EL PROBLEMA DE DIRICHLET PARA EL DISCO

Motivación.

Sea $\alpha \in U$, disco unidad abierto, y consideremos las aplicaciones φ_α y φ_α^{-1}. Ambas son holomorfas en $D(0; \frac{1}{|\alpha|})$, entorno de $\overline{U}$. Supongamos que $\Omega = \varphi_\alpha^{-1}\left(D(0; \frac{1}{|\alpha|})\right)$ y que g es holomorfa en Ω. Entonces

$$g \circ \varphi_\alpha^{-1}(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{g \circ \varphi_\alpha^{-1}(z)}{z} dz.$$

Si $\omega = e^{it}, -\pi \le t \le \pi$ y $z = \varphi_\alpha(\omega)$, recordando que $\varphi_\alpha(\omega) = \frac{\omega - \alpha}{1 - \overline{\alpha}\omega}$ obtenemos

$$g \circ \varphi_\alpha^{-1}(0) = g(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{g(\omega)}{\varphi_\alpha(\omega)} \varphi'_\alpha(\omega) d\omega =$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} g(e^{it}) \frac{\varphi'_\alpha(e^{it})}{\varphi_\alpha(e^{it})} i e^{it} dt.$$

Si tenemos en cuenta que

$$\frac{\varphi'_\alpha(e^{it})}{\varphi_\alpha(e^{it})} e^{it} = \frac{1 - |\alpha|^2}{(1 - \overline{\alpha}e^{it})(e^{it} - \alpha)} e^{it} =$$

$$\frac{1 - |\alpha|^2}{(1 - \overline{\alpha}e^{it})(1 - \alpha e^{-it})} = \frac{1 - |\alpha|^2}{|e^{it} - \alpha|^2}$$

obtenemos

$$(*) \quad g(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(e^{it}) \frac{1 - |\alpha|^2}{|e^{it} - \alpha|^2} dt \ , \quad \alpha \in U$$

La observación anterior me permite obtener el valor de una función holomorfa en el interior de un disco conociendo su comportamiento en la frontera. En efecto

Teorema.

Sea $f \in C\left(\overline{D}(a; r)\right)$ y holomorfa en $D(a; r)$. Entonces

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(a + re^{it}) \frac{r^2 - |z - a|^2}{|re^{it} - (z - a)|^2} dt, \quad z \in D(a; r)$$

Demostración.

Haciendo el cambio de variable $\omega = \frac{z-a}{r}$ el caso se reduce a considerar $a = 0$ y $r = 1$. Sea $z \in U$, $s > 0$ con $0 < s < 1$ tal que

$$V(s) = \left\{ \xi : |\xi| < \frac{1}{s} \right\}$$

verifique

$$\varphi_z(V(s)) \subset D(0; \frac{1}{|z|}).$$

Entonces si $g(\xi) = f(s\xi)$, resulta que $g \circ \varphi_z^{-1}$ es holomorfa en $\varphi_z(V(s))$. Por la fórmula (*) anterior tenemos

$$g(z) = f(sz) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(se^{it}) \frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2} dt.$$

Si $s \longrightarrow 1$ obtenemos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) \frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2} dt$$

El resultado anterior nos permite introducir de forma natural el Núcleo de Poisson. En efecto hemos probado que si f es continua en el disco unidad cerrado y holomorfa en el disco unidad abierto, entonces

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) P_r(\theta - t) dt, \quad z = re^{i\theta}$$

donde

$$P_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{|1 - re^{i\theta}|^2}, \quad z = re^{i\theta}$$

Definición.

Sean -$\infty < \theta < \infty$ y $0 \leq r < 1$. Definimos el núcleo de Poisson por

$$P_r(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta}$$

Observación.

$$P_r(\theta) = \mathrm{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right) =$$

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}=\frac{1-r^2}{|1-re^{i\theta}|^2},\ \ z=re^{i\theta}.$$

Hemos probado que si f es continua en el disco unidad cerrado y holomorfa en el disco unidad abierto, entonces

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(e^{it})P_r(\theta-t)dt,\ \ z=re^{i\theta}$$

Si escribimos $f=u+iv$, entonces u y v son armónicas en U, continuas en $\overline{U}$ y

$$u(re^{it})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(e^{it})P_r(\theta-t)dt,\ 0\le r<1\ \text{-}\infty<\theta<\infty,$$

con una fórmula análoga para v.

