Los números complejos.

$\mathbb{C}$ es $\mathbb{R}^2$ con las operaciones:

$$\begin{aligned}(x_1,y_1)+(x_2,y_2) &= (x_1+x_2,y_1+y_2)\\ a(x_1,y_1) &= (ax_1,ay_1), a\in\mathbb{R}\\ (x_1,y_1).(x_2,y_2) &= (x_1x_2-y_1y_2,x_1y_2+y_1x_2)\end{aligned}$$

Los puntos $(0,y)$ integran el eje imaginario y los puntos $(x,0)$ el eje real.

Notaciones: $(x,0)\simeq x;(0,1)\simeq i;(x,y)=x+iy.a^2+b^2$

Observaciones:

- $i^2=-1$, entonces $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+i(ad+bc)$
- $a+bi=c+di \Longleftrightarrow a=c,b=d$
- $z=a+bi, a=\operatorname{Re} z, b=\operatorname{Im} z$
- Si $z\in\mathbb{C}$ es $z\neq 0$, entonces existe $z^{-1}\in\mathbb{C}$ tal que $z.z^{-1}=1$. Si $z=a+bi$, entonces $z^{-1}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{ib}{a^2+b^2}$. Como consecuencia si $w\neq 0$, entonces $\frac{z}{w}=z.w^{-1}\in\mathbb{C}$.

Propiedades.

Aditivas:

$$\begin{aligned}z+w &= w+z\\ z+(w+s) &= (z+w)+s\\ z+0 &= z\\ z+(-z) &= 0\end{aligned}$$

Multiplicativas:

$$\begin{aligned}zw &= wz\\ (zw)s &= z(ws)\\ 1z &= z\\ zz^{-1} &= 1 \text{ si } z\neq 0\end{aligned}$$

Distributiva:

$$z(w+s) = zw + zs$$

Las propiedades anteriores nos permiten afirmar que $\mathbb{C}$ es un cuerpo.

Raices cuadradas.
Si $z \in \mathbb{C}$, entonces existe $w \in \mathbb{C}$ tal que $w^2 = z$.
D) Sea $z = a + bi$. Planteamos la ecuación

$$w = x + iy \text{ con } (x+iy)^2 = a + bi$$

es decir,

$$x^2 - y^2 = a; 2xy = b$$

Elevando al cuadrado

$$\left(x^2 - y^2\right)^2 = a^2; 4x^2y^2 = b^2$$

de donde concluimos que

$$x^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

.

Si llamamos $\alpha = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$ y $\beta = \sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$ resulta:

Si $b > 0$, entonces $x = \alpha$ e $y = \beta$ o $x = -\alpha$ e $y = -\beta$
Si $b < 0$, entonces $x = \alpha$ e $y = -\beta$ o $x = -\alpha$ e $y = \beta$

Corolario.

Toda ecuación del tipo $az^2 + bz + c = 0$,*con* $a, b, c \in \mathbb{C}$ *tiene soluciones*

$$z = \frac{\left[-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right]}{2a}$$

Observación: $\mathbb{C}$ es el "más pequeño" de los cuerpos que contienen a $\mathbb{R}$ y en los que toda ecuación cuadrática tiene solución.

Representación polar.

Si $z = a + bi$,llamaremos módulo de z al número real $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Si θ es el ángulo entre el vector z y el eje real positivo, que llamaremos argumento de z, $0 \leq \theta < 2\pi$, se verifica

$$\begin{aligned} a &= r\cos\theta, b = r\sin\theta, a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta), \theta = \arg z, \\ &\text{(representación polar).} \end{aligned}$$

Observaciones:

- Una vez fijado un intervalo $[a, b)$ de longitud 2π, cada z tiene un único argumento perteneciente a ese intervalo.

