (y - 2n\pi) \in (-\pi, \pi)$$

y por consiguiente

$$\log(\exp z) = \log e^x + i(y - 2n\pi) = z - 2\pi i n.$$

Sólo en la banda G_0 se verifica

$$\log(\exp z) = z,$$

no obstante siempre se cumple

$$\exp(\log z) = z$$

para cualquier rama del logaritmo.

Conclusión:

La banda $G_0 = \{z : -\pi < z < \pi\}$ se aplica de forma"biholomorfa" sobre $\mathbb{C}^-$ a través de la función exponencial y su inversa es la rama principal del logaritmo.

Funciones trigonométricas.

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

El $\sin z$ y $\cos z$ son funciones enteras

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin' z = \cos z; \cos' z = -\sin z$$

Fórmulas: (Ejercicios).

$$\cos(w+z) = \cos w \cos z - \sin w \sin z$$

$$\sin(w+z) = \sin w \cos z + \cos w \sin z$$

$$\cos w - \cos z = -2 \sin \frac{w+z}{2} \sin \frac{w-z}{2}$$

$$\sin w - \sin z = 2 \cos \frac{w+z}{2} \sin \frac{w-z}{2}$$

$$1 = \cos^2 z + \sin^2 z$$

$$\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$$

$$\sin 2z = 2 \sin z \cos z$$

Funciones hiperbólicas

$$\sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}; \cos z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

Son funciones enteras

$$\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}; \cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

Fórmulas. (Ejercicios)

$$\sinh z = -i\sin(iz); \cosh z = \cos(iz)$$

$$\sinh' z = \cosh z; \cosh' z = \sinh z$$

$$\cosh(w+z) = \cosh w \cosh z + \sinh w \sinh z$$

$$\sinh(w+z) = \sinh w \cosh z + \cosh w \sinh z$$

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

$$\cos(x+iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

$$\sin(x+iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

Valores, ceros y periodicidad.
i) $\sin(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ ii) $\cos(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$. .(No acotadas)
iii)

$$\{z \in \mathbb{C} : \sin z = 0\} = \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\{z \in \mathbb{C} : \cos z = 0\} = \left\{\frac{1}{2}\pi + n\pi : n \in \mathbb{Z}\right\}$$

iv) $\sin z$ y $\cos z$ son periódicas de período 2π.

Funciones $\tan z$ y $\cot z$.

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}; z \in \mathbb{C}\backslash \left\{\frac{1}{2}\pi + n\pi : n \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}; z \in \mathbb{C}\backslash \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$$

Ambas son holomorfas en sus dominios y

$$\tan' z = \frac{1}{\cos^2 z}; \cot' z = \frac{-1}{\sin^2 z}$$

$$\tan z = i\frac{1-e^{2iz}}{1+e^{2iz}} = i(1 - \frac{1}{1+e^{-2iz}})$$

$$\cot z = i\frac{e^{2iz}+1}{e^{2iz}-1} = i(1 - \frac{2}{1-e^{2iz}})$$

De la relación
$$e^{2iz} = 1 \Longleftrightarrow z \in \pi\mathbb{Z}$$
se obtiene que $\tan z$ y $\cot z$ son periódicas de período πn, $n \in \mathbb{Z}$.

Sea

$$\alpha(z) = z - z^3/3 + z^5/5 - ...(-1)^n z^{2n+1}/2n + 1, |z| < 1$$

$$\alpha'(z) = \frac{1}{1+z^2}; |z| < 1$$

Al ser $\tan 0 = 0$, resulta que $\alpha(\tan z)$ esta definida y es holomorfa en un disco abierto B centrado el el cero. La función $F(z) = \alpha(\tan z) - z$ satisface

$$F'(z) = \frac{1}{1+\tan^2 z}.\frac{1}{\cos^2 z} - 1 = 0 \text{ en } B$$

Luego F es constante en B. Esta constante es 0 ya que $F(0) = 0$. Esto significa que
$$\forall z \in B, \alpha(\tan z) = z$$
Por este motivo a la serie $\alpha(z)$ se la llama serie "arcotangente".

Notación:

$$\arctan z = z - z^3/3 + z^5/5 - ...(-1)^n z^{2n+1}/2n + 1, |z| < 1$$

De forma análoga, en un disco B centrado en el cero, tenemos $\tan(\arctan z) = z$.