Funciones holomorfas.

Ω siempre será un abierto del plano complejo; si $z_0 \in \Omega$ y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ definimos:

$$f \text{ es holomorfa en } z_0 \text{ si existe } \lim_{z \longrightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Aclarar el significado de este límite.

$H(\Omega) \equiv$ funciones holomorfas en $\Omega \equiv$ funciones holomorfas en cada punto de Ω; $H(\mathbb{C}) \equiv$ funciones enteras.

La holomorfía de f en z_0 implica la continuidad de f en z_0. En efecto, sea

$$\begin{aligned} \epsilon(z) &= \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0), z \neq z_0 \\ \epsilon(z_0) &= 0, z = z_0 \end{aligned}$$

La función $\epsilon(z)$ está definida en Ω y es continua en z_0. Por otro lado

$$f(z) - f(z_0) = f'(z_0)\,(z - z_0) + \epsilon(z)\,(z - z_0)$$

es decir,

$$\lim_{z \longrightarrow z_0} [f(z) - f(z_0)] = 0$$

- $|z|$ es continua en $\mathbb{C}$ y no es holomorfa en ningun punto.

Teorema.

Sean $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfas en Ω. Entonces

$$(i)\ (af + bg) \text{ es holomorfa en } \Omega \text{ y}$$

$$(af + bg)'(z) = af'(z) + bg'(z), \forall a, b \in \mathbb{C}, \forall z \in \Omega$$

$$(ii)\ fg \text{ es holomorfa en } \Omega \text{ y}$$

$$(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z), \forall z \in \Omega$$

(iii) Si $g(z) \neq 0, \forall z \in \Omega$, entonces f/g es holomorfa en Ω y

$$(f/g)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{[g(z)]^2}, \forall z \in \Omega$$

(iv) Todo polinomio $a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$

es una función entera con derivada

$$a_1 + 2a_2 z + ... + n a_n z^{n-1}$$

Toda función racional

$$\frac{a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + ... + b_m z^m}$$

es holomorfa en

$$A = \{z \in \Omega : \text{el denominador no es nulo}\}$$

Las propiedades anteriores nos permiten afirmar que el espacio $H(\Omega)$, con las operaciones usuales, es un anillo.

Regla de la Cadena.

Si $f \in H(\Omega), g \in H(\Omega_1), f(\Omega) \subset \Omega_1$ y $h = g \circ f$, entonces h es holomorfa en Ω y $\forall z \in \Omega, h'(z) = g'(f(z)).f'(z)$.

D) Sea z_0 un punto arbitrario de Ω y $\omega_0 = f(z_0)$. Definimos la función s en Ω_1 por la expresión

$$\begin{aligned} s(\omega) &= \frac{g(\omega) - g(\omega_0)}{\omega - \omega_0} - g'(\omega_0); \omega \neq \omega_0 \\ s(\omega_0) &= 0 \end{aligned}$$

La función s es continua en Ω_1. La continuidad de f en Ω nos asegura que

$$\lim_{z \longrightarrow z_0} s(f(z)) = s(\omega_0) = 0$$

Por otra parte, si $z \neq z_0$ podemos escribir

$$\begin{aligned} g(f(z)) - g(f(z_0)) &= [s(f(z)) + g'(\omega_0)][f(z) - \omega_0] \\ \frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{z - z_0} &= [s(f(z)) + g'(\omega_0)]\frac{[f(z) - f(z_0)]}{z - z_0} \end{aligned}$$

Luego

$$\lim_{z \longrightarrow z_0} \frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0} = g'(f(z_0).f'(z_0)$$

Derivación real y derivación compleja. Ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Consideramos las siguientes notaciones:

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}; f = u + iv; f(z) = u(x, y) + iv(x, y) siz = x + iy$$

El cuerpo $\mathbb{C}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ de dimensión 1, con $\{1\}$ como base canónica. Así mismo el cuerpo $\mathbb{C}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión 2, con $\{1, i\}$ como base canónica.

