El Teorema General de Cauchy.

Dos preguntas pueden servirnos para motivar el Teorema General de Cauchy:

Dado $\Omega \subset \mathbb{C}$, ¿cómo podemos caracterizar los caminos cerrados en Ω para los que es válida la fórmula integral de Cauchy?

¿Para qué tipo de dominios Ω el Teorema de Cauchy es válido para todos los caminos cerrados en Ω ?

La respuesta a la primera pregunta nos conducirá a los caminos que tengan su "interior" en Ω. La segunda nos llevará a los dominios "homotópicamente simplemente conexos".

La función índice.

Sea γ un camino en el plano complejo C^1 a trozos y cerrado. Definimos la función índice como:

$$Ind_\gamma(\ ) : \Omega = \mathbb{C}\backslash\gamma \longrightarrow \mathbb{C},\ Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z}$$

Ejemplo. *Si $\gamma = \partial D$, con $D = D(z_0; r)$, entonces*

$$Ind_\gamma(z) = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & z \in D \\ 0 & z \in \mathbb{C}\backslash\overline{D} \end{array} ,\ z \in \mathbb{C}\backslash\partial D \right\}$$

Propiedades. *La función índice toma valores enteros, es constante en cada componente conexa de $\Omega = \mathbb{C}\backslash\gamma$ y vale cero en la componente conexa no acotada de Ω.*

Demostración. Sea $\gamma : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{C}$ y $\Omega = \mathbb{C}\backslash\gamma$. Como

$$Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^\beta \frac{\gamma\,'(s)}{\gamma(s) - z} ds$$

tenemos que probar $\varphi(\beta) = 1$ donde

$$\varphi(t) = \exp\left\{\int_\alpha^t \frac{\gamma\,'(s)}{\gamma(s) - z} ds\right\}, \alpha \le t \le \beta$$

Derivando

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \frac{\gamma\,'(t)}{\gamma(t)-z} \text{ para todo } t \in [\alpha,\beta]\backslash S, \text{ con } S \text{ finito.}$$

Luego la función $\frac{\varphi}{\gamma-z}$, continua en $[\alpha,\beta]$, tiene derivada nula en $[\alpha,\beta]\backslash S$. Por consiguiente $\frac{\varphi}{\gamma-z}$ es constante en $[\alpha,\beta]$. De las condiciones $\varphi(\alpha)=1$ y $\gamma(\alpha)=\gamma(\beta)$ se deduce $\varphi(\beta)=1$.

La función índice es holomorfa en Ω y por tanto es continua. Al tomar valores enteros debe ser constante en cada componente de Ω. La relación $|Ind(z)| < 1$ si $|z|$ es grande nos permite concluir que la función índice es nula en la componente conexa no acotada de Ω.

Definición. *Si γ es un camino cerrado definimos el interior y el exterior de γ como:*

$$Int(\gamma) = \{z \in \mathbb{C}\backslash\gamma : Ind_\gamma(z) \neq 0\}$$

$$Ext(\gamma) = \{z \in \mathbb{C}\backslash\gamma : Ind_\gamma(z) = 0\}\,.$$

Se verifica

$$\mathbb{C} = Int(\gamma) \cup \gamma \cup Ext(\gamma), \text{ partición.}$$

Observaciones.

La función índice es localmente constante luego el $Int(\gamma)$ y el $Ext(\gamma)$ son abiertos en $\mathbb{C}$. Luego $\partial Int(\gamma) \subset \gamma$ *y* $\partial Ext(\gamma) \subset \gamma$.

Si D es un disco abierto $Int(D) = D, Ext(D) = \mathbb{C}\backslash\overline{D}$ y $\partial Ext(D) = \partial Int(D) = \partial D$. Análogo para rectángulos, triángulos

Proposición. El $Int(\gamma)$ es siempre acotado y el $Ext(\gamma)$ es siempre no acotado y no vacío. De forma precisa, si $\gamma \subset D(z_0, r)$ entonces:

$$Int(\gamma) \subset D(z_0, r) \text{ y } \mathbb{C}\backslash D(z_0, r) \subset Ext(\gamma)$$

Demostración. El conjunto $V = \mathbb{C}\backslash D(z_0, r)$ es no vacío, conexo y disjunto de γ. Luego la función Ind_γ vale cero en V. Es decir $V \subset Ext(\gamma)$. De la relación $\mathbb{C} = Int(\gamma) \cup \gamma \cup Ext(\gamma)$ se deduce que $Int(\gamma) \subset D(z_0, r)$.

