Integración compleja.
Caminos continuos y de clase C^1.

$$I = [a, b], , \gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C} \text{ continua}$$

γ es un camino en $\mathbb{C}$ con punto inicial $\gamma(a)$ y punto final $\gamma(b)$.
γ es un camino C^1 si la aplicación γ es de clase C^1.
Ejemplos:
- El camino nulo, es cuando γ es constante. En este caso es C^1.
- El segmento $[z_0, z]$ es el camino $\gamma(t) = (1 - t)\, z_0 + tz, t \in [0, 1]$, que es C^1.
- Arco circular en el borde de $D(z_0; r)$. Es el camino $\gamma(t) = z_0 + re^{it}, t \in [a, b], 0 \leq a < b \leq 2\pi$. Es de clase C^1. Cuando $a = 0$ y $b = 2\pi$ obtenemos la circunferencia de centro z_0 y radio r.
Notación: $S_r(z_0) = S(z_0; r) = \partial D(z_0; r)$

Un camino es cerrado si $\gamma(a) = \gamma(b)$.
Si $\gamma_1, ..., \gamma_m$ son caminos tales que el punto final de γ_r coincide con el punto inicial de γ_{r+1} ,$1 \leq r < m$, entonces el camino suma $\gamma := \gamma_1 + ... + \gamma_m$ se define de forma obvia. El punto inicial de γ es el inicial de γ_1 y el final es el final de γ_m.
Ejemplo: Sean $\gamma_1 : [a_1, b_1] \longrightarrow \mathbb{C}, \gamma_2 : [a_2, b_2] \longrightarrow \mathbb{C}$ con $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$. Entonces $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 : [a_1, b_2 - a_2 + b_1] \longrightarrow \mathbb{C}$ está definido por $\gamma(t) = \gamma_1(t)$ si $t \in [a_1, b_1]\,, \gamma(t) = \gamma_2(t + a_2 - b_1)$ si $t \in [b_1, b_2 - a_2 + b_1]$.

γ es C^1 a trozos si $\gamma = \gamma_1 + ... + \gamma_m$ y cada γ_i es C^1.
Vamos a considerar únicamente caminos C^1 a trozos, es decir, caminos de la forma $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ continua, tal que existe una partición del intervalo $[a, b], a_1, ..., a_{m+1}$ con $a_1 = a, ..., a_{m+1} = b$ tal que

$$\gamma_i := \gamma_{[a_i, a_{i+1}]}, 1 \leq i \leq m \text{ es } C^1$$

Notación: $|\gamma|$ significa el compacto $\gamma(I)$.
Def.
Si $f \in C(|\gamma|)$, entonces definimos

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma} fdz := \int_{a}^{b} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

Si $\gamma = \gamma_1 + ... + \gamma_m$, entonces

$$\int_{\gamma} fdz := \sum_{i=1}^{m} \int_{\gamma_i} fdz, (|\gamma_i| \subset |\gamma|, 1 \leq i \leq m)$$

Proposición.
Sea $D = D(z_0; r) = \{z : |z - z_0| < r\}$. *Entonces*

$$\int_{\partial D} (z - z_0)^n dz = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & \text{si } n \neq -1 \\ 2\pi i & \text{si } n = -1 \end{array} \right\}$$

D)

$$\int_{\partial D} (z - z_0)^n dz = \int_{0}^{2\pi} (re^{it})^n ire^{it} dt =$$

$$r^{n+1} i \int_{0}^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & \text{si } n \neq -1 \\ 2\pi i & \text{si } n = -1 \end{array} \right\}$$

Nota: Si γ^+y γ^- son las semicircunferencias obtenidas al cortar el borde de $D(z_0; r)$ por un diametro del dicho disco,γ^+ orientada en sentido "positivo" y γ^- en sentido "negativo",se obtiene

$$\int_{\gamma^+} \frac{dz}{z - z_0} = \pi i, \int_{\gamma^-} \frac{dz}{z - z_0} = -\pi i$$

Cambio de parámetros.

Def. Los caminos $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{C}, I = [a,b]; \widetilde{\gamma} : \widetilde{I} \longrightarrow \mathbb{C}, \widetilde{I} = [\widetilde{a}, \widetilde{b}]$ son equivalentes si existe $\varphi : \widetilde{I} \longrightarrow I$ biyectiva, C^1 con $\varphi' > 0$ tal que $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$.

φ se denomina una transformación de parámetros.

Observación. La propiedad $\varphi' > 0$ nos dice que φ es estrictamente creciente con φ^{-1} diferenciable. En particular $\varphi^{-1}(\widetilde{a}) = a$ y $\varphi^{-1}(\widetilde{b}) = b$.

Proposición. *Si γ y $\widetilde{\gamma}$ son equivalentes y $f \in C(|\gamma|)$, entonces $\int_\gamma f dz = \int_{\widetilde{\gamma}} f dz$.*

D)

$$\int_{\widetilde{\gamma}} f dz = \int_{\widetilde{a}}^{\widetilde{b}} f(\gamma(\varphi(t)))\gamma'(\varphi(t))\varphi'(t)dt =$$

$$\int_{\varphi(\widetilde{a})}^{\varphi(\widetilde{b})} f(\gamma(s))\gamma'(s)ds = \int_\gamma f dz$$

Propiedades.

