Análisis de Funciones de Variable Compleja. Grupo U. Curso 2014-15
Práctica 4.

1.- Calcula

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+b^2} dx \quad (a, b > 0)$$

Indicación. Integrar la función

$$f(z) = \frac{e^{iaz}}{z^2+b^2}$$

en la frontera del semidisco D_R del semiplano superior acotado por el intervalo $[-R, R]$ en el eje real y la semicircunferencia Γ_R de radio R y centro 0 en el semiplano superior, aplicando el Teorema de los Residuos.

2.- Calcula

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2(1+x^2)} dx$$

Indicación. Reducir el problema al cálculo de las integrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx \text{ y } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2+1} dx$$

Para calcular la primera considerar la función de variable compleja

$$f(z) = \frac{e^{2iz}-1}{z^2}$$

y el semidisco del semiplano superior de radio R, salvando la singularidad en $z = 0$ con una semicircunferencia γ_ε de radio ϵ. Para el cálculo de la segunda reducir el problema al cálculo de la

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^2+1} dx$$

Considerar la función

$$f(z) = \frac{e^{2iz}}{z^2+1}$$

y el borde del semidisco D_R del semiplano superior acotado por el intervalo $[-R, R]$ en el eje real y la semicircunferencia Γ_R de radio R y centro 0 en el semiplano superior.

3.- Calcula
$$\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^6}dx$$
Indicación. Considerar la función
$$f(z) = \frac{z}{1+z^6}$$
y considerar el sector circular S_R del semiplano superior acotado por el intervalo $[0, R]$ en el eje real, el segmento $\gamma = \left[e^{\frac{\pi}{3}i}, 0\right]$ y el arco de circunferencia Γ_R de radio R, centro 0 y ángulo $\frac{\pi}{3}$ en el semiplano superior.

4.- Calcula
$$\int_0^{\infty} \frac{\log x}{1+x^2}dx$$
Indicación. Considerar el abierto $G = \mathbb{C} \setminus [0, +\infty]$ y la función
$$f(z) = \frac{\log^2 z}{1+z^2} \text{ con } 0 < \arg(z) < 2\pi$$
que es holomorfa en G.

5.- Sea $f \in H(\Omega)$ no constante y Ω abierto y conexo. Si el compacto $K = \{z \in \Omega : |f(z)| \leq 1\}$ es no vacío, demuestra que f se anula en algún punto.

6.- Determina los abiertos $\Omega \supset \{z : |z| \leq 1\}$ en los que hay definida una función $f \in H(\Omega)$ verificando:

a) $|f(z)| = 1$ si $|z| = 1$

b) Los únicos ceros de f son $a = 1/2$ (simple) y $b = (1+i)/4$ (doble)

c) $f(0) = ab^2$.

Probar que si Ω es conexo la función f es única.

7.- Sea $f \in H(\Omega)$ donde $\Omega \supset \{z : |z| \leq 1\}$ es abierto y conexo. Probar que si se cumplen las dos condiciones

a) $|f(z)| \leq 1$ si $|z| = 1$

b) Existen $a, b \in D(0,1), a \neq b$ tales que $f(a) = a$ y $f(b) = b$,

entonces f es la identidad.

8.- Sea $f : D(0,1) \longrightarrow Q$ biholomorfa, donde $Q := \{(x+iy) : |x| < 1, |y| < 1\}$, con $f(0) = 0$. Probar que $f^{(n)}(0) = 0$ si $(n-1)$ no es múltiplo de 4.

9.-Sea f holomorfa en un abierto que contiene a la adherencia del disco unidad abierto y tal que $|f(z)| \leq 1$ si $|z| = 1$ y $f(0) = \frac{1}{2}$. Pruébese que
$$|f(z)| \leq \left\{ \begin{array}{c} \frac{3|z|+1}{2} \text{ para } |z| \leq \frac{1}{3} \\ 1 \text{ para } \frac{1}{3} \leq |z| \leq 1 \end{array} \right\}$$

10.- Probar que si $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es biholomorfa, entonces $f(z) = az + b$, con $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.

Indicación. Considerar la composición $f \circ g$, donde $g(z) = \frac{1}{z}$, en un disco perforado centrado en el 0, con un radio adecuado.

11.- Definir una aplicación biholomorfa entre $D = \{z \in D(0,1) : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ y el semiplano superior $\mathrm{Im}(z) > 0$.

12.- Obtener una aplicación biholomorfa entre

$$D = \left\{re^{i\theta} : 0 < r < 1, 0 < \theta < \alpha\right\},$$

donde α es un número real $0 < \alpha < 2\pi$, y $D(0,1)$.

13.- Probar que todo automorfismo del semiplano $\mathrm{Im}(z) > 0$ es una transformación de Möbius.

14.- Probar que si $f \in H(\Omega)$ y $f'(z_\circ) \neq 0$, entonces existe un entorno U de $z_\circ$ tal que $f_{|U}$ es biholomorfa entre U y $f(U)$. Probar que $f_n : \mathbb{C}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $z \longrightarrow z^n, n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, es localmente biholomorfa en cada punto, pero sólo cuando $n = 1, -1$ es biholomorfa.

15.- Probar que si $f : \mathbb{C}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{C}\setminus\{0\}$ es biholomorfa, entonces $f(z) = az$ o $f(z) = az^{-1}$ con $a \neq 0, a \in \mathbb{C}$.

Indicación. Probar que $z = 0$ no es una singularidad esencial de f. Razonar con el caso de ser evitable y con el caso de ser un polo.

16.- (El problema de Dirichlet para el semiplano $\{\mathrm{Im}\, z > 0\}$). Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua con $\lim_{|t|\longrightarrow\infty} f(t) = l$, con l finito. Encontrar una función $u : \overline{\{\mathrm{Im}\, z > 0\}} \cup \{\infty\} :\longrightarrow \mathbb{R}$ continua, armónica en $\{\mathrm{Im}\, z > 0\})$ y tal que

$$u\,|_{\mathbb{R}\cup\{\infty\}} = f$$

Probar que la solución es

$$u(z_0) = \mathrm{Re}\,\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t - z_0}dt,\ z_0 \in \{\mathrm{Im}\, z > 0\}$$

17.- Calcúlese directamente la integral de Poisson para el valor en la frontera $f(e^{i\theta}) = \sin\theta + \cos\theta$

18.- Sea u una función armónica positiva en $U = D(0,1)$ y tal que $u(0) = 1$. Encuéntrese estimaciones del valor de $u(1/2)$.

Indicación: Utilizar las desigualdades de Harnack.

19.- Probar que en un abierto simplemente conexo Ω toda función armónica es la parte real de una función holomorfa en Ω.