- $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ y $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ $(\star)$ ya que

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \begin{pmatrix} [\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2] + \\ i\left[\cos\theta_1 \sin\theta_2 + \cos\theta_2 \sin\theta_1\right] \end{pmatrix} =$$

$$= r_1 r_2 \left(\cos\left(\theta_1 + \theta_2\right) + i \sin\left(\theta_1 + \theta_2\right)\right)$$

$(\star)$ Si $\arg(z_1) + \arg(z_2)$ se va fuera del intervalo asignado para los argumentos, tenemos que ajustar $\arg(z_1) + \arg(z_2)$ a través de un múltiplo de 2π para hacer caer el argumento del producto dentro del intervalo asignado.

Ejemplo.

Intervalo elegido $[0, 2\pi)$. $z_1 = -1; z_2 = -i; \arg\ z_1 = \pi; \arg$ $z_2 = \frac{3\pi}{2}; z_1 z_2 = i; \arg(z_1 z_2) = \frac{\pi}{2}$ y $\arg(z_1) + \arg(z_2) = 2\pi + \frac{\pi}{2}$

Luego escribiremos:

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \pmod{2\pi}.$$

Fórmula de Moivre.

Si $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ *y* $n \in \mathbb{N}$, *entonces*

$$z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

D) Es inmediata por inducción.

Raices n-ésimas.

Dado $w \in \mathbb{C}$ se trata de resolver la ecuación $z^n = w$. Si $w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ y $z = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$, entonces

$$z^n = \rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi)\ ;\ \rho^n = r = |w|\ \ ;\ n\psi = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

.Entonces

$$z = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]$$

.

Cada valor de k da un valor de z. tenemos $n-raices$ asociadas a los valores de $k = 0, 1, 2, ..., (n-1)$.

Ejemplo.

Si $z^3 = 1$, obtenemos $z_1 = 1$; $z_2 = -1/2 + i\sqrt{3}/2; z_3 = -1/2 - i\sqrt{3}/2$. Tres raices"uniformemente distribuidas" en el círculo unidad.

Conjugación.

Si $z = a + bi$, definimos $\overline{z} = a - bi$ (conjugado de z)

Propiedades.

$$\begin{aligned}
\overline{z_1+z_2} &= \overline{z_1}+\overline{z_2}\\
\overline{z_1 z_2} &= \overline{z_1}.\overline{z_2}\\
\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} &= \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \text{ si } z_2 \neq 0\\
z\overline{z} &= |z|^2. \text{ Luego si } z\neq 0, z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}\\
z &= \overline{z} \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R}\\
\operatorname{Re} z &= \frac{z+\overline{z}}{2}; \operatorname{Im} z = \frac{z-\overline{z}}{2i}; \overline{\overline{z}} = z
\end{aligned}$$

Propiedades del módulo.

$$\begin{aligned}
(i)\quad |zz'| &= |z|\,|z'|\\
(ii)\quad \text{Si } z &\neq 0,\ \text{entonces } |z/z'| = |z|\,/\,|z'|\\
(iii)\quad -|z| &\leq \operatorname{Re} z \leq |z|\,;\\
-|z| &\leq \operatorname{Im} z \leq |z|\,;\\
|\operatorname{Re} z| &\leq |z|\,; |\operatorname{Im} z| \leq |z|\\
(iv)\quad |z| &= |\overline{z}|\\
(v)\quad |z+z'| &\leq |z|+|z'|\,;\\
||z|-|z'|| &\leq |z-z'| \qquad (1)
\end{aligned}$$

$$(vi)\quad |z_1w_1 + ...z_nw_n| \leq$$
$$\sqrt{|z_1|^2 + ... + |z_n|^2}.\sqrt{|w_1|^2 + ... + |w_n|^2}$$

Desigualdad de Cauchy-Schwarz.

D) Todas las demostraciones son triviales excepto la (v) y la (vi).

Prueba de (v).

$$\begin{aligned}|z+z'|^2 &= (z+z')\,\overline{(z+z')} = |z|^2+|z'|^2+2\,\mathrm{Re}(zz') \leq \\ &\leq |z|^2+2\,|z|\,|z'|+|z'|^2 = (|z|+|z'|)^2\end{aligned}$$

.