(i) $f, g \in C(|\gamma|), \lambda \in \mathbb{C}, \int_\gamma (f+g)dz = \int_\gamma f dz + \int_\gamma g dz; \int_\gamma \lambda f(z)dz = \lambda \int_\gamma f(z)dz$.

(ii) $\int_\gamma f(z)dz + \int_{\gamma^*} f(z)dz = \int_{\gamma+\gamma^*} f(z)dz, \forall f \in C(|\gamma+\gamma^*|)$. (Punto final de γ = punto inicial de γ^*)

(iii) Si definimos $-\gamma = \gamma \circ \varphi$, donde $\varphi : I \longrightarrow I, \varphi(t) = a + b - t$, obtenemos $\int_{-\gamma} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz$

Observación. Sea $g : \widehat{D} \longrightarrow D$ holomorfa con g' continua. Sea $\widehat{\gamma}$ un camino en $\widehat{D}$ y $\gamma := g \circ \widehat{\gamma}$, el camino imágen en D. Entonces

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\widehat{\gamma}} f(g(z))g'(z)dz, \forall f \in C(|\gamma|)$$

Longitud de γ.

$$L(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt =$$

$$\int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt; \gamma(t) = x(t) + iy(t)$$

Ejemplos.
- $\gamma \approxeq [z_0, z_1]\,, L(\gamma) = |z_1 - z_0|$
- $\gamma(t) = z_0 + re^{it}, t \in [a,b], 0 \leq a < b \leq 2\pi, L(\gamma) = r(b-a)$
- $\gamma = \gamma_1 + ... + \gamma_m\ ; L(\gamma) = L(\gamma_1) + ... + L(\gamma_m)$

Propiedad de estimación.

$$\int_\gamma f(z)dz \leq |f|_\gamma\, L(\gamma); |f|_\gamma := máx\,\{|f(\gamma(t))| : t \in [a,b]\}$$

Corolario. Si $\operatorname{Re} z < 0$, entonces $|e^z - 1| < |z|$

D) *Sea* $\gamma := [o, z]$ *y* $f(\xi) := e^\xi$. *Entonces*

$$\int_\gamma f(z)dz = e^z - 1 \text{ y } |f(\xi)| = \left|e^\xi\right| = \left|e^{Re\xi}\right| < 1 \text{ si } \operatorname{Re}\xi < 0$$

Luego

$$|e^z - 1| = \left|\int_\gamma f(z)dz\right| < L(\gamma) = |z|\,.$$

Cálculo de la integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{d\xi}{\xi - z}; D \;\; = \;\; D(z_0; r)$$

Si intentamos calcular dicha integral aplicando directamente la definición nos encontramos con un problema de difícil solución excepto en el caso de ser $z = z_0$. En este caso el valor de la integral es 1. Para resolver el problema en general aplicaremos el siguiente lema:

Lema.

$$\text{Si } |z - z_0| < |\xi - z_0|\,, \text{ entonces } \frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0} \sum_0^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^n}$$

$$|z - z_0| > |\xi - z_0|\,, \text{ entonces } \frac{1}{\xi - z} = \frac{(-1)}{z - z_0} \sum_0^{\infty} \frac{(\xi - z_0)^n}{(z - z_0)^n}$$

Fijados z_0, r y $z \in \mathbb{C} \backslash \partial D$, ambas series son absolutamente convergentes en la variable $\xi \in \partial D$.

D) Sea $\omega := (z - z_0)\,(\xi - z_0)^{-1}$. Entonces

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0} \frac{1}{1 - \omega} = \frac{1}{\xi - z_0} \sum_0^{\infty} \omega^n, \text{ si } |\omega| < 1$$

Analogamente si $\omega := (\xi - z_0)\,(z - z_0)^{-1}$, entonces

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{(-1)}{z - z_0} \frac{1}{1 - \omega} = \frac{(-1)}{z - z_0} \sum_0^{\infty} \omega^n, \text{ si } |\omega| < 1.$$

En el primer caso la serie

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0} \sum_0^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^n}$$

es absolutamente convergente en $\xi \in \partial D$.

En el segundo caso la serie

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{(-1)}{z - z_0} \sum_0^{\infty} \frac{(\xi - z_0)^n}{(z - z_0)^n}$$

es absolutamente convergente en $\xi \in \partial D$.

Corolario.

$$\text{Si } z \in D, \int_{\partial D} \frac{d\xi}{\xi - z} = \sum_{0}^{\infty} (z - z_0)^n \int_{\partial D} \frac{d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}} = 2\pi i$$

$$\text{Si } z \in \mathbb{C} \backslash \overline{D}, \int_{\partial D} \frac{d\xi}{\xi - z} = -\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} \int_{\partial D} (\xi - z_0)^n d\xi = 0$$

Integrales independientes del camino. Primitivas.

Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$ no vacío.

Teorema. *Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ continua y $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. TFAE:*

(i) F es holomorfa en Ω y $F' = f$ en Ω.

