Funciones meromorfas

Las funciones racionales, cociente de dos polinomios, son el modelo de función que nos justifica la siguiente definición.

Definición.- *Diremos que f es una función meromorfa en un abierto Ω, si existe $P \subset \Omega$ tal que:*

(i) P no tiene puntos de acumulación en Ω.

(ii) $f \in H(\Omega \backslash P)$.

(iii) f tiene un polo en cada punto de P.

Como no se excluye que P sea el conjunto vacío, obtenemos que $H(\Omega) \subset M(\Omega)$, espacio de funciones meromorfas en Ω. La condición (ii) nos dice que P es a lo sumo numerable y relativamente cerrado en Ω.

Ejemplos.

1.- Las funciones racionales

$$h(z) = \frac{a_0 + a_1 z + ... + a_m z^m}{b_0 + b_1 z + ... + b_n z^n}, b_n \neq 0, m, n \in \mathbb{N}$$

son meromorfas en $\mathbb{C}$ y

$$P(f) \subset \{z_0 : z_0 \text{ es un cero del polinomio denominador}\}$$

2.-

$$\cot \pi z = \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} \in M(\mathbb{C})$$

y no es una función racional.

$$P(\cot \pi z) = Z(\sin \pi z) = \mathbb{Z}$$

3.- Las singularidades de $(\sin \frac{1}{z})^{-1}$ son

$$\left\{0, \frac{1}{k\pi}, k \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}\right\}$$

$\{0\}$ no es aislada en el conjunto de singularidades y $\left\{\frac{1}{k\pi}\right\}$ son polos. Luego

$$(sen \frac{1}{z})^{-1} \notin M(\mathbb{C}) \text{ pero } (sen \frac{1}{z})^{-1} \in M(\mathbb{C} \backslash \{0\})$$

Si $f \in M(\Omega)$ y $z_0 \in \Omega$ sabemos que "alrededor" de z_0

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, m \in \mathbb{Z}, a_n \in \mathbb{C}, a_m \neq 0$$

Diremos que el orden de f en z_0 es m; $O_{z_0}(f) = m$
Si $m < 0$

$$\sum_{m}^{-1} a_n(z - z_0)^n \text{ es la parte principal de } f \text{ en } z_0.$$

Si $m \geq 0$ la parte principal de f en z_0 es cero.

Observación.

$O_{z_0}(f)$ coincide con $O_{z_0}(f)$ ya definido para el caso en el que f sea holomorfa en z_0.

f es holomorfa en z_0 si, y sólo si, $O_{z_0}(f) \geq 0$.

z_0 es un polo de orden $-m$ si, y sólo si, $m = O_{z_0}(f) < 0$.

Ejemplo:

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z - n} + \text{potencias de } (z - n)$$

El Teorema de los Residuos

Este teorema nos permite calcular el valor de la integral, de una función a lo largo de un camino, si conocemos el valor de los residuos de dicha función en los puntos del interior del camino.

Teorema.- *Sea γ un camino cerrado homológicamente nulo en Ω y $P \subset \Omega \backslash \gamma$ un conjunto finito. Si $h \in H(\Omega \backslash P)$ se verifica:*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} h(z)dz = \sum_{z_0 \in Int(\gamma)} Ind_{\gamma}(z_0). \operatorname{Re} s_{z_0}(h).$$

El $\operatorname{Re} s_{z_0}(h) = 0$ *para los* $z_0 \notin P$*, luego la suma es finita y se extiende a los* $z_0 \in Int(\gamma) \cap P$.

Demostración. Sean $P = \{z_1, ..., z_s\}$ y $h_i = b_i(z - z_i)^{-1} + \widetilde{h}_i$ la parte principal de h en z_i, $i = 1, ..., s$. Sabemos que h_i es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{z_i\}$ y que $\widetilde{h}_i$ es integrable en $\mathbb{C}\setminus\{z_i\}$. Luego

$$\int_\gamma \widetilde{h}_i(z)dz = 0 \iff \int_\gamma h_i(z)dz =$$

$$b_i \int_\gamma \frac{dz}{z - z_i} = 2\pi i.b_i.Ind_\gamma(z_i), i = 1, ..., s$$

Por otra parte, como la función $h - (h_1 + ... + h_s)$ es holomorfa en Ω. El teorema General de Cauchy nos dice que

$$\int_\gamma h - (h_1 + ... + h_s) = 0 \iff \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma h(z)dz =$$

$$\sum_{i=1}^{s} Ind_\gamma(z_i). \operatorname{Re} s_{z_i}(h).$$

Finalmente la relación $Ind_\gamma(z_i) = 0$ si $z_i \in Ext(\gamma)$, nos permite concluir la prueba.