Observación.

Hemos probado la fórmula anterior para u armónica en U y continua en $\overline{U}$, siempre que u sea la parte real de una función holomorfa en U y continua en $\overline{U}$. Del estudio del problema de Dirichlet deduciremos que toda función u, en las condiciones anteriores, es la parte real de una función holomorfa en U, continua en $\overline{U}$, es decir una especie de resultado recíproco.

Propiedades del núcleo de Poisson.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta)d\theta=1$$

Para cada θ, $P_r(\theta)>0$, $P_r(-\theta)=P_r(\theta)$ y P_r es periódica de período 2π

El problema de Dirichlet consiste en lo siguiente:

Dada $f:\partial U\longrightarrow\mathbb{R}$ continua, encontrar $u:\overline{U}\longrightarrow\mathbb{R}$ continua tal que:

$$(i)\ u\,|_{\partial U}=f\ \text{ y }\ (ii)\ u \text{ es armónica en } U$$

Dada la f definimos $H_f:\overline{U}\longrightarrow\mathbb{R}$ por

$$H_f(re^{i\theta})=\left\{\begin{array}{cc} f(re^{i\theta}) & \text{si } r=1\\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(e^{it})P_r(\theta-t)dt & \text{si } r<1\end{array}\right\}$$

Lema.
La función H_f es armónica en U y continua en $\overline{U}$.
Demostración.

$$H_f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\,\mathrm{Re}\left(\frac{1+re^{i(\theta-t)}}{1-re^{i(\theta-t)}}\right)dt =$$

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\left(\frac{e^{it}+re^{i\theta}}{e^{it}-re^{i\theta}}\right)dt\right\}.$$

Si

$$g(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right)dt,\ z\in U,$$

resulta que g es holomorfa en U y $H_f = \mathrm{Re}(g)$ es armónica en U.

Probemos ahora la continuidad. Si $0 \le r < 1$,

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})P_r(\theta-t)dt\right| \le |f|_{\partial U}$$

luego

$$|H_f|_{\overline{U}} = |f|_{\partial U}\ .$$

Supongamos en primer lugar que f es un polinomio trigonométrico, es decir

$$f(e^{i\theta}) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\theta}.$$

Entonces

$$H_f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)\left(\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}\right)dt =$$

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)e^{int}dt\right] =$$

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} r^{|m|}e^{im(\theta-t)}\right)e^{int}dt\right] =$$

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n\frac{1}{2\pi}2\pi r^{|n|}e^{in\theta} = \sum_{n=-N}^{N} c_n r^{|n|}e^{in\theta}.$$

En conclusión, en este caso,

$$H_f(re^{i\theta}) = \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\theta} & \text{si } r=1 \\ \sum_{n=-N}^{N} c_n r^{|n|} e^{in\theta} & \text{si } 0 \leq r < 1 \end{array} \right\},$$

y H_f es continua en $\overline{U}$.

En el caso general dada f continua en ∂U, el Teorema de Stone-Weierstrass, nos garantiza la existencia de una sucesión $\{g_k\}$ de polinomios trigonométricos tales que

$$|g_k - f|_{\partial U} \longrightarrow 0 \ (k \longrightarrow \infty).$$

Luego

$$|Hg_k - H_f|_{\overline{U}} = \left|H_{(g_k - f))}\right|_{\overline{U}} = |g_k - f|_{\partial U} \longrightarrow 0 \ (k \longrightarrow \infty).$$

La expresión anterior nos dice que la sucesión de funciones H_{g_k}, continuas en $\overline{U}$, converge unformemente sobre $\overline{U}$ hacia H_f, y por consiguiente H_f es continua en $\overline{U}$.

Teorema.
Dada $f : \partial U \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua, existe una única* $u : \overline{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que*

$$(i)\ u(z) = f(z) \text{ si } z \in \partial U$$

y

$$(ii)\ u \text{ es armónica en } U.$$

Además u *viene dada por la fórmula*

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) P_r(\theta - t) dt,\ 0 \leq r < 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$u(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta}) \ , 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Demostración.