Observación:

$$f \text{ es holomorfa en } z_0 \text{ } (\mathbb{C} \text{ derivable en } z_0) \Longleftrightarrow$$

$$\exists L : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \ \mathbb{C} - \text{lineal tal que}$$

$$f(z) - f(z_0) = L(z - z_0) + \epsilon(z)(z - z_0), , \epsilon(z) \longrightarrow 0 \text{ si } z \longrightarrow z_0$$

La función $\epsilon(z)$ esta definida en un disco perforado centrado en z_0.

En efecto, si f es holomorfa en z_0 la aplicación $L(z) = z.f'(z_0)$ cumple la condición señalada. Recíproco, basta comprobar que $f\prime(z_0) = L(1)$.

Def.

$$f \text{ es derivable en sentido real } (\mathbb{R} - \text{derivable}) \text{ en } z_0 \iff_{def}$$

$$\exists H : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ \mathbb{R} - \text{lineal tal que}$$

$$f(z) - f(z_0) = H(z - z_0) + \eta(z)(z - z_0),, \eta(z) \longrightarrow 0 \text{ si } z \longrightarrow z_0$$

La función $\epsilon(z)$ esta definida en un disco perforado centrado en z_0.

En este caso tenemos:

$$H(i) = \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(z_0 + ti) - f(z_0)}{t}$$

$$H(1) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(z_0 + t) - f(z_0)}{t}$$

Si tenemos en cuenta que una aplicación $H : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $\mathbb{R}-$lineal, es $\mathbb{C}-$lineal si, y sólo si, $H(i) = iH(1)$, obtenemos que si f es $\mathbb{R}$-derivable en z_0, entonces

$$f \text{ es holomorfa en } z_0 \iff$$

$$H(i) = iH(1) \iff \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = i\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0)\right] \wedge \left[\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0)\right]$$

Las ecuaciones

$$\frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0)$$

reciben el nombre de **Ecuaciones de Cauchy-Riemann.**

Observación. Si f es holomorfa en z_0, entonces

$$f'(z_0) = L(1) = H(1) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) =$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(z_0$$

Nota. Si u y v son C^1 en Ω (que asegura la $\mathbb{R}$-derivabilidad de f en Ω) y satisfacen las Ec. de C-R, entonces f es holomorfa en Ω.

Ejemplos.

1.- $f(z) = \overline{z}$ no es holomorfa en ningún punto.

2.- $f(z) = |z|$ no es holomorfa en ningún punto.

3.- $f(z) = |z|^2$ es holomorfa sólo en $(0,0)$.

4.- $f(z) = |xy|^{\frac{1}{2}}$, $z = x + iy$ verifica las Ec. de C-R en $(0,0)$ pero no es holomorfa en dicho punto. (f no es $\mathbb{R}-$derivable en $(0,0)$, u y v tienen derivadas parciales discontinuas en $(0,0)$.

Corolario.- *Si $f \in H(\Omega)$, Ω es conexo y $f'(z) = 0$, $\forall z \in \Omega$, entonces f es constante en Ω.*

D) f es $\mathbb{R}-$derivable en Ω y su diferencial es nula.

Operadores ∂ y $\overline{\partial}$

$$\partial = \frac{\partial/\partial x - i\partial/\partial y}{2}; \overline{\partial} = \frac{\partial/\partial x + i\partial/\partial y}{2}$$

Si f es $\mathbb{R}-$derivable en z_0, entonces f es holomorfa en z_0 si, y sólo si, $\overline{\partial}f(z_0) = 0$. En este caso $f'(z_0) = \partial f/\partial x(z_0) = \partial f(z_0)$.

Funciones armónicas.

No todas las funciones reales $u(x, y)$ diferenciables son la parte real de funciones diferenciables en sentido complejo. Las Ec. de C-R imponen condiciones restrictivas a $u(x, y)$ para que esto ocurra.