Por otra parte

$$\begin{aligned}|z| &= |z-z'+z'| \leq |z'|+|z-z'| \\ |z'| &= |z'-z+z| \leq |z|+|z-z'|\end{aligned}$$

Luego

$$||z|-|z'|| \leq |z-z'|$$

Prueba de (vi).

Supongamos que no todos los w_k son cero. Sea

$$v=\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2\,; t=\sum_{k=1}^{n}|w_k|^2 \text{ y } s=\sum_{k=1}^{n}z_k w_k$$

Consideremos

$$c=\frac{z_1w_1+......z_nw_n}{|w_1|^2+...+|w_n|^2}=\frac{s}{t}$$

Desarrollando la expresión

$$\sum_{k=1}^{n}|z_k-c\overline{w_k}|^2 \geq 0$$

obtenemos

$$\sum_{k=1}^{n} |z_k - c\overline{w_k}|^2 = v + |c|^2 t - c\sum_{k=1}^{n} \overline{z_k w_k} - \overline{c}\sum_{k=1}^{n} z_k w_k =$$
$$= v + |c|^2 t - 2\,\mathrm{Re}\,(\overline{c}s) = v + \frac{|s|^2}{t} - 2\,\mathrm{Re}\,\frac{\overline{s}s}{t}$$

.Teniendo en cuenta que

$$\overline{s}s = |s|^2 \in \mathbb{R},$$

obtenemos

$$v + \frac{|s|^2}{t} - 2\frac{|s|^2}{t} = v - \frac{|s|^2}{t} \geq 0,$$

es decir

$$|s|^2 \leq vt$$

con lo que concluimos la prueba.

Métrica en $\mathbb{C}$.
La función $d(z,w) = |z-w|$ es una distancia en $\mathbb{C}$. Esta métrica origina la topología usual y ya es conocido para todos nosotros el manejo de los conceptos de convergencia de sucesiones, límites de funciones definidas en dominios de $\mathbb{C}$, continuidad, compacidad etc.
La completitud de $\mathbb{C}$ con esta métrica es obvia ya que se deduce de la propia completitud de $\mathbb{R}$ si tenemos en cuenta que:
(z_n) converge en $\mathbb{C} \iff \mathrm{Re}\, z_n$ e $\mathrm{Im}\, z_n$ convergen en $\mathbb{R}$.
En caso de convergencia
$lim_n z_n = lim_n \,\mathrm{Re}\, z_n + i lim_n \,\mathrm{Im}\, z_n$.

Compacidad.

$(\mathbb{C}, d)$ es un espacio métrico. Luego un subconjunto K es compacto si, y sólo si, toda sucesión de elementos de K admite una subsucesión convergente hacia un punto de K.

Es importante, ya que lo manejaremos frecuentemente, recordar que en $\mathbb{C}$ un subconjunto K es compacto si, y sólo si, K es cerrado y acotado.

Además, y como corolario, tenemos el siguiente resultado:

Teorema de Bolzano-Weierstrass.

Cada sucesión acotada de números complejos admite una subsucesión convergente.

Compactificación del plano complejo. El plano ampliado.

$(\mathbb{C}, d)$ es un espacio métrico completo pero no es compacto. Vamos a proceder a compactificarlo.

Sea $\sum$ la esfera de Riemann, es decir,

$$\sum = \left\{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + \left(x_3 - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2\right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

La proyección estereográfica $(x, y, 0)$ del punto $(x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 1)$ de la esfera es:

$$x = \frac{x_1}{1 - x_3}, y = \frac{x_2}{1 - x_3}.$$

Esta proyección es una aplicación biyectiva entre $\sum \setminus \{(0, 0, 1)\}$ y $\mathbb{C}$. (Hacer el dibujo correspondiente).

Una sucesión (x_{1n}, x_{2n}, x_{3n}) en $\sum \setminus \{(0, 0, 1)\}$ converge hacia $(0, 0, 1)$, en la métrica usual de $\mathbb{R}^3$ si, y sólo si, la sucesión de proyecciones z_n en $\mathbb{C}$ verifica $|z_n| \longrightarrow \infty$.

