Análisis de Funciomes de Variable Compleja. Grupo U. Curso 2014-15
Práctica 1.

1.- Sea $f : X \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ continua. Sea $g : X \longrightarrow \mathbb{C}$ una raíz n-ésima continua de f en $X, (f(x) = g(x)^n, \forall x \in X)$. Si $X_0 = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$ es conexo y no vacío, demostrar que f tiene exactamente n raíces n-ésimas continuas dadas por:

$$g_k(x) = w_k g(x) \text{ donde } w_k = e^{2\pi ik/n}, k = 0, 1, ..., (n-1)$$

Probar que este resultado es falso si X_0 no es conexo.

2.- Sea $T \subset \mathbb{C}$. Una función multiforme con dominio T y valores en $\mathbb{C}$ es una aplicación $G : T \longrightarrow \mathcal{P}(C)$. Se dice que g es una rama o determinación continua de G si $g : T \longrightarrow \mathbb{C}$ es continua y $g(t) \in G(t), \forall t \in T$.

Sea $a \in \mathbb{C}, a \neq 0$. Si c es un logaritmo de a, entonces $f_c(z) = e^{cz}$ es una rama de la función multiforme a^z. Si $c = Loga$ se obtiene la rama principal de a^z, que se suele denotar igual, $a^z = e^{zLoga}$. Si $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt[n]{z} = z^{1/n} = e^{(1/n)Logz}$ es la rama principal de la raiz n-ésima.

Si $\{z : |z| = r\} \subset V \subset \mathbb{C}$ y $1 < m \in \mathbb{N}$, entonces "Existe en V una raiz m-ésima continua de z^n si, y sólo si n es un múltiplo de m".

Como corolario obtenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ no existe un logaritmo continuo de z^n en V.

3.- Sea $\sqrt{}$ la raiz cuadrada principal definida en el complemento del eje real negativo. Obtener los abiertos en los que las siguientes fórmulas definen raíces cuadradas continuas de $z^2 - 1$ e indicar las relaciones entre las mismas:
a) $f_1(z) = \sqrt{z^2 - 1}$ b) $f_2(z) = z\sqrt{1 - 1/z^2}$ c) $f_3(z) = i\sqrt{1 - z^2}$.

4.-Demostrar que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_R} \frac{1 - e^{2iz}}{z^2(1 + z^2)} dz \right| &\leq \frac{2\pi}{R(R^2 - 1)}, R > 1 \\ \gamma_R &= \{z : |z| = R \text{ y } 0 \leq \arg(z) \leq \pi\} \end{aligned}$$

5.-Calcular

$$\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z(z-1)} dz$$

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^n} dz$$

$$\int_{|z-1|=1} \frac{\sin \pi z}{(z^2 - 1)^2} dz$$

$$\int_{|z|=1} \frac{\cos \pi z}{|z-2|^2} dz$$

6.- Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ continua y $\gamma : [a,b] \longrightarrow \Omega$ un camino C^1 a trozos. Definimos

$$\int_\gamma f(z) d\overline{z} = \int_a^b f(\gamma(t)\overline{\gamma'(t)} dt$$

Sea $P(z)$ un polinomio complejo y C la circunferencia de centro a y radio R con $R > 0$.Probar

$$\int_C p(z) d\overline{z} = -2\pi i R^2 P'(a)$$

7.- Desarrolla en serie de potencias de $(z-1)$ la siguiente función y halla el radio de convergencia de la serie obtenida.

$$f(z) = \frac{z^2}{(z+1)^2}$$

8.-Determinar la parte regular y la parte principal de

$$f(z) = \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2$$

en cada uno de sus polos. ¿Cual es el valor de la parte regular en el polo correspondiente?

9.- Determina el tipo de singularidad que tiene

$$f(z) = \frac{1}{1 - \sqrt[3]{2-z}}$$

en $z = 1$. Calcular el residuo

10. Determinar el tipo de singularidad que tienen en $z = 0$ las funciones

$$f(z) = \frac{1}{e^z - \frac{\sin z}{z}}; g(z) = \frac{e^{\sin z} - e^{\tan z}}{z^4}.$$

Calcular el correspondiente residuo.

11.- Justificar que no existe una función holomorfa en $D(0;2)$ con la propiedad indicada:

$a)$ $\quad f(1/n) = f(-1/n) = 1/n^3$ para cada $n \in \mathbb{N}$

$$b) \quad \frac{(-1)^n}{n} + e^{f(1/n)} = 1 \text{ para cada } n \in \mathbb{N}$$

12.-Sea a un cero aislado de multiplicidad m de una función f holomorfa en un entorno de a. Probar

Existe en un entorno de a una raiz n-ésima continua de f si, y sólo si, m es múltiplo de n

13.- Obtener los desarrollos de Laurent de las siguientes funciones:

$$f(z) = e^z + e^{1/z^2} \text{ en } |z| > 0$$

$f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ en los anillos centrados en el origen donde esté definida

$f(z) = \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{(z-1)^2} + \dfrac{1}{(z+2)}$ en los anillos centrados en el origen donde esté definida

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)} \text{ en } 1 < |z| < 2 \text{ y en } 0 < |z-1| < 1$$

¿Admite f una primitiva en dichos anillos?

14.- Determina el orden del cero $z_0 = 0$ para la función $(e^z - e^{z^2})\log(1-z)$

15.- Determinar las funciones enteras f para las que

$$f(z+w) = f(z)f(w) \ \forall z, w \in \mathbb{C}$$

16.- Probar que si $f \in H(\Omega)$ y existen $\epsilon > 0$ y $\omega \in \mathbb{C}$ tales que $|f(z) - \omega| \geq \epsilon$, $\forall z \in \mathbb{C}$, entonces f es constante.. Concluir que si f es entera y no constante, su imágen es densa.

17.- Sea $f \in H(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ tal que

$$\lim_{z \longrightarrow 0} z f(z) = 1; \ \lim_{z \longrightarrow \infty} f(z) = 1$$

Determinar la expresión explícita de f.

18.-Si $n \geq 1$ diremos que una función $q \in H(\Omega)$ es una raíz n-ésima holomorfa de $f \in H(\Omega)$ si $q^n = f$ en Ω.

Diremos que una $f \in H(\Omega)$ es una unidad si $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$.

Probar la equivalencia de las dos afirmaciones siguientes:

1) Cada unidad de $H(\Omega)$ tiene un logaritmo holomorfo en Ω.

2) Cada unidad de $H(\Omega)$ tiene una raíz cuadrada holomorfa en Ω.

19.- Obtener la parte principal del desarrollo de Laurent de la siguiente funcion:

$$f(z) = \frac{z^2}{\cos(2\pi z^2) - 1} \text{ en } z_0 = -i$$

20.- Sea $[a, b]$ el segmento del plano complejo de extremos $a, b \in \mathbb{C}$ con $0 \notin [a, b]$, y sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus [a, b]$.

Justificar la existencia de una única $f \in H(\Omega)$ verificando

$$e^{f(z)} = \frac{z-a}{z-b}, \forall z \in \Omega, \lim_{z \longrightarrow \infty} f(z) = 0$$

Sea $r = \min \{|z| : z \in [a, b]\}$ y $R = \textit{máx} \{|a|, |b|\}$. Obtener el desarrollo en serie de potencias de f en $|z| < r$ y el desarrollo de Laurent de f en $|z| > R$.