(ii) $\forall \omega, z \in \Omega$ y todo camino $\gamma \subset \Omega$ con punto inicial ω y punto final z, se verifica

$$\int_{\gamma} f(\xi) d\xi = F(z) - F(\omega)$$

D) $(i) \Longrightarrow (ii)$ $\int_{\gamma} f(\xi)d\xi = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b (F \circ \gamma)'(t)dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = F(z) - F(\omega)$.

$(ii) \Longrightarrow (i)$ Sea $z_0 \in \Omega$. Consideramos D un disco centrado en z_0 con $\overline{D} \subset \Omega$. Para cada $z \in D$ podemos escribir

$$F(z) = F(z_0) + \int_{[z_0,z]} f(\xi) d\xi$$

Definimos

$$\begin{aligned} F_1(z). &= \frac{1}{z - z_0} \int_{[z_0,z]} f(\xi) d\xi; z \in D \backslash \{z_0\} \\ F_1(z_0) &: = f(z_0) \end{aligned}$$

Concluimos observando que

$$F'(z_0) = \lim_{z \longrightarrow z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \longrightarrow z_0} F_1(z) = (*) = F_1(z_0) = f(z_0)$$

Hemos utilizado $(*)$, que significa la continuidad de F_1 en z_0. Estudiemos este punto.

$$F_1(z) - F_1(z_0) = \frac{1}{z - z_0} \int_{[z_0,z]} [f(\xi) - f(z_0)]\, d\xi.$$

Por consiguiente tenemos la siguiente estimación

$$|F_1(z) - F_1(z_0)| \leq \frac{1}{|z - z_0|} \left| f - f(z_0) \right|_{[z_0,z]} . |z - z_0| \leq$$

$$|f - f(z_0)|_D \, ; z \in D.$$

Ahora, la continuidad de f en z_0 nos implica la continuidad de F_1 en z_0.

Def. Si $f \in C(\Omega)$, diremos que una función $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es una primitiva de f en Ω si F verifica (i) o (ii), ambas equivalentes, del Teorema anterior.

Consecuencias.

- Para cada $n \neq -1, z^n$ en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ o en $\mathbb{C}$ si $n \geq 0$, tiene por primitiva a $\frac{z^{n+1}}{n+1}$. Por consiguiente

$$\int_\gamma \xi^n d\xi = 0, \forall \gamma \subset \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ cerrado}, \forall n \in \mathbb{Z}, n \neq -1$$

-De la relación

$$\int_{\partial D} \frac{d\xi}{\xi - z_0} = 2\pi i; \forall D, \text{ disco centrado en } z_0$$

deducimos que

$\forall z_0 \in \mathbb{C}, \forall V$ entorno de z_0, la función $(z - z_0)^{-1} \in H(\mathbb{C} \setminus \{z_0\})$

no admite una primitiva en $V\setminus\{z_0\}$. Para $z_0 = 0$, esto refleja el hecho de que no existe una función logaritmo en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

- Cada serie de potencias,

$$f(z) = \sum a_n (z - z_0)^n$$

tiene, en su disco de convergencia, a la serie de potencias

$$F(z) = \sum \frac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1}$$

como una primitiva.

- Si F es holomorfa en Ω con derivada nula, entonces F es localmente constante en Ω. En efecto, para cada disco D centrado en z_0, incluído en Ω, tenemos

$$F(z) - F(z_0) = \int_\gamma 0 d\xi = 0; z \in D,$$

$\gamma \subset D$ camino que une z_0 con z.

Como consecuencia si F y $\widehat{F}$ son ambas primitivas de f en Ω, entones $F - \widehat{F}$ es localmente constante en Ω.

Def. Diremos que una función $f \in C(\Omega)$ es integrable en Ω si f admite una primitiva en Ω.

El cálculo de integrales de funciones integrables se simplifica enormemente. Por este motivo investigaremos cuando una función continua en Ω es integrable.

Criterio de integrabilidad. *Sea $f \in C(\Omega)$. TFAE*
(i) f es integrable en Ω.
(ii) Para cada camino cerrado $\gamma \subset \Omega$ se verifica: $\int_\gamma f = 0$

D) Un camino cerrado siempre permanece dentro de una componente conexa de Ω. Por consiguiente podemos suponer que Ω es conexo. Sea $z_1 \in \Omega$, fijo. Definimos

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f d\xi; \gamma_z \subset \Omega \text{ camino que une } z_1 \text{ con } z;\ z \in \Omega.$$

$F(z)$ está bien definida ya que Ω es conexo por caminos, por ser abierto, y la integral no depende del camino γ_z por la hipótesis (ii). Sean $\omega, z \in \Omega$ y $\gamma \subset \Omega$ un camino que une ω con z. Entonces $\gamma_\omega + \gamma - \gamma_z$ es cerrado y por consiguiente

$$0 = \int_{\gamma_\omega+\gamma-\gamma_z} f d\xi = F(\omega) + \int_\gamma f d\xi - F(z)$$

con lo que finaliza la prueba.

