Teorema de la Aplicacion Abierta

Nos proponemos ahora probar un teorema de la aplicación abierta para las funciones holomorfas. Utilizaremos para ello dos lemas de marcado carácter geométrico.

Lema 1

Sea f una función holomorfa en Ω y $D = D(z_0; r)$ con $\overline{D} \subset \Omega$. Si

$$\min\{|f(z)| : z \in \partial D\} > |f(z_0)|$$

entonces f tiene al menos un cero en D.

Demostración. Si f no tiene ceros en D tampoco los tiene en $\overline{D}$, luego existe un abierto U, con $\overline{D} \subset U \subset \Omega$ tal que f no tiene ceros en U. Consideramos la función $g(z) = (f(z))^{-1}$ que es holomorfa en U. Se verifica

$$|f(z_0)|^{-1} = |g(z_0)| \leq \max\{|g(z)| : z \in \partial D\} =$$

$$\max\left\{\frac{1}{|f(z)|} : z \in \partial D\right\} = (\min\{|f(z)| : z \in \partial D\})^{-1},$$

luego

$$|f(z_0)| \geq \min\{|f(z)| : z \in \partial D\}$$

que es una contradicción.

Lema 2

Sea f una función holomorfa en Ω y $D = D(z_0; r)$ con $\overline{D} \subset \Omega$. Si

$$2\delta = \min\{|f(z) - f(z_0)| : z \in \partial D\} > 0,$$

entonces

$$\{z : |z - f(z_0)| < \delta\} \subset f(D).$$

Demostración. Sea $b \in \mathbb{C} : |b - f(z_0)| < \delta$. Si $z \in \partial D$ se verifica

$$|f(z) - b| \geq |f(z) - f(z_0)| - |b - f(z_0)| > 2\delta - \delta = \delta,$$

luego

$$\min\{|f(z) - b| : z \in \partial D\} > |f(z_0) - b|.$$

Por el lema 1 concluimos que $f(z) - b$ tiene al menos un cero z_1 en D, es decir $b = f(z_1)$.

Estamos ya en condiciones de probar el Teorema de la Aplicación Abierta.

Teorema de la Aplicación Abierta

Toda función holomorfa en un abierto, que no sea localmente constante en ningún punto, es abierta.

Demostración. Sea f una función holomorfa en Ω, U un abierto arbitrario contenido en Ω y $z_0 \in U$. Probemos que $f(U)$ contiene un disco centrado en $f(z_0)$. La función f no es constante en ningún entorno de z_0, luego el principio de identidad nos dice que existe D disco centrado en z_0 tal que $\overline{D} \subset U$ y $f(z_0) \notin f(\partial D)$, es decir

$$2\delta = \min \{|f(z) - f(z_0)| : z \in \partial D\} > 0.$$

Aplicando el lema 2 obtenemos

$$D(f(z_0); \delta) \subset f(D) \subset f(U)$$

con lo que la prueba concluye.

Este teorema nos permite dar una sencilla y elegante demostración del Principio del Módulo Máximo.

Corolario (Principio del Módulo Máximo)

Sea f una función holomorfa en un abierto y conexo Ω. Si f no es constante en Ω entonces $|f|$ no admite un máximo local en Ω.

Demostración. Si existieran $z_0 \in \Omega$ y $r > 0$ tales que

$$\forall z \in D(z_0; r) \;\; |f(z)| \leq |f(z_0)|,$$

entonces

$$f(D(z_0; r)) \subset \overline{D}(0; |f(z_0)|$$

y f no es abierta. El teorema anterior nos dice que f es entonces localmente constante en un punto. El principio de identidad nos hace concluir que entonces f es constante en Ω.

Teorema (Principio del Módulo Máximo para regiones acotadas)

Sea Ω un abierto acotado y conexo del plano complejo y f holomorfa en Ω, continua en $\overline{\Omega}$. Entonces el máximo de $|f|$ en $\overline{\Omega}$ se alcanza siempre en $\partial\Omega$.