Extendemos la proyección estreográfica haciendo corresponder al punto $(0, 0, 1)$ el pùnto ∞ que añadimos a $\mathbb{C}$. Obtenemos así el plano ampliado $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. La topología de $\widehat{\mathbb{C}}$ viene descrita a través de las bases de entornos de cada uno de sus puntos. Las bases de entornos de los puntos $z \in \mathbb{C}$ son lasmismas que en $(\mathbb{C}, d)$. es decir, discos de la forma $\{D(z, r) : r > 0\}$. La base de entornos de ∞ es $\{D(\infty, r) : r > 0\}$ donde $D(\infty, r) =$

$\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\} \cup \{\infty\}$. Ahora ya damos sentido a expresiones del tipo:

$$\begin{aligned} (z_n) \quad &\subset \quad \widehat{\mathbb{C}} \text{ con } (z_n) \longrightarrow \infty \\ \lim_{z \longrightarrow \infty} f(z) \text{ para funciones } f \quad &: \quad \widehat{\mathbb{C}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}} \end{aligned}$$

Observación.

Si en la proyección anterior

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3) \quad &\longleftrightarrow \quad z \\ (x'_1, x'_2, x'_3) \quad &\longleftrightarrow \quad z' \end{aligned}$$

definimos $\widehat{d}(z, z')$ =distancia euclídea entre (x_1, x_2, x_3) y (x'_1, x'_2, x'_3), resulta que $\widehat{d}\ |_{\mathbb{C}}$es una métrica equivalente a d y

$(\ \widehat{\mathbb{C}}, \widehat{d})$ es un espacio métrico completo y compacto.

Repaso sobre convergencia de sucesiones y series.

Recordemos las siguientes definiciones, conceptos y relaciones:

Vamos a considerar siempre sucesiones y series de números complejos.

Def.-

$$(z_n) \longrightarrow z \Longleftrightarrow_{def} \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Longrightarrow |z_n - z| < \epsilon$$

Def.-

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k \text{ es convergente} \Longleftrightarrow_{def} \exists s \in \mathbb{C} : (s_n) = (\sum_{k=1}^{n} z_k) \longrightarrow s$$

En este caso escribiremos

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = s$$

Def.-

(z_n) es de Cauchy $\Longleftrightarrow_{def} \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : p, q \geq N \Longrightarrow |z_p - z_q| < \epsilon.$

Otra forma de escribir lo anterior es:

$$(z_n) \text{ es de Cauchy } \Longleftrightarrow_{def}$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Longrightarrow \forall p = 0, 1, 2, ..., |z_n - z_{n+p}| < \epsilon.$$

La completitud de $\mathbb{C}$ nos permite afirmar:

$$(z_n) \text{ es convergente} \Longleftrightarrow (z_n) \text{ es de Cauchy}$$

Criterio de Cauchy:

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k \ \textit{es convergente} \Longleftrightarrow$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Longrightarrow \forall p = 1, 2, ..., \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} z_k \right| < \epsilon$$

Convergencia absoluta.

Def.-

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k \ \textit{converge absolutamente si} \ \sum_{k=1}^{\infty} |z_k| \ \textit{es convergente}$$

El Criterio de Cauchy nos dice que

$$\text{Convergencia absoluta} \Longrightarrow \text{Convergencia}$$

Modos de convergencia en teoría de funciones.

En los próximos capítulos veremos como los procesos de límite nos permiten obtener nuevas funciones holomorfas además de los polinomios y funciones racionales.

En este capítulo vamos a considerar siempre $X \subset \mathbb{C}$, no vacío, y (f_n) una sucesión de funciones definidas en X con valores en $\mathbb{C}$.

Convergencia puntual.