Observar que en las condiciones de (ii) la función

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f d\xi; \gamma_z \subset \Omega \text{ camino que une } z_1 \text{ con } z;\ z \in \Omega.$$

es una primitiva de f en Ω.

La condición anterior de integrabilidad puede debilitarse imponiendo algunas condiciones, de tipo geométrico, al dominio Ω.

Regiones estrelladas.

Def. $M \subset \mathbb{C}$ es un cuerpo estrellado si existe $z_1 \in M$, un centro de M, tal que para cada $z \in M$ se verifica $[z_{1,} z] \subset M$.

Cada abierto estrellado es conexo

Def. Llamaremos triángulo de vértices $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ al compacto

$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : z = z_1 + s(z_2 - z_1) + t(z_3 - z_1) : s \geq 0, t \geq 0, s + t \leq 1\} =$
$= \{z \in \mathbb{C} : z = t_1 z_1 + t_2 z_2 + t_3 z_3; t_1 \geq 0, t_2 \geq 0, t_3 \geq 0, t_1 + t_2 + t_3 = 1\}$

Llamaremos borde del trángulo Δ a

$$\partial\Delta := [z_1, z_2] + [z_2, z_3] + [z_3, z_1]$$

Teorema. *Sea* Ω *un abierto estrellado con centro en* z_1*. Supongamos que* $f \in C(\Omega)$ *verifica*

$$\int_{\partial\Delta} f d\xi = 0, \forall \Delta \text{ triángulo contenido en } \Omega \text{ que tenga a } z_1 \text{ como vértice.}$$

Entonces f *es integrable en* Ω *y*

$$F(z) = \int_{[z_1,z]} f d\xi, z \in \Omega$$

es una primitiva de f *en* Ω*. En particular*

$$\int_\gamma f d\xi = 0, \text{ para cada camino cerrado } \gamma \subset \Omega.$$

D) $F(z)$ está bien definida. Sea $z_0 \in \Omega$ fijo. Para z "próximo" a z_0, el trángulo Δ de vértices z_1, z_0, z está incluído en Ω y

$$F(z) = F(z_0) + \int_{[z_0,z]} f d\xi.$$

En este caso, ya hemos visto, que F es diferenciable en sentido complejo, en z_0 y $F'(z_0) = f(z_0)$.

Corolario.(Criterio de integrabilidad para dominios estrellados).

Sea Ω *un dominio estrellado con* z_1 *como uno de sus vértices. Sea* $f \in C(\Omega)$*. Son equivalentes*

(i) f *es integrable en* Ω*.*

(ii) $\int_{\partial\Delta} f d\xi = 0$*, para cada* $\Delta \subset \Omega$*, triángulo que tenga a* z_1 *como vértice.*

Teorema de Goursat. *Sea* $f \in H(\Omega)$*. Si el triángulo* Δ *está incluído en* Ω *entonces* $\int_{\partial\Delta} f d\xi = 0$.

D) Observemos:

1)
$$\text{máx}\{|\omega - z| : \omega, z \in \Delta\} \leq L(\partial\Delta)$$

2)

$$L(\partial\Delta') = (1/2)\, L(\partial\Delta)$$

si Δ' es cada uno de los cuatro triángulos $\Delta_i, i = 1, 2, 3, 4$, congruentes, obtenidos uniendo los puntos medios de los tres lados de Δ.

Sea

$$\alpha(\Delta) := \int_{\partial\Delta} f d\xi = \sum_{i=1}^{4} \alpha(\Delta_i).$$

Seleccionamos uno de los cuatro triángulos, Δ^1, tal que

$$|\alpha(\Delta)| \leq 4 \left|\alpha(\Delta^1)\right|.$$

Reiteramos el proceso:

$$|\alpha(\Delta)| \leq 4 \left|\alpha(\Delta^1)\right| \leq 4^2 \left|\alpha(\Delta^2)\right| \leq ...; \Delta^1 \supset \Delta^2 \supset .....,$$

es decir

$$|\alpha(\Delta)| \leq 4^n \left|\alpha(\Delta^n)\right|; L(\partial\Delta^n) = \frac{1}{2^n} L(\partial\Delta); n = 1, 2, ...$$

De las relaciones de inclusión y la compacidad de cada Δ^n deducimos que

$$\cap_1^\infty \Delta^n = \{z_0\} \text{ con } z_0 \in \Omega.$$

Si definimos

$$\begin{aligned} \epsilon(z) &= \frac{f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)}{z - z_0}; z \in \Omega\backslash \{z_0\} \\ \epsilon(z_0) &= 0 \end{aligned}$$

resulta que la función $\epsilon(z)$ es continua en Ω. Por otra parte

$$\text{Para cada } n \geq 1, \quad \int_{\partial\Delta^n} f(z_0)d\xi = \int_{\partial\Delta^n} f'(z_0)(z - z_0)d\xi = 0$$

y por consiguiente

$$\alpha(\Delta^n) = \int_{\partial\Delta^n} (\xi - z_0)\epsilon(\xi)d\xi; n = 1, 2, 3, ...$$

De esta relación podemos obtener la estimación

$$|\alpha(\Delta^n)| \leq máx \left\{ |(\xi - z_0)\epsilon(\xi)| .L(\partial\Delta^n) : \xi \in \partial\Delta^n \right\} \leq ..$$

$$(L(\partial\Delta^n))^2 . |\epsilon|_{\partial\Delta^n} ; n = 1, 2, 3, ..$$
$$|\alpha(\Delta)| \leq 4^n |\alpha(\Delta^n)| \leq (L(\partial\Delta))^2 |\epsilon|_{\partial\Delta^n} ; n = 1, 2, 3, ..$$

La continuidad de $\epsilon(z)$ en z_0 y el valor $\epsilon(z_0) = 0$ nos permite concluir que $\alpha(\Delta)$ tiene que ser 0.