Teorema General de Cauchy.

Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$ y γ un camino cerrado en Ω. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1.- Para cada $f \in H(\Omega)$ se verifica $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

2.-Para cada $f \in H(\Omega)$ se verifica

$$Ind_\gamma(z).f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi,\ z \in \Omega\backslash\gamma$$

3.- $Int(\gamma) \subset \Omega$

Demostración. (1) $\Longrightarrow$ (2) Sea $z \in \Omega\backslash\gamma$ y $f \in H(\Omega)$. Consideramos la función

$$g(\xi) = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{f(\xi)-f(z)}{\xi - z} & ,\xi \in \Omega\backslash \{z\} \\ f'(z) & ,\xi = z \end{array} \right\}.$$

La función $g \in H(\Omega)$ y la relación

$$\int_\gamma g(\xi)d\xi \ = \ 0 \Longleftrightarrow \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \int_\gamma \frac{f(z)}{\xi - z} d\xi = f(z).2\pi i.Ind_\gamma(z)$$

prueba (2).

(2) $\Longrightarrow$ (1) Sean $f \in H(\Omega)$ y $z_0 \in \Omega \backslash \gamma$. Definimos $h(z) = (z - z_0)f(z)$. Por (2), teniendo en cuenta que $h(z_0) = 0$, obtenemos que $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

(1) $\Longrightarrow$ (3) Por reducción al absurdo. Sea $z_0 \in Int(\gamma)$ y supongamos que $z_0 \notin \Omega$. En este caso la función $g(z) = \frac{1}{z-z_0}$ es holomorfa en Ω. Por consiguiente

$$\int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} = 0 = 2\pi i.Ind_\gamma(z_0)$$

lo que nos dice que $Ind_\gamma(z_o) = 0$.

(3) $\Longrightarrow$ (2) (Dixon). Sea $f \in H(\Omega)$. Definimos en $\Omega \times \Omega$ la función g :

$$\begin{aligned} g(\omega, z) &= \frac{f(\omega) - f(z)}{\omega - z}, \text{si } \omega \neq z \\ g(\omega, z) &= f'(z), \text{si } \omega = z \end{aligned}$$

Tenemos que probar la relación

$$\forall z \in \Omega \backslash \gamma, \int_\gamma g(\xi, z)d\xi = 0 \qquad (*)$$

pues en este caso

$$\forall z \in \Omega \backslash \gamma, f(z).Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

Para la prueba de la relación $(*)$ supongamos que la función g es continua en $\Omega \times \Omega$. En este caso, $\forall \omega \in \Omega$ la función $g_\omega(z) = g(\omega, z)$ es holomorfa en Ω ya que lo es en $\Omega \backslash \{\omega\}$ y

$$\lim_{z \longrightarrow \omega} g_\omega(z) = \lim_{z \longrightarrow \omega} \frac{f(\omega) - f(z)}{\omega - z} = f'(\omega)$$

La continuidad de la función g junto con la observación anterior nos dicen que la función

$$h(z) = \int_\gamma g(\xi, z)d\xi \text{ es holomorfa en } \Omega$$

Para terminar la demostración es suficiente con probar que h admite una extensión holomorfa $\widetilde{h}$ a todo $\mathbb{C}$ con $\lim_{z\longrightarrow\infty}\widetilde{h}(z)=0$. En efecto, en este caso el teorema de Liouville nos dice que $\forall z\in\Omega, h(z)=0$ con lo que la relación $(*)$ se satisface y la prueba concluye.