Observaciones.

Si γ es simple obtenemos

$$\int_\gamma h(z)dz = 2\pi i \sum_i \operatorname{Re} s_{z_i}(h)$$

Si $f \in H(\Omega), \gamma \subset \Omega$ homológicamente nulo y $z_0 \in \Omega\setminus\gamma$, entonces la función $z \longrightarrow f(z)(z - z_0)^{-1}$ es holomorfa en $\Omega\setminus\{z_0\}$ y tiene a $f(z_0)$ como residuo en z_0. Luego

$$Ind_\gamma(z_0).f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

que es precisamente la Fórmula Integral de Cauchy. Es decir esta fórmula es una consecuencia inmediata del Teorema de los Residuos.

Fórmula de contar ceros y polos.

Sea f una función meromorfa en Ω con un número finito de ceros y polos. Sea γ un camino cerrado en Ω homológicamente nulo y simple, que no contiene ceros ni polos. Entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}d\xi = Z - P$$

$Z = Z_f(0; Int(\gamma))$ = Número de ceros de f, contados con su multiplicidad, en el interior de γ.

$P = P_f(\infty; Int(\gamma))$ = Número de polos de f, contados con su multiplicidad, en el interior de γ.

Demostración. Por el Teorema de los Residuos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}d\xi &= \sum_{c\in\Omega\backslash\gamma} Ind_{\gamma}(c).\operatorname{Re}s_c(\frac{f'}{f}) = \\ \text{(Ver prácticas)} &= \sum_{c\in\Omega\backslash\gamma} O_c(f) = Z - P\end{aligned}$$

Observación. Si γ no es simple hay que introducir el factor $Ind_{\gamma}(z), z \in \Omega\backslash\gamma$.

Ejemplos.

$$Si\ f(z) = sen\pi z, \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\pi}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = 7$$

$$Si\ f(z) = \tan\pi z, \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\pi}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = 1.$$

Principio del argumento.

Sea γ un camino cerrado en $\mathbb{C}$ y $z_0 \notin \gamma$. El incremento del argumento de $(z - z_0)$, cuando z viaja a través de γ es:

$$\Delta_{\gamma}\arg(z - z_0) = 2\pi.Ind(z_0)$$

Lo que pretendemos es definir $\Delta_\gamma \arg(f)$, es decir $\Delta_{\widetilde{\gamma}} \arg z, \widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$.

Definición. *Sea f una función meromorfa en Ω y γ un camino en Ω homológicamente nulo, con $Z(f) \cap \gamma = \emptyset$. Definimos*

$$\Delta_\gamma \arg(f) := 2\pi Ind_{f\circ\gamma}(0)$$

Principio del argumento.

Sea f una función meromorfa en Ω con un número finito de ceros y polos. Sea γ un camino cerrado en Ω homológicamente nulo y simple, que no contiene ceros ni polos. Entonces

$$\Delta_\gamma \arg(f) = 2\pi(Z - P)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \Delta_\gamma \arg(f) &= 2\pi(\int_{f\circ\gamma} \frac{d\xi}{\xi}).\frac{1}{2\pi i} = \\ \frac{1}{i}\int_\alpha^\beta \frac{f'(\gamma(t))\gamma'(t)}{f\circ\gamma(t)}dt &= \frac{1}{i}\int_\gamma \frac{f'(\xi)}{f(\xi)}d\xi. \end{aligned}$$

Luego

$$i\Delta_\gamma \arg(f) = \int_\gamma \frac{f'(\xi)}{f(\xi)}d\xi.$$

Aplicando la Fórmula de contar ceros y polos se obtiene el resultado.

El Teorema de Rouché.