Corolario. *Sea Ω un dominio estrellado con centro en z_1. Sea f holomorfa en Ω. Entonces f es integrable en Ω y la función*

$$F(z) := \int_{[z_1,z]} f d\xi; \; z \in \Omega \text{ es una primitiva de } f \text{ en } \Omega.$$

En particular

$$\int_\gamma f d\xi = 0, \forall\gamma \subset \Omega \text{ cerrado}$$

Aplicaciones.

Consideremos $\mathbb{C}^-$ dominio estrellado con centro en 1. El corolario anterior nos dice que la función

$$\int_{[1,z]} \frac{d\xi}{\xi} \text{ es una primitiva de } \frac{1}{z} \text{ en } \mathbb{C}^-$$

Si unimos 1 con z a través del segmento $[1, r]$, más el arco circular γ, por admitir la función $\frac{1}{z}$ una primitiva tenemos independencia del camino, es decir

$$\int_{[1,z]} \frac{d\xi}{\xi} = \int_1^r \frac{dt}{t} + \int_0^\theta \frac{ire^{it}}{re^{it}} dt = \log r + i\theta = \log |z| + i\theta$$

Conclusión: La función $\int_{[1,z]} \frac{d\xi}{\xi}$ es la rama principal del logaritmo en $\mathbb{C}^-$. (esta observación es una prueba diferente de la existencia de la rama principal del logaritmo).

Ejercicio. Utilizar el corolario anterior para hacer una prueba alternativa de que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{d\xi}{\xi - z} = 1 \text{ si } z \in D(z_0; r)$$

Para obtener la fórmula integral de Cauchy para discos, necesitamos una versión más refinada del corolario anterior:

Teorema. *Sea Ω un dominio estrellado con centro en z_1. Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ continua en Ω y holomorfa en $\Omega \backslash \{z_1\}$. Entonces f es integrable en Ω*

D) La demostración es idéntica a la del corolario anterior pero utilizando una versión más refinada del Teorema de Goursat.

Lema integral de Goursat.

Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$ y $z_1 \in \Omega$. Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es continua en Ω y holomorfa en $\Omega \backslash \{z_1\}$, entonces

$$\int_{\partial\Delta} f d\xi = 0, \text{ para todo triángulo } \Delta \subset \Omega \text{ con vértice } z_1$$

D) Por el Teorema de Goursat

$$\int_{\partial\Delta} f d\xi = \int_{\partial\Delta_1} f d\xi$$

donde Δ_1 es un triángulo arbitrario incluido en $\partial\Delta$ con vértice z_1. Por consiguiente

$$\left| \int_{\partial\Delta} f d\xi \right| \leq |f|_\Delta \, L(\partial\Delta_1)$$

Si tenemos en cuenta que $L(\partial\Delta_1)$ puede hacerse arbitrariamente pequeña, resulta que $\int_{\partial\Delta} f d\xi = 0$.

Observación. Todos los resultados vistos hasta este momento son anteriores al Teorema de Prolongación de Riemann que nos asegura que si $f \in C(\Omega)$ y $f \in H(\Omega \backslash \{z_1\}, z_1 \in \Omega$, entonces $f \in H(\Omega)$.

Fórmula integral de Cauchy para discos.
Sea $f \in H(\Omega)$ y $D = D(z_0; r)$ tal que $\overline{D} \subset \Omega$. Entonces

$$\forall z \in D, \; f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

D) Fijemos $z \in \Omega$. Definimos

$$\begin{aligned} g(\xi) &: = \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} \text{ si } \xi \in \Omega \backslash \{z\} \\ g(z) &: = f'(z) \end{aligned}$$

La función g es holomorfa en $\Omega \setminus \{z\}$ y es continua en Ω. Sea $s > r$ tal que $D' = D(z_0; s) \subset \Omega$. La convexidad de D' nos asegura que $g_{|_{D'}}$es integrable y por consiguiente $\int_{\partial D} g(\xi) d\xi = 0$. Podemos concluir observando

$$\int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - f(z) \int_{\partial D} \frac{d\xi}{\xi - z} = \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

Desarrollo de las funciones holomorfas en series de potencias

Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$ y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. Diremos que f es desarrollable en serie de potencias alrededor de $z_0 \in \Omega$ si para algún $r > 0$ con $D = D(z_0; r) \subset \Omega$ existe una serie de potencias$\sum a_n (z - z_0)^n$ que converge en D a $f_{|D}$