Demostración. Si $|f|$ alcanza su máximo en $\overline{\Omega}$ en un punto de Ω, entonces $|f|$ tiene en ese punto un máximo local.

Aplicaciones conformes
Introducción

Definición

Sea $f:\Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ *y* $z_0 \in \Omega$*. Diremos que* f *es conforme en* z_0 *si existe* $\theta \in [0, 2\pi)$ *y* $r > 0$ *tales que para cualquier curva* $c(t)$*, diferenciable en* $t = 0$*,* $c(t) \in \Omega$*,* $c(0) = z_0$ *y* $v = c'(0) \neq 0$ *(*v *es el vector tangente a* c *en* $c(0)$*), la curva* $d(t) = f(c(t))$ *es diferenciable en* $t = 0$ *y si* $u = d'(o)$ *se tiene* $|u| = r\,|v|$ *y* $\arg u = \arg v + \theta \pmod{.2\pi}$.

f *es conforme en* Ω *si lo es en cada punto de* Ω*.*

Interpretación geométrica relacionando el concepto de "conforme" con la propiedad de "conservación de ángulos".

Si f es holomorfa en z_0 con $f'(z_0) \neq 0$ entonces $u = d'(o) = f'(z_0)c'(0) = f'(z_0)v$. Es decir $\arg u = \arg f'(z_0) + \arg v \pmod{.2\pi}$ y $|u| = |f'(z_0)|\,|v|$. En conclusión podemos afirmar que si f es holomorfa en $z_{0,}$ con derivada no nula, entonces f es conforme en z_0 con $\theta = \arg f'(z_0)$ y $r = |f'(z_0)|$.

Transformaciones de Möbius

Sean a, b, c, d números complejos tales que $ad - bc \neq 0$. La aplicación

$$f : \widehat{\mathbb{C}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}, f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

$$c = 0 \Longrightarrow f(\infty) = \infty; c \neq 0 \Rightarrow f(\infty) = \frac{a}{c} \text{ y}$$

$$f(\frac{-d}{c}) = \infty; f^{-1}(\omega) = \frac{d\omega - b}{-c\omega + a}$$

se denomina transformación de Möbius o transformación bilineal. Son siempre transformaciones biyectivas.

La condición $ad - bc \neq 0$ asegura que la derivada en cada punto es no nula. Si

$$f_1(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} \text{ y } f_2(z) = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}$$

entonces

$$(f_1 \circ f_2)(z) = \frac{(a_1a_2 + b_1c_2)z + (a_1b_2 + b_1d_2)}{(c_1a_2 + d_1c_2)z + (c_1b_2 + d_1d_2)}.$$

Luego la composición de dos transformaciones de Möbius es otra transformación del mismo tipo.

Transformaciones de Möbius elementales

(a) Traslaciones $z \longrightarrow z + \alpha, \alpha \in \mathbb{C}$
(b) Rotaciones $z \longrightarrow az, a \in \mathbb{C}, |a| = 1$
(c) Homotecias $z \longrightarrow rz, r > 0$
(d) Inversiones $z \longrightarrow \frac{1}{z}$

Observaciones

1. Una homotecia $z \longrightarrow kz, k > 0$, transforma:

i) Circunferencias $|z - z_0| = r, r \in \mathbb{R}^+$, en circunferencias $|w - kz_0| = kr$

ii) Rectas $\mathrm{Re}\left\{e^{-i\theta}z\right\} = c, c \in \mathbb{R}^+$, en rectas $\mathrm{Re}\left\{e^{-i\theta}w\right\} = kc$

2. La inversión $w = \frac{1}{z}$ transforma:

i) Circunferencias $|z - z_0| = r$, que no pasan por el origen ($|z_0| \neq r$), en circunferencias que tampoco pasan por el origen.

ii) Circunferencias $|z - z_0| = r$, que pasan por el origen ($|z_0| = r$),en rectas que no pasan por el origen.

iii) Rectas $\mathrm{Re}\left\{e^{-i\theta}z\right\} = c, c \in \mathbb{R}^+$, que no pasan por el origen, en circunferencias que pasan por el origen $\left|w - \frac{e^{-i\theta}}{2c}\right| = \frac{1}{2c}$.

iv) Rectas, que pasan por el origen $\mathrm{Re}\left\{e^{-i\theta}z\right\} = 0$, en rectas que pasan por el origen $\mathrm{Re}\left\{e^{i\theta}w\right\} = 0$.