Def.-

$$(f_n) \text{ converge puntualmente en } A \subset X \text{ si } \forall z \in A, \exists \lim_n (f_n(z))$$

En este caso la función límite puntual es

$$f(z) := \lim_n (f_n(z)), z \in A$$

Observación. Incluso en funciones reales, la convergencia puntual no garantiza buenas propiedades en la función límite. Por ejemplo $(x^n) \longrightarrow f(x)$ en $[0,1]$, donde $f(x) = 0$, si $x \in [0,1)$ y $f(x) = 1$ si $x = 1$.(f es discontinua).

A pesar de esto, "No conocemos ninguna sucesión simple de funciones holomorfas en el disco unidad U que sea puntualmente convergente a una función no holomorfa en U ".(Tales funciones pueden construirse utilizando el Teorema de Runge que nosotros no veremos en este curso).

Convergencia uniforme.

$$\begin{aligned}(f_n) &\longrightarrow f \text{ uniformemente en } A \subset X, f : A \longrightarrow \mathbb{C} \Longleftrightarrow_{def}\\ \forall \epsilon &> 0, \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N} : |f_n(z) - f(z)| < \epsilon, \forall n \geq N, \forall z \in A\end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k \text{ converge uniformemente en } A \subset X \Longleftrightarrow_{def}$$

$$(s_n) = \left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right) \text{ converge uniformemente en } A$$

Notaciones: En lo sucesivo será de mucha utilidad utilizar las siguientes notaciones:

$$|f|_A := Sup\{|f(z)| : z \in A\}$$

Si consideramos V el espacio vectorial, sobre $\mathbb{C}$, definido por:

$$V := \{f : X \longrightarrow \mathbb{C} : |f|_A < \infty\}$$

se verifican las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} |f|_A &= 0 \Longleftrightarrow f\ |_A = 0 \\ |cf|_A &= |c|\,|f|_A\,, c \in \mathbb{C} \\ |f+g|_A &\leq |f|_A + |g|_A \end{aligned}$$

Con esta notación

$$(f_n) \longrightarrow f \text{ uniformemente en } A \Longleftrightarrow \lim_n |f_n - f|_A = 0$$

Propiedades.

$$\begin{aligned} &\text{Si } (f_n) \text{ y } (g_n) \text{ conv. unif. en } A, \text{ entonces} \\ \forall a, b \ \in \ &\mathbb{C}, (af_n + bg_n) \longrightarrow_{unif.enA} \left(a \lim_n f_n + b \lim_n g_n\right) \end{aligned}$$

Si (f_n) y (g_n) conv. unif. en A y $\lim_n f_n, \lim_n g_n$ estan acotadas en A, entonces

$$\lim(f_n g_n) = \left(\lim_n f_n\right)\left(\lim_n g_n\right) \text{ uniformemente en } A.$$

Observación.- Si $(f_n) \subset C(X)$ y $(f_n) \longrightarrow f$ uniformemente en X , entonces $f \in C(X)$.

Criterios de Cauchy.

$$(f_n)\text{converge uniformemente en } A \Longleftrightarrow$$

$$(f_n) \text{ es uniformemente de Cauchy en } A, \text{ es decir,}$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N} : |f_n - f_m|_A < \epsilon, \forall m, n \geq N$$

Para series tendríamos:

$$\sum(f_n)\text{converge uniformemente en } A \Leftrightarrow$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N} : |f_{m+1}(z) + ... + f_n(z)| < \epsilon, \forall n > m \geq N, \forall z \in A$$

Criterio M-Weierstrass.

Supongamos que existe $(M_n) \subset \mathbb{R}, M_n \geq 0$ *tal que* $|f_n|_A \leq M_n$ *y* $\sum M_n < \infty$. *Entonces* $\sum(f_n)$ *converge uniformemente en* A.