Es conocido que en este caso f es infinitamente derivable en sentido complejo en D y $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. Es decir, el desarrollo en serie de f es único y siempre tiene la forma

$$f(z) = \sum \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n; z \in D \equiv \text{serie de Taylor de } f \text{ alrededor de } z_0.$$

Consecuencias de la fórmula integral de Cauchy

Lema. *Sea γ un camino C^1 a trozos en $\mathbb{C}$ y $f : |\gamma| \longrightarrow \mathbb{C}$ continua. Si*

$$F(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi; z \in \mathbb{C} \setminus |\gamma|$$

resulta que F es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$. Además para cada $z_0 \in \mathbb{C} \setminus |\gamma|$ la serie de potencias

$$\sum a_n (z - z_0)^n \text{ con } a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

converge, en cada disco abierto centrado en z_0 que no toque a $|\gamma|$, a $F(z)$. La función $F(z)$ se puede derivar infinitas veces en sentido complejo en $\mathbb{C}\setminus|\gamma|$ y se verifica:

$$F^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}}d\xi; \forall z \in \mathbb{C}\setminus|\gamma|, \forall k \in \mathbb{N}$$

D) Fijemos $D = D(z_0; r)$ con $r > 0$ y $D \cap |\gamma| = \emptyset$. Es conocido que la igualdad

$$\sum_{n\geq k}\binom{n}{k}w^{n-k} = \frac{1}{(1-w)^{k+1}} \text{ es válida si } |w| < 1$$

Esta serie se transforma para $w := \frac{z-z_0}{\xi - z_0}$ en

$$\frac{1}{(\xi - z)^{k+1}} = \sum_{n\geq k}\binom{n}{k}\frac{1}{(\xi - z_0)^{n+1}}(z - z_0)^{n-k},$$

$$\text{igualdad válida } \forall z \in D, \xi \in |\gamma|, k \in \mathbb{N}$$

Vamos a denotar por $g_n(\xi)$ la función definida en $|\gamma|$ por

$$g_n(\xi) := \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}; \xi \in |\gamma|$$

Entonces podemos escribir

$$\forall z \in D, \frac{k!}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}}d\xi =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\left[\sum_{n\geq k}k!\binom{n}{k}g_n(\xi)(z - z_0)^{n-k}\right]d\xi \ (*)$$

Estimemos:

$$\forall \xi \in |\gamma|, |\xi - z_0| \geq r$$

y por consiguiente

$$|g_n|_\gamma \leq |f|_\gamma \, r^{-(n+1)}$$

Como consecuencia tenemos

$$\textit{máx}_{\xi\in|\gamma|} \left| g_n(\xi)\,(z - z_0)^{n-k} \right| \leq \frac{1}{r^{(n+1)}} \, |f|_\gamma \, \frac{|z - z_0|^{n-k}}{r^{n-k}} r^{n-k} =$$

$$\frac{1}{r^{k+1}} \, |f|_\gamma \left| \frac{z - z_0}{r} \right|^{n-k} = \frac{1}{r^{k+1}} \, |f|_\gamma \, q^{n-k}$$

$$\text{con } q = \left| \frac{z - z_0}{r} \right| < 1, z \in D$$

Para cada $z \in D$,

$$\sum_{n\geq k} \left| k! \binom{n}{k} g_n(\xi)\,(z - z_0)^{n-k} \right| \leq$$

$$\sum_{n\geq k} k! \binom{n}{k} q^{n-k} \frac{1}{r^{k+1}} \, |f|_\gamma = k! \frac{1}{(1 - q)^{k+1}} \frac{1}{r^{k+1}} \, |f|_\gamma$$

Luego la serie de la expresión $(*)$ converge absolutamente en $\xi \in |\gamma|$ para cada $z \in D$. Por consiguiente

$$\forall z \in D, \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} d\xi = \sum_{n\geq k} k! \binom{n}{k} a_n \,(z - z_0)^{n-k}$$

$$\text{con } a_n := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

Hemos probado que la función F viene representada en D por la serie $\sum a_n(z-z_0)^n$ $(k = 0)$ y por consiguiente F es infinitamente derivable en sentido complejo en D y verifica

$$F^{(k)}(z) = \sum_{n\geq k} k! \binom{n}{k} a_n \,(z - z_0)^{n-k} =$$

$$\frac{k!}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{k+1}}d\xi, \forall z\in D, k\in\mathbb{N}$$

Al ser D un disco arbitrario en $\mathbb{C}\setminus|\gamma|$, se deduce que $F \in H(\mathbb{C}\setminus|\gamma|)$.

Teorema de representación.