Teorema. *Sea $f = u + iv$ holomorfa en Ω. Supongamos que u y v son de clase C^2 en Ω. Entonces*

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \wedge v_{xx} + v_{yy} = 0 \text{ en } \Omega$$

D) La holomorfía de f en Ω nos dice que u y v satisfacen las Ec. de C-R en Ω, es decir

$$u_x = v_y \wedge u_y = -v_x$$

Derivando obtenemos:

$$u_{xx} = v_{yx} \wedge u_{yx} = -v_{xx}$$

$$u_{xy} = v_{yy} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_{yy} = -v_{xy}$$

Es decir,

$$v_{xx} + v_{yy} = -u_{yx} + u_{xy} = 0$$

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0$$

Nota. Las hipótesis C^2 es supérflua. Veremos más adelante que toda función holomorfa es infinitamente derivable en sentido complejo.

Laplaciano.

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Def. Una función $u(x, y)$ dos veces diferenciable en sentido real es armónica en Ω si $\Delta u = 0$ en Ω.

Ejemplo.

Las funciones

$$\begin{aligned} u(x, y) &= e^x \cos y \\ v(x, y) &= e^x \sin y \end{aligned}$$

son armónicas en $\mathbb{C}$. (Veremos más adelante que $u = \operatorname{Re} e^z \wedge v = \operatorname{Im} e^z$

Las funciones

$$\begin{aligned} (x, y) &\longrightarrow \log |z|\,, \; z = x + iy \\ (x, y) &\longrightarrow \arctan \frac{y}{x} \end{aligned}$$

son armónicas en sus dominios de definición.

La función

$$(x, y) \longrightarrow |z|^2 = x^2 + y^2$$

no es armónica.

Series de potencias.

Son series del tipo

$$\sum_0^\infty a_n (z - z_0)^n, a_n \in \mathbb{C}$$

Este tipo de series forman una $\mathbb{C}-$álgebra. En efecto:

-Todo $a \in \mathbb{C}$ se identifica con $a + \sum_1^\infty 0(z - z_0)$.

-Si $f = \sum a_n(z-z_0)^n$ y $g = \sum b_n(z-z_0)^n$, entonces $f + g = \sum(a_n+b_n)(z-z_0)^n$ y $f.g = \sum c_k(z-z_0)^k$ donde $c_k = \sum_{n+m=k} a_n b_m$ (multiplicación de Cauchy de series).

Notaciones simplificadas.

En general trabajaremos con series centradas en $z_0 = 0$.Utilizaremos las notaciones

$$B_r = B(0;r) \text{ y } \sum_0^\infty a_n z^n \simeq \sum a_n z^n$$

Lema de Abel.

Supongamos que para la serie $\sum a_n z^n$ existen números reales positivos s y M tales que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |a_n|\, s^n \leq M.$$

Entonces la serie $\sum a_n z^n$ es normalmente convergente en B_s.

D) Sea $r \in \mathbb{R}$ tal que $0 < r < s$. Sea $q = rs^{-1} < 1$. Entonces

$$|a_n z^n|_{B_r} \leq |a_n|\, r^n \leq M q^n.$$

Por consiguiente

$$\sum |a_n z^n|_{B_r} \leq M \sum q^n < \infty,$$

es decir $\sum a_n z^n$ es normalmente convergente en B_s.

Corolario.

Si la serie $\sum a_n z^n$ converge en $z_0 \neq 0$, entonces converge normalmente en $B_{|z_0|}$.

D) La sucesión $|a_n|\,|z_0|^n$ es nula y por consiguiente acotada. Aplicar lo anterior a $s = |z_0|$ y a $M > 0$ con $|a_n|\,|z_0|^n < M, \forall n \in \mathbb{N}$.

Radio de convergencia.

La serie $\sum z^n$ converge en el disco unidad U ya que

$$\sum_0^n z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \text{ y } z^{n+1} \longrightarrow 0 \text{ cuando } |z| < 1.$$

Es decir

$$\sum_0^\infty z^n = \frac{1}{1 - z} \text{ si } |z| < 1.$$

Obviamente esta serie diverge en $\mathbb{C} \backslash U$.