Sean f, g dos funciones meromorfas en Ω con un número finito de ceros y polos. Sea γ un camino cerrado, simple y homológicamente nulo en Ω que no atraviesa ni ceros ni polos. Supongamos que:

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)|, \text{ cuando } z \in \gamma.$$

Entonces:

$$(i)\ \Delta_\gamma \arg(f) = \Delta_\gamma \arg(g)$$

$$(ii)\ Z_f(o; Int(\gamma)) - P_f(\infty; Int(\gamma))$$

$$= Z_g(o; Int(\gamma)) - P_g(\infty; Int(\gamma))$$

Demostración. Consideramos la función $h = \frac{g}{f}$ que es meromorfa en Ω. De la desigualdad

$$\left| \frac{g(z)}{f(z)} - 1 \right| < 1 \text{ cuando } z \in \gamma$$

deducimos que $h(\gamma) \subset \{z : |z - 1| < 1\}$. Luego

$$\Delta_\gamma \arg(h) = 2\pi Ind_{h\circ\gamma}(0) = 0,$$

es decir

$$\int_\gamma \frac{h'(\xi)}{h(\xi)} d\xi = 0.$$

De la relación

$$\frac{h'(\xi)}{h(\xi)} = \frac{g'(\xi)}{g(\xi)} - \frac{f'(\xi)}{f(\xi)}$$

obtenemos

$$\int_\gamma \frac{g'(\xi)}{g(\xi)} d\xi = \int_\gamma \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi,$$

es decir se verifican (i) y (ii).

En el Teorema anterior, si las funciones f y g fueran holomorfas, se concluiría que

$$Z_f(o; Int(\gamma)) = Z_g(o; Int(\gamma))$$

Ejemplo. Aplicando el teorema de Rouché se puede demostrar de forma sencilla que la ecuación $z^6 - 2z^5 + 7z^4 + z^3 - z + 1 = 0$ tiene cuatro raíces en el disco unidad abierto. Para ello es suficiente comparar la funcion $z^6 - 2z^5 + 7z^4 + z^3 - z + 1$ con $7z^4$ y aplicar el teorema .

Supongamos ahora que una sucesión de funciones holomorfas (f_n) en Ω converge, uniformemente sobre los compactos de Ω, a una función f. Nuestro próximo teorema se refiere a la relación existente entre el número de ceros de f y el número de ceros de las funciones f_n que integran la sucesión. Veremos que de este resultado se deducen útiles aplicaciones sobre los ceros de las funciones holomorfas.

Teorema de Hurwitz.

Sea Ω un abierto y conexo del plano complejo, (f_n) una sucesión de funciones holomorfas en Ω que converge, uniformemente sobre los compactos de Ω, a una función f holomorfa en Ω*. Sea U un abierto acotado en Ω tal que $\overline{U} \subset \Omega$. Supongamos que f no tiene ceros en ∂U. Entonces existe $n_U \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant n_U$, las funciones f_n y f tienen el mismo número de ceros en $\overline{U}$. Es decir*

$$\begin{aligned} \forall n &\geqslant n_U, \sum_{\omega \in \overline{U}} O_\omega(f) = \sum_{\omega \in \overline{U}} O_\omega(f_n) \Longleftrightarrow \\ \forall n &\geqslant n_U, Z_f(o; \overline{U}) = Z_{f_n}(o; \overline{U}) \end{aligned}$$

Demostración.

Supongamos en primer lugar que U es un disco. En este caso sea ϵ el

$$\min \{|f(\xi)| : \xi \in \partial U\} \;\; y \; n_U \in \mathbb{N}$$

tal que

$$\forall n \geqslant n_U \;\; \sup \{|f(z) - f_n(z)| : z \in \partial U\} < \epsilon.$$

Entonces

$$|f_n(\xi) - f(\xi)| < |f(\xi)|\,, \, \xi \in \partial U$$

y el teorema de Rouché prueba el resultado.

Para el caso de ser U arbitrario, el teorema de identidad nos dice que sobre el compacto $\overline{U}$ la función f tiene un número finito de ceros. Por consiguiente existen discos $U_1.U_{2,...,}U_k$, disjuntos dos a dos, tales que f no tiene ceros en el compacto

$$K = \overline{U} \setminus \cup_{i=1}^{k} U_i \ .$$

Luego

$$\text{Existe } n_U \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant n_U \ , f_n \text{ no tiene ceros en } K.$$

Aplicando el teorema para cada disco se obtiene el resultado.

Corolario 1. *Sea (f_n) una sucesión de funciones holomorfas en Ω, abierto y conexo, que converge uniformemente sobre los compactos de Ω a una funcion f holomorfa en Ω. Si para cada n la función f_n no tiene ceros en Ω, entonces la función f es nula en Ω o no tiene ceros en Ω.*

Corolario 2. *Sea (f_n) una sucesión de funciones holomorfas en Ω, abierto y conexo, que converge uniformemente sobre los compactos de Ω a una funcion f holomorfa en Ω. Si cada f_n es inyectiva, entonces f es constante o inyectiva en Ω.*