Cada función $f\in H(\Omega)$ es desarrollable en serie de potencias alrededor de cada punto $z_0\in\Omega$, en una serie de Taylor $\sum a_n(z-z_0)^n$ que converge a f en $D(z_0;d)$, uniformemente sobre cada compacto, con $d=dist(z_0;\partial\Omega)$. Los coeficientes de Taylor a_n vienen dados por las integrales

$$a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi \text{ si } B=D(z_0;r) \text{ con } 0<r<d$$

En particular f es infinitamente derivable en sentido complejo en Ω y en cada disco $D(z_0;r)$ con $0<r<d$ se tiene

$$f^{(k)}(z)=\frac{k!}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{k+1}}; z\in D(z_0;r); \forall k\in\mathbb{N}$$

D) Al ser $f\in H(\Omega)$ la fórmula integral de Cauchy nos dice que

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)}d\xi; z\in D=D(z_0;r); 0<r<d$$

Aplicando el lema anterior a $F:=f, \gamma=\partial D$, f tiene un desarrollo de Taylor alrededor de z_0 que converge en $D(z_0;r)$ y cuyos coeficientes de Taylor vienen dados por

$$a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi$$

Cada elección de r, con $0 < r < d$, genera la misma serie, la convergencia de la serie hacia f se verifica en todo $D(z_0; d)$. Las fórmulas de las derivadas $f^{(k)}(z)$ salen directamente del lema.

El Teorema de Cauchy para discos

Una función $f \in C(\Omega)$ es localmente integrable en Ω si Ω pueder ser recubierto por subconjuntos abiertos U tales que $f_{|U}$ es integrable.

Teorema. *Sea $f \in C(\Omega)$. TFAE*

(i) $f \in H(\Omega)$

(ii) Para todo triángulo $\Delta \subset \Omega$, $\int_{\partial\Delta} f(\xi)d\xi = 0$. (Teorema de Morera)

(iii) f es localmente integrable en Ω

(iv) Para todo disco D con $\overline{D} \subset \Omega$ se verifica

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)} d\xi; z \in D$$

(v) f es desarrollable en serie de potencias alrededor de cada punto $z_0 \in \Omega$

D) $(i) \Longrightarrow (ii)$ es el teorema de Goursat.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$ es el criterio de integrabilidad.

$(i) \Longrightarrow (iv)$ es la Fórmula Integral de Cauchy.

$(iv) \Longrightarrow (v)$ es el desarrollo en serie de potencias.

$(v) \Longrightarrow (i)$ es la derivación de las series de potencias

Veamos $(iii) \Longrightarrow (i)$. Sea $z_0 \in \Omega$. Existe un disco abierto D tal que $z_0 \in D \subset \Omega$ y $f_{|D}$ tiene una primitiva F en D, es decir $F' = f_{|D}$. F es infinitamente derivable en sentido complejo en D, y por consiguiente f es holomorfa en D. Como conclusión f es holomorfa en Ω.

Holomorfía de las funciones definidas por integrales.

Sea $g(\omega, z)$ continua en $|\gamma| \times \Omega$. Supongamos que $\forall \omega \in |\gamma|$, $g(\omega, z)$ es holomorfa en Ω. Entonces la función

$$h(z) := \int_\gamma g(\xi, z) d\xi; z \in \Omega$$

es holomorfa en Ω.

D) La función h es continua en Ω (ejercicio). Sea $\Delta \subset \Omega$ un triángulo. Entonces

$$\int_{\partial\Delta} h(s) ds = \int_{\partial\Delta} \left(\int_\gamma g(\xi, s) d\xi \right) ds =$$

$$\int_\gamma \left(\int_{\partial\Delta} g(\xi, s) ds \right) d\xi$$

(la continuidad de $g(\omega, z)$ en $|\gamma| \times \Omega$ permite intercambiar el orden de integración). Para cada $\xi \in |\gamma|$, $g(\xi, s)$ es holomorfa en Ω y por consiguiente $\int_{\partial\Delta} g(\xi, s) ds = 0$, es decir $\int_{\partial\Delta} h(s) ds = 0$.

Teorema de Prolongación de Riemann.

Sea $A \subset \Omega$, cerrado en Ω y $f \in H(\Omega \backslash A)$. Diremos que f admite una extensión holomorfa (respect. continua) a Ω si $f = F_{|(\Omega \backslash A)}$ para alguna función $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa (respect. continua) en Ω.

Diremos que $A \subset \Omega$ es discreto si todos los puntos de A son aislados.

Teorema. *Sea $A \subset \Omega$ discreto y cerrado en Ω y $f \in H(\Omega \backslash A)$. TFAE*

(i) f admite una extensión holomorfa a Ω

(ii) f admite una extensión continua a Ω

(iii) f es acotada en un entorno de cada punto de A.

(iv) Para cada $z_0 \in A$, $\lim_{z \longrightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = 0$.

D) Las implicaciones (i)$\Longrightarrow$(ii)$\Longrightarrow$(iii)$\Longrightarrow$(iv) son obvias. Para probar que (iv) implica (i), podemos suponer que A está formado sólo por un punto $z_0 = 0$.