Este comportamiento es representativo de todas las series de potencias. En efecto:

Teorema. *Sea* $\sum a_n z^n$ *una serie de potencias. Sea*

$$R \;=\; \sup \{t \geq 0 : |a_n| \, t^n \text{ es una sucesión acotada}\}.$$

Entonces:

1) La serie converge normalmente en el disco B_R.

2) La serie diverge en cada punto $\omega \in \mathbb{C} \backslash \overline{B_R}$.

D) Por definición $0 \leq R \leq \infty$. Si $R = 0$ nada hay que demostrar. Supongamos $R > 0$. La sucesión $|a_n| \, s^n$ es acotada para cada s con $0 < s < R$. Luego el Lema de Abel nos dice que $\sum a_n z^n$ converge normalmente en B_s para cada s con $0 < s < R$. Si tenemos en cuenta que B_R es la unión de discos del tipo B_s, resulta que la serie converge normalmente en B_R.

Para cada $\omega \in \mathbb{C} \backslash \overline{B_R}$, la sucesión $|a_n| \, |\omega|^n$ no está acotada, luego $\sum a_n \omega^n$ es necesariamente divergente.

Def.

$R \in [0, \infty]$ determinado por el teorema anterior recibe el nombre de radio de convergencia de la serie, y B_R es su disco de convergencia.

Fórmula de Cauchy-Hadamard.

El radio de convergencia de la serie $\sum a_n (z - z_0)^n$ *es*

$$R = \left(\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1}$$

D) Recordar que si $(r_n) \subset \mathbb{R}$, entonces

$$\overline{\lim}\,(r_n) := \lim_{k \longrightarrow \infty} \left[Sup\,\{r_k, r_{k+1}, ...\}\right]; 1/0 := \infty, 1/\infty := 0$$

Sea

$$L = \left(\overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1}.$$

Demostrar $L \leq R$ equivale a probar:

$$i) \; \forall r \text{ con } 0 < r < L \text{ se verifica } r \leq R.$$

Demostrar $R \leq L$ equivale a probar:

$$\forall s \text{ con } L < s < \infty \text{ se verifica } R \leq s.$$

Prueba de $i)$
Si $0 < r < L$, entonces $r^{-1} > \overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_n|}$. Entonces

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, \;\; \sqrt[n]{|a_n|} < r^{-1}$$

y por consiguiente $|a_n|\, r^n$ es acotada, es decir $r \leq R$.
Prueba de $ii)$
Si $L < s < \infty$, entonces $s^{-1} < \overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_n|}$. Entonces

$$\exists M \in \mathbb{N} \text{ infinito} : \forall m \in M, \;\; s^{-1} < \sqrt[m]{|a_m|}$$

y por consiguiente $|a_m|\, s^m > 1, \forall m \in M$. De aquí podemos concluir que la sucesión $|a_n|\, s^n$ no es nula y por consiguiente $s \geq R$.

Ejemplos:

$$\begin{aligned} \sum n^n z^n, R &= 0 \\ \sum z^n, R &= 1 \\ \sum \frac{z^n}{n^n}, R &= \infty \end{aligned}$$

En series del tipo $\sum z^n/n!$ puede ser útil utilizar el siguiente criterio del cociente:

Criterio del cociente:

Sea $\sum a_n(z-z_0)^n$ una serie de potencias con radio de convergencia R. Supongamos que $a_n \neq 0$ para infinitos valores de n. Entonces:

$$\underline{\lim}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \leq R \leq \overline{\lim}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

En particular

$$R = \lim_n \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

cuando este límite exista.

D) Demostración hecha en primer curso.