Por el lema anterior es suficiente con probar la unicidad. La unicidad resulta de aplicar el siguiente lema:

Lema.
Si g *es armónica en* U, *continua en* $\overline{U}$ *y* $g(\partial U) = \{0\}$, *entonces* g *es identicamente cero.*

Demostración.

Sea z_0 en U tal que $g(z_0) > 0$. Consideremos un $\epsilon > 0$ tal que $0 < \epsilon < g(z_0)$. Sea

$$\varphi(z) = g(z) + \epsilon \left|z\right|^2, \; z \in \overline{U}.$$

Entonces

$$\varphi(z_0) = g(z_0) + \epsilon \left|z_0\right|^2 > \epsilon + \epsilon \left|z_0\right|^2 = \epsilon(1 + \left|z_0\right|^2) \geq \epsilon.$$

La continuidad de la función φ en $\overline{U}$ y la relación anterior nos dicen que existe un $z_1 \in U$ tal que φ tiene en z_1 un máximo local. Esto implica que

$$\varphi_{xx}(z_1) \leq 0 \text{ y } \varphi_{yy}(z_1) \leq 0.$$

La condición

$$\nabla^2\varphi(z_1) = 4\epsilon > 0$$

nos lleva a una contradicción, es decir $g(z) \leq 0$ si $z \in U$.

Una prueba análoga nos llevaria a que $g(z) \geq 0$, $z \in U$, es decir g es identicamente nula en U.

Observación.

Si u es continua en $\overline{U}$ y armónica en U, entonces u es la integral de Poisson de su restricción a ∂U. Es decir

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(e^{it})P_r(\theta - t)dt, \; 0 \leq r < 1.$$

Además $u = \mathrm{Re}(g)$, con $g \in H(U)$, donde

$$g(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(e^{it})\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}dt, \; z \in U.$$

Teniendo en cuenta que las partes reales e imaginarias de una función holomorfa son armónicas, obtenemos que si $g \in H(U)$, y es continua en $\overline{U}$, entonces

$$\forall z \in U, \; g(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(e^{it})P_r(\theta - t)dt,$$

fórmula ya obtenida en la introducción.

Observación.

Si Ω es un abierto simplemente conexo y propio del plano complejo, el Teorema de Riemann nos dice que existe $\Phi : \Omega \longrightarrow U$ biholomorfa. En general no sabemos nada respecto al comportamiento de una posible extensión continua de Φ al borde de Ω. Si existiera una extensión continua $\widetilde{\Phi}$, al borde de Ω, tal que $\widetilde{\Phi}(\partial\Omega) = \partial U$, entonces el problema de Dirichlet sería resoluble en Ω.

Ejemplo.

La transformada de Cayley $T : \operatorname{Im} z > 0 \longrightarrow U$, $T(z) = \frac{z-i}{z+i}$, transforma el eje real en ∂U, es decir en este caso tenemos resuelto el problema de Dirichlet para $\operatorname{Im} z > 0$.

Observación.

Si u es armónica en U y continua en $\overline{U}$, entonces para cada $\Phi : \Omega \longrightarrow U$ biholomorfa resulta que $u \circ \Phi$ es armónica en Ω.

El problema de Dirichlet para discos en general se puede reducir al caso del disco unidad. En efecto:

$$P_r(\theta) = \operatorname{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right) =$$

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2} = \frac{1-r^2}{|1-re^{i\theta}|^2}, \quad z = re^{i\theta}.$$

Si $R > r$ y sustituimos en la fórmula anterior r por $\frac{r}{R}$ obtenemos:

$$P_{\frac{r}{R}}(\theta) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos\theta + r^2}, \; 0 \leq r < R; \; -\infty < \theta < \infty.$$

Repitiendo el proceso anterior obtendriamos:

Teorema.