Proposición

Toda transformación de Möbius se puede descomponer en transformaciones elementales.

Demostración. Si $c =$ el resultado es obvio. Si $c \neq 0$

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{bc - ad}{c^2(z + \frac{d}{c})} + \frac{a}{c}$$

es decir, traslación $\frac{d}{c}$, inversión, homotecia y rotación

$$\frac{bc - ad}{c^2} = \left|\frac{bc - ad}{c^2}\right| e^{i \arg(\frac{bc-ad}{c^2})}$$

y traslación $\frac{a}{c}$.

Proposición

Si z_1, z_2, z_3 son tres números complejos distintos de $\widehat{\mathbb{C}}$, existe una única transformación de Möbius $w(z)$ que los transforma en los puntos $0, 1, \infty$ respectivamente. Si ninguno de los puntos z_1, z_2, z_3 son ∞, $w(z)$ viene definda por

$$w(z) = \frac{(z-z_1)}{(z-z_3)} . \frac{(z_2-z_3)}{(z_2-z_1)} \ (*)$$

$$Si \ z_1 = \infty, w(z) = \frac{z_2-z_3}{z-z_3}, (z_1 \longrightarrow \infty \ en \ *)$$

$$Si \ z_2 = \infty, w(z) = \frac{z-z_1}{z-z_3}, \ (z_2 \longrightarrow \infty \ en \ *)$$

$$Si \ z_3 = \infty, w(z) = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}, \ (z_3 \longrightarrow \infty \ en \ *)$$

Demostración. Sólo resta ver la unicidad. Sean w_1 y w_2 dos transformaciones de Möbius con dicha propiedad. Sea

$$(w_1 \circ w_2^{-1})(z) = \frac{az+b}{cz+d}, ad - bc \neq 0.$$

Resulta

$$0 = \frac{b}{d}, 1 = \frac{a+b}{c+d}, \frac{a}{c} = \infty,$$

es decir $b = c = 0$ y $a = d$. En conclusión $w_1 \circ w_2^{-1} = I$, es decir $w_1 = w_2$.

Corolario

Dadas dos circunferencias en $\widehat{\mathbb{C}}$, siempre existe una transformación de Möbius que trasforma una en la otra.

Aplicaciones biholomorfas.

Una aplicación biholomorfa entre dos abiertos del plano complejo es una aplicación f, holomorfa y biyectiva entre ambos, tal que f^{-1} es también holomorfa.

El siguiente resultado nos dice que las aplicaciones holomorfas e inyectivas son biholomorfas sobre su imágen.

Teorema.
Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ *holomorfa e inyectiva Entonces:*
i) $f(\Omega) = \Omega_1$ *es abierto*
ii) $\forall z \in \Omega, f'(z) \neq 0$
iii) $f : \Omega \longrightarrow \Omega_1$ *es biholomorfa y* $(f^{-1})'(w) = (f'(f^{-1}(w)))^{-1}$.

Demostración. El Teorema de la Aplicación abierta nos dice que Ω_1 es abierto. Además la relación $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$ prueba que f^{-1}es continua. La inyectividad de f nos asegura que f' no puede ser nula en ningun disco contenido en Ω. Luego el Teorema de identidad nos dice que el conjunto $Z(f')$, ceros de f' en Ω, es cerrado y discreto en Ω. Por ser f abierta, el conjunto $M = f(Z(f'))$ es cerrado y discreto en Ω_1.