D) Veamos que $\sum(f_n)$ satisface el criterio de Cauchy en sentido uniforme.

$$\forall n > m, \forall z \in A, \left|\sum_{m+1}^{n} f_k(z)\right| \leq \sum_{m+1}^{n} |f_k(z)| \leq \sum_{m+1}^{n} M_k$$

Por otro lado la condición $\sum M_n < \infty$, nos dice que

$$\forall \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N} : \sum_{m+1}^{n} M_k < \epsilon, \forall n > m \geq N, \forall z \in A$$

es decir $\sum(f_n)$converge uniformemente en A.

Observación.

En las condiciopnes del Criterio M-Weierstrass, es obvio que la serie $\sum(f_n)$ converge absolutamente en A, en el sentido de que $\forall z \in A, \sum_{n=0}^{\infty} |f_n(z)|$ es convergente.

Def. $\sum(f_n)$converge normalmente en X si para todo compacto $K \subset X$ se verifica:$\sum |f_n|_K < \infty$.

Si $X = B(z_0; r)$ en $\mathbb{C}$, cada compacto $K \subset X$ esta incluído en $B(z_0; s)$ para algún s con $s < r$. Luego en este caso $\sum(f_n)$converge normalmente en X si, y solo si, para cada s con $0 < s < r$ se verifica $\sum |f_n|_{B(z_0;s)} < \infty$.

Convergencia uniforme sobre compactos.

$$(f_n)\text{converge uniformemente sobre los compactos de } X \Longleftrightarrow_{def}$$

$$\text{Para cada compacto } K \subset X \text{ se verifica : } (f_n)\text{converge uniformemente en } K$$

Análogo para series.

$$\sum(f_n)\text{converge uniformemente sobre los compactos de } X \Longleftrightarrow_{def}$$

$$\text{Para cada compacto } K \subset X \text{ se verifica : } \sum(f_n)\text{converge uniformemente en } K$$

Observación. Si $(f_n) \subset C(X)$, la convergencia uniforme sobre compactos de X asegura, tanto en el caso de sucesiones como de series , la continuidad en X del límite.

Observación. El criterio M-Weierstrass nos dice que toda serie normalmente convergente en X converge uniformemente sobre los compactos de X.

Ejemplos.

La sucesión (z^n) converge en cada disco $B(0;r), r < 1$, uniformemente hacia la función cero ya que $|z^n|_{B(0;r)} = r^n$, pero la convergencia no es uniforme en el disco unidad $U = \{z : |z| < 1\}$. En efecto si $0 < \epsilon < 1$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un punto z_0 en U, por ejemplo $z_0 = \sqrt[n]{\epsilon}$, tal que $|z_0|^n \geq \epsilon$.

Esta situación es muy común en la teoría de funciones holomorfas.

La serie $g(z) = \sum \frac{z^n}{n}$ converge normalmente en el disco unidad U. En efecto si $0 < r < 1$, entonces

$$\sum |f_n|_{B(0;r)} \leq \sum \frac{r^n}{n} \leq r^n < \infty$$

Esta serie no converge uniformemente en el disco unidad U. En efecto, en caso contrario la serie $\sum \frac{x^n}{n}$ debería de converger uniformemente en $[0, 1)$. En este caso

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Longrightarrow$$

$$\forall x \in [0, 1) \text{ y } \forall p = 0, 1, 2, ..., \frac{x^n}{n} + ... + \frac{x^{n+p}}{n+p} < \epsilon$$

Por otro lado la divergencia de la serie

$$\frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} + ...$$

nos permite elegir un $p \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} + ... + \frac{1}{N+p} > 2\epsilon$$

Entonces si tomamos un x próximo a 1 de modo que $x^{N+p} > 1/2$, obtenemos

$$\frac{x^N}{N} + ... + \frac{x^{N+p}}{N+p} > x^{N+p}(\frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} + ... + \frac{1}{N+p}) > \epsilon$$

Observación.

Si las series $f = \sum(f_n), g = \sum(g_n)$ convergen normalmente en X, entonces la serie producto de Cauchy

$$\sum p_\lambda, \text{con } p_\lambda = \sum_{\mu+\nu=\lambda} f_\mu g_\nu$$

converge normalmente en X a $f.g$.

(Verlo)