Si definimos

$$h^*(z)=\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi, z\in Ext(\gamma)$$

resulta que $h^*\in H(Ext(\gamma))$ y $\lim_{z\longrightarrow\infty}h^*(z)=0$. Es obvio que $h(z)=h^*(z)$ cuando $z\in Ext(\gamma)\cap\Omega$. Por consiguiente, teniendo en cuenta que $\mathbb{C}=\Omega\cup Ext(\gamma)$, la función $\widetilde{h}$ definida como

$$\widetilde{h}(z)=\left\{\begin{array}{cc} h(z) & z\in\Omega \\ h^*(z) & z\in Ext(\gamma)\end{array}\right\}$$

es una función entera tal que $\widetilde{h}|_\Omega=h$. Además para r grande $Int(\gamma)\subset D(0,r)$, con lo que si $|z|>r$ se verifica $\widetilde{h}(z)=h^*(z)$, es decir

$$\lim_{z\longrightarrow\infty}\widetilde{h}(z)=\lim_{z\longrightarrow\infty}h^*(z)=0$$

En la prueba que acabamos de concluir hemos supuesto que la función g es continua en $\Omega\times\Omega$. El siguiente lema prueba esta afirmación con lo que finalizamos definitivamente la demostración del Teorema General de Cauchy.

Lema. *La función g definida en $\Omega\times\Omega$ por la expresión*

$$\begin{aligned} g(\omega,z) &= \frac{f(\omega)-f(z)}{\omega-z}, \omega\neq z \\ g(\omega,z) &= f'(z), \omega=z \end{aligned}$$

es continua.

Demostración. La continuidad de g es trivial en puntos (ω,z) con $\omega\neq z$. Sea $(z_0,z_0)\in\Omega\times\Omega$ y D un disco centrado en z_0 con $\overline{D}\subset\Omega$. Sea

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n, z\in D.$$

Entonces

$$\forall\omega,z\in D, g(\omega,z)=g(z_0,z_0)+\sum_{n\geq 2}^{\infty}a_nq_n(\omega,z)$$

donde

$$q_n(\omega, z) = \sum_{j=1}^{n} (\omega - z_0)^{n-j}(z - z_0)^{j-1}.$$

La estimación

$$|q_n(\omega, z)| \leq nt^{n-1} \text{ si } |\omega - z_0| < t \text{ y } |z - z_0| < t,$$

nos dice que para un t en estas condiciones

$$|g(\omega, z) - g(z_0, z_0)| \leq t(2|a_2| + 3|a_3|t + ... + n|a_n|t^{n-2} + ...),$$

luego

$$\lim_{(\omega,z)\longrightarrow(z_0,z_0)} g(\omega, z) = g(z_0, z_0)$$

y g es continua en (z_0, z_0).

Caminos homológicamente nulos y homológicamente simplemente conexos

El Teorema General de Cauchy justifica la siguiente definición.

Def.- *Un camino cerrado $\gamma \subset \Omega$ es homológicamente nulo si $Int(\gamma) \subset \Omega$. Diremos que el abierto Ω es homológicamente simplemente conexo si todo camino cerrado $\gamma \subset \Omega$ es homológicamente nulo.*

El Teorema General de Cauchy y el criterio de integrabilidad prueban la equivalencia de las siguientes afirmaciones sobre Ω

-Ω *es homológicamente simplemente conexo.*
-*Para cada $g \in H(\Omega)$ y cada $\gamma \subset \Omega$ cerrado se verifica $\int_\gamma g(z)dz = 0$.*
-*Toda $f \in H(\Omega)$ es integrable.*
-*Para cada $g \in H(\Omega)$ y cada $\gamma \subset \Omega$ cerrado se verifica:*

$$Ind(z).g(z) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{g(\xi)}{\xi - z} d\xi, \ z \in \mathbb{C}\backslash\gamma$$

Se puede demostrar que un abierto Ω es homológicamente simplemente conexo si, y sólo si, es simplemente conexo en el sentido topológico, es decir $\widehat{\mathbb{C}}\backslash\Omega$ es conexo en $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.