Sea $f : \partial D(a;R) \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Entonces existe una única $u \in C(\overline{D}(a;R))$ tal que:

$$(i) \; u(z) = f(z) \text{ si } z \in \partial D(a;R)$$

$$(ii) \; u \text{ es armónica en } D(a;R).$$

Además u viene dada por la fórmula

$$u(a + re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_{\frac{r}{R}}(\theta - t)u(a + R.e^{it})dt.$$

Observación.

Para $r = 0$ se obtiene

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(a + R.e^{it})dt$$

que es la propiedad del valor medio.

La fórmula de

$$P_{\frac{r}{R}}(\theta - t)$$

admite también la expresión

$$P_{\frac{r}{R}}(\theta - t) = \frac{R^2 - r^2}{|R.e^{it} - re^{it}|^2}.$$

Teniendo en cuenta que

$$R - r \leq \left|R.e^{it} - re^{it}\right| \leq R + r \ ,$$

obtenemos

$$\frac{R - r}{R + r} \leq \frac{R^2 - r^2}{|R.e^{it} - re^{it}|^2} \leq \frac{R + r}{R - r} \ .$$

Corolario (Desigualdades de Harnack).

Si $u \in C(\overline{D}(a; R))$, es armónica en $D(a; R)$ y $u \geq 0$, entonces para cada r, $0 \leq r < R$ y cada $\theta \in \mathbb{R}$ se verifica

$$\frac{R - r}{R + r} u(a) \leq u(a + re^{i\theta}) \leq \frac{R + r}{R - r} u(a)$$

Teorema de Harnack.

Sea Ω un abierto y conexo del plano complejo y $\{u_n\}$ una sucesión de funciones armónicas en Ω.

(a) Si $\{u_n\} \longrightarrow u$, para la topología τ_c, entonces u es armónica en Ω.

(b) Si la sucesión $\{u_n\}$ es no decreciente, entonces $\{u_n\}$ converge uniformemente sobre los compactos de Ω o bien $\{u_n(z)\} \longrightarrow +\infty$ para cada $z \in \Omega$.

Demostración.

(a) Para cada $\overline{D}(a; R) \subset \Omega$ y cada $n \in \mathbb{N}$

$$u_n(a + re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_{\frac{r}{R}}(\theta - t) u_n(a + R.e^{it})dt, \ 0 \leq r < R$$

Pasando al límite obtenemos

$$u(a+re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_{\frac{r}{R}}(\theta - t)u(a+R.e^{it})dt,\ 0 \leq r < R$$

luego u es armónica en $D(a;R)$. El disco $D(a;R)$ era arbitrario, luego u es armónica en Ω.

(b) Podemos suponer que $u_1 \geq 0$, pues en caso contrario considerariamos la sucesión $\{u_n - u_1\}$. Sea $u = \sup\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$, $A = \{z \in \Omega : u(z) < \infty\}$ y $B = \Omega \backslash A$. Sea $\overline{D}(a;R) \subset \Omega$. las desigualdades de Harnack nos dicen que

$$\frac{R-r}{R+r}u_n(a) \leq u_n(a+re^{i\theta}) \leq \frac{R+r}{R-r}u_n(a).$$

Pasando al límite

$$\frac{R-r}{R+r}u(a) \leq u(a+re^{i\theta}) \leq \frac{R+r}{R-r}u(a),\ 0 \leq r < R,$$

luego o bien $u(z) = +\infty$ para cada $z \in D(a;R)$, o bien $u(z) < +\infty$ para cada $z \in D(a;R)$. Es decir A y B son abiertos. Si A es vacío finaliza la prueba. Si $A = \Omega$, el Teorema de la Convergencia Monótona nos dice que u es armónica en cualquie disco de Ω y por consiguiente u es armónica en Ω. En particular u es continua. En este caso el teorema de Dini nos dice que $\{u_n\}$ converge a u uniformemente sobre los compactos de Ω.

Observación final.

Si u es una función armónica en Ω, dado $\overline{D}(a;R) \subset \Omega$ sabemos que en $D(a;R)$, la función u es la parte real de una función f holomorfa en $D(a;R)$. La función f esta univocamente determinada salvo la adición de una constante imaginaria pura. Es decir, toda función armónica en Ω es localmente la parte real de una función holomorfa. En particular tiene derivadas parciales continuas de todos los órdenes.