Definimos las funciones

$$\begin{aligned} g(z) &:= zf(z), z \in \Omega \setminus \{0\} \\ g(0) &:= 0 \end{aligned}$$

y

$$h(z) := zg(z), z \in \Omega$$

Por hipótesis g es continua en Ω. La identidad $h(z) = h(0) + zg(z)$ muestra que existe $h'(0) = g(0) = 0$. Es obvio que h es holomorfa en $\Omega \setminus \{0\}$ por serlo f, y por consiguiente h es holomorfa en Ω. Esto nos permite afirmar que h admite un desarrollo de Taylor alrededor del 0

$$h(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ...$$

La condición $h(0) = h'(0) = 0$ nos permite escribir $h(z)$ alrededor del 0 como

$$h(z) = z^2(a_2 + a_3 z + ...)$$

Para cada $z \neq 0$, $h(z) = z^2 f(z)$, luego la función

$$F(z) := \begin{array}{ll} \frac{h(z)}{z^2}, & z \neq 0 \\ a_2 \quad , & z = 0 \end{array}$$

es una extensión holomorfa de f a Ω.

Teorema de Identidad
Sea Ω un abierto y conexo de $\mathbb{C}$ y $f, g \in H(\Omega)$. TFAE
(i) $f = g$ en Ω.
(ii) El conjunto $\{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$ tiene un punto de acumulación en Ω.
(iii) Existe un $z_0 \in \Omega$ tal que para cada $n = 0, 1, 2, 3...$ se verifica $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$.

D) (i) implica (ii) es trivial. Veamos que (ii) implica (iii). Sea $h = (f - g) \in H(\Omega)$. Sea $z_0 \in \Omega$ un punto de acumulación del conjunto $\{z \in \Omega : h(z) = 0\}$. Si para cada $n = 0, 1, 2, 3$...se verifica $h^{(n)}(z_0) = 0$ la prueba concluye. En caso contrario sea m el menor entero tal que $h^{(m)}(z_0) \neq 0$. (Este entero m tiene que ser positivo ya que si $m = 0$, entonces h seria constante en un entorno de z_0 y dicha constante tendría que ser cero). Luego $h(z) = (z - z_0)^m h_m(z)$ en todo disco D centrado en z_0 con $\overline{D} \subset \Omega$, y $h_m(z)$ holomorfa en dicho disco con $h_m(z_0) \neq 0$. La continuidad de h_m nos garantiza la existencia de un abierto $U \subset \Omega$, entorno de z_0, tal que $h_m(z) \neq 0$ para cada $z \in U$. Como consecuencia

$$\{z \in \Omega : h(z) = 0\} \cap (U \setminus \{z_0\}) = \emptyset$$

lo que es una contradicción con nuestra hipótesis.

Veamos ahora (iii) implica (i). Sea $h = (f - g) \in H(\Omega)$. Para cada $k = 0, 1, 2, 3$...,sea

$$S_k = \left\{ z \in \Omega : h^{(k)}(z) = 0 \right\}$$

Cada función $h^{(k)}$ es holomorfa en Ω, y por consiguiente cada S_k es cerrado en Ω y

$$S = \cap_k S_k$$

es cerrado en Ω. Veamos que también es abierto en Ω. Sea $z_0 \in S$. Entonces para cada disco D centrado en z_0, con $\overline{D} \subset \Omega$, la serie de Taylor a sociada a h en D es la serie nula. Por consiguiente $h^{(k)}_{|D} \equiv 0$ para cada $k = 0, 1, 2, 3$..., lo que implica que $D \subset S$. La hipótesis nos dice que $S \neq \emptyset$, y por consiguiente $S = \Omega$ y $h \equiv 0$ en Ω.

Observación. Consideremos la función

$$\sin \frac{z + 1}{z - 1} \in H(\mathbb{C} \setminus \{1\}).$$

Sus ceros son
$$\left\{\frac{n\pi+1}{n\pi-1} : n \in \mathbb{Z}\right\}.$$
Este conjunto tiene al 1 como punto de acumulación. No obstante el 1 no pertenece al dominio $\Omega = \mathbb{C}\setminus\{1\}$.

Fórmulas del valor medio. Desigualdades de Cauchy.

Si $f \in H(\Omega)$ y $D := D(z_0; r)$ con $\overline{D} \subset \Omega$, entonces la fórmula integral de Cauchy nos dice que
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi; z \in D$$

En particular se observa que el valor de $f(z), z \in D$, se puede calcular conociendo sólo el comportamiento de f en ∂D. Si $z = z_0$, obtenemos
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})dt; \partial D =$$
$$z_0 + re^{it}, t \in [0, 2\pi]\text{, igualdad del valor medio}$$

De la igualdad anterior se deduce:
$$|f(z_0)| \leq |f|_{\partial D}\text{; desigualdad del valor medio}$$

Las desigualdades de Cauchy son una generalización de la anterior. Sea $f \in H(\Omega)$ y $D := D(z_0; r)$ con $\overline{D} \subset \Omega$. Entonces
$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall z \in D, \left|f^{(k)}(z)\right| \leq k!\frac{r}{d_z^{k+1}}|f|_{\partial D}\text{ con}$$
$$d_z := d_z(D) = \min\{|\xi - z| : \xi \in \partial D\}$$

En efecto, la fórmula integral de Cauchy para las derivadas nos dice:

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} d\xi; z \in D$$

Estimemos:

$$Máx_{\xi \in \partial D} \left| \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} \right| \leq$$

$$|f|_{\partial D} \left(\min \{|