Ejemplos:

$$\begin{aligned}
\sum z^n/n!, R &= \infty; \sum z^n/n^2, R = 1 \\
\sum n! z^n, R &= 0; \sum (1+(-1)^n)^n z^n, R = 1/2 \\
\sum n^{\log n} z^n, R &= 1; \sum (n!/n^n) z^n, R = e \\
\sum n^p z^n, (p &> 0), R = 1; \sum (n!)^{1/n} z^n, R = 1 \\
\sum z^{n^2}; R &= 1
\end{aligned}$$

Holomorfía de las funciones definidas por series de potencias.

Teorema.

Si la serie $\sum a_n(z-z_0)^n$ tiene radio de convergencia R, entonces las series

$$\sum n a_n (z-z_0)^{n-1} \text{ (derivada) y } \sum (n+1)^{-1} a_n (z-z_0)^{n+1} \text{ (integral)}$$

tienen también radio de convergencia R.

D) Las series $\sum a_n(z-z_0)^n$ y $\sum na_n(z-z_0)^n$ tienen el mismo radio de convergencia. Por otro lado es obvio que la serie $\sum na_n(z-z_0)^n$ converge en un punto $z \neq z_0$ si, y sólo si, la serie $\sum na_n(z-z_0)^{n-1}$ converge en el mismo punto. Teniendo en cuenta las propiedades del radio de convergencia, deducimos ambas series tienen el mismo radio de convergencia, es decir $\sum a_n(z-z_0)^n$ y $\sum na_n(z-z_0)^{n-1}$ tienen el mismo radio de convergencia.

Argumento similar para la serie integral.

Teorema.

Si la serie de potencias $\sum a_n(z-z_0)^n$ tiene radio de convergencia $R > 0$, entonces la función

$$f(z) = \sum a_n(z-z_0)^n, z \in B_R(z_0) = B(z_0; R)$$

es infinitamente derivable en sentido complejo en $B_R(z_0)$.

Además

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n \geq k} k! \binom{n}{k} a_n(z-z_0)^{n-k}, z \in B_R(z_0), k \in \mathbb{N},$$

en particular

$$\forall k \in \mathbb{N}, \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = a_k, \text{ serie de Taylor}$$

D) es suficiente con probar el caso $k = 1$. El caso general resulta por iteración. La función

$$g(z) := \sum na_n(z-z_0)^{n-1}, \text{ está bien definida en } B = B(z_0; R)$$

Veamos que $f' = g$ en B. Supongamos $z_0 = 0$. Sea $b \in B$ fijo y comprobemos que $f'(b) = g(b)$. Sea

$$q_m(z) = z^{m-1} + z^{m-2}b + ... + z^{m-j}b^{j-1} + ... + b^{m-1}; z \in \mathbb{C}, m = 1, 2, 3, ...$$

Se verifica

$$z^m - b^m = (z-b)q_m(z), z \in \mathbb{C}.$$

Luego

$$\begin{aligned} f(z) - f(b) &= \sum_{m\geq 1} a_m(z^m - b^m) = \sum_{m\geq 1}(z-b)a_m q_m(z) = \\ &= (z-b)\sum_{m\geq 1} a_m q_m(z), z \in B \end{aligned}$$

Sea

$$f_1(z) = \sum_{m\geq 1} a_m q_m(z), z \in B$$

La relación $q_m(b) = mb^{m-1}$,nos permite escribir:

$$f(z) = f(b) + (z-b)f_1(z), z \in B$$

$$f_1(b) = \sum_{m\geq 1} ma_m b^{m-1} = g(b), z \in B.$$

Para finalizar la prueba sólo queda probar que f_1 es continua en b. Esta propiedad se deduce de la convergencia normal en B de la serie

$$f_1(z) = \sum_{m\geq 1} a_m q_m(z), z \in B$$

lo que es claro si observamos que si $|b| < r < R$,

$$|a_m q_m|_{B_r} \leq |a_m|\, m r^{m-1}$$

y por consiguiente

$$\sum_{m\geq 1} |a_m q_m|_{B_r} \leq \sum_{m\geq 1} m\,|a_m|\, r^{m-1} < \infty$$