Veamos en primer lugar que f^{-1} es holomorfa en $\Omega_1 \backslash M$. Sea $w_0 \in \Omega_1 \backslash M$, $z_0 \in \Omega$ con $f(z_0) = w_0$ y $f'(z_0) \neq 0$. La relación

$$\lim_{w \longrightarrow w_0} \frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(w_0)}{w - w_0} = \lim_{z \longrightarrow z_0} \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} = \frac{1}{f'(z_0)}$$

demuestra que f^{-1} es holomorfa en w_0 y que

$$(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w_0))}.$$

El Teorema de Prolongación de Riemann, la holomorfía de f^{-1} en $\Omega_1 \backslash M$ y la continuidad de f^{-1} en Ω_1, prueban que f^{-1} es holomorfa en Ω_1.

Finalmente veamos que para cada $w \in \Omega_1$ se verifica $(f^{-1})'(w).f'(f^{-1}(w)) = 1$. Sea $w \in \Omega_1$, $(w_n) \subset \Omega_1 \backslash M$ tal que $(w_n) \longrightarrow w$. Entonces

$$z_n = f^{-1}(w_n) \longrightarrow z = f^{-1}(w); f'(z_n) \longrightarrow f'(z) \text{ y } (f^{-1})'(w_n) \longrightarrow (f^{-1})'(w),$$

luego $(f^{-1})'(w).f'(f^{-1}(w)) = \lim (f^{-1})'(w_n).f'(f^{-1}(w_n)) = 1$.

La relación anterior prueba en particular que

$$\forall z \in \Omega,\ f'(z) \neq 0.$$

Ejemplos fundamentales de aplicaciones biholomorfas

1. La aplicación

$$T(z) = \frac{z-1}{z+1}$$

es una aplicación biholomorfa entre $\operatorname{Re} z > 0$ y U disco unidad abierto

2. Transformación de Cayley.
La aplicación

$$T(z) = \frac{z-i}{z+i}$$

es una aplicación biholomorfa entre $H = \operatorname{Im} z > 0$ y el disco unidad abierto.

3. Sea $\mathbb{C}^- = \mathbb{C} \setminus \{z : \operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z \leq 0\}$. La aplicación

$$q : H \longrightarrow \mathbb{C}^- \qquad z \longrightarrow -z^2$$

es biholomorfa por ser holomorfa y biyectiva. Luego la aplicación

$$p : U \longrightarrow \mathbb{C}^- \qquad z \longrightarrow \left(\frac{z+1}{1-z}\right)^2$$

es biholomorfa por el mismo argumento.

Automorfismos del disco unidad

Sea U el disco unidad abierto y

$$Aut(U) = \{\varphi : U \longrightarrow U : \varphi \text{ es biholomorfa}\}.$$

Para cada $\alpha \in U$, definimos

$$\varphi_\alpha(z) = \frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}$$

Proposición

φ_α es inyectiva. Aplica U sobre U y α en el 0. Además $(\varphi_\alpha)^{-1} = \varphi_{-\alpha}$ y se verifica

$$\varphi'_\alpha(0) = 1 - |\alpha|^2 \text{ y } \varphi'_\alpha(\alpha) = \frac{1}{1-|\alpha|^2}$$

Demostración.

$$\varphi_\alpha \in H(\mathbb{C}\backslash\left\{\frac{1}{\overline{\alpha}}\right\}; \frac{1}{\overline{\alpha}} \notin U,$$

$$\varphi_\alpha \text{ es holomorfa en } U \text{ y}$$

$$\varphi_{-\alpha}(\varphi_\alpha(z)) = z.$$

Luego $(\varphi_\alpha)^{-1} = \varphi_{-\alpha}$. De la relación

$$\forall t \in \mathbb{R}, \left|\frac{e^{it} - \alpha}{1 - \overline{\alpha}e^{it}}\right| = \left|\frac{e^{it} - \alpha}{e^{-it} - \overline{\alpha}}\right| = 1$$

se deduce que φ_α aplica $T = \{z : |z| = 1\}$ en T. Lo mismo es cierto para $\varphi_{-\alpha}$. Es decir $\varphi_\alpha(T) = T$. Por el principio del módulo máximo para regiones acotadas

$$\forall z \in U, |\varphi_\alpha(z)| < \max\{|\varphi_\alpha(z)| : z \in T\} = 1,$$

es decir $\varphi_\alpha(U) \subset U$. Consideando $\varphi_{-\alpha}$ obtenemos $\varphi_\alpha(U) = U$. En conclusión

$$\varphi_\alpha \in Aut(U), \varphi_\alpha(\alpha) = 0 \text{ y } \varphi_\alpha)^{-1} = \varphi_{-\alpha}$$

Lema de Schwarz.

Sea U el disco unidad abierto y $f : U \longrightarrow U$ holomorfa con $f(0) = 0$. Entonces

$$\forall z \in U, |f(z)| \leq |z| \text{ y } |f'(o)| \leq 1.$$

Si existe $z_0 \in U, z_0 \neq 0$, con $|f(z_0)| = |z_0|$ o si $|f'(o)| = 1$ entonces f es una rotación alrededor del origen.

Demostración. Consideramos la función

$$g(z) = \frac{f(z)}{z} \text{ si } z \neq 0; g(z) = f'(0) \text{ si } z = 0; z \in U.$$

El Teorema de Prolongación de Riemann nos dice que g es holomrfa en U. La relación

$$\forall z \in U, |f(z)| < 1$$

implica

$$\forall r < 1, \max_{|z|=r} |g(z)| < \frac{1}{r}.$$

Ahora, el principio del módulo máximo nos permite afirmar que

$$0 \leq |z| < r < 1 \Longrightarrow |g(z)| < \frac{1}{r}.$$

Tomando límites cuando $r \longrightarrow 1$ obtenemos

$$0 \leq |z| < 1 \Longrightarrow |g(z)| \leq 1,$$

es decir

$$0 \leq |z| < 1 \Longrightarrow |f(z)| \leq |z| \text{ y } |f'(o)| \leq 1.$$

En el caso de que $|f'(o)| = 1$ o $|f(z_0)| = |z_0|$, con $z_0 \in U \setminus \{0\}$, $|g|$ alcanza su máximo en U. El principio del módulo máximo nos dice que g es una constante λ con $|\lambda| = 1$. Es decir en este caso

$$f(z) = \lambda z, z \in U, |z| = 1$$

El siguiente Teorema nos dice cómo son todos los automorfismos del disco unidad.

Teorema.

$$f \in Aut(U) \Longleftrightarrow \text{Existe } \theta \in \mathbb{R}, \text{ existe } \alpha \in U \text{ tales que}$$

$$f(z) = e^{i\theta}\varphi_\alpha, z \in U.$$

Demostración. Sólo tenemos que probar la implicación $\Longrightarrow$).

Si $\beta = f(0)$ y $F = \varphi_\beta \circ f$ resulta que $F \in Aut(U)$ y $F(0) = 0$. Aplicando el Lema de Schwarz a F y F^{-1} obtenemos

$$\forall z \in U, |F(z)| \leq |z| \text{ y } \left|F^{-1}(z)\right| \leq |z|,$$

es decir

$$\forall z \in U, |F(z)| = |z|.$$

De nuevo el Lema de Schwarz nos dice que

$$\text{existe } \theta \in \mathbb{R}, \text{ tal que } \forall z \in U, F(z) = e^{i\theta}z, \text{ es decir}$$

$$f(z) = e^{i\theta}\varphi_\alpha(z) \text{ con } \alpha = -e^{-i\theta}\beta.$$

Corolario.

Si definimos $Aut_0(U) = \{f \in Aut(U) : f(0) = 0\}$, *resulta*

$$Aut_0(U) = \{z \longrightarrow \lambda z : |\lambda| = 1\}$$

Demostración. Sea $f(z) = e^{i\theta}\varphi_\alpha(z)$ con $f(0) = 0$. Entonces $\varphi_\alpha(0) = 0$, es decir $\alpha = 0$ y $f(z) = e^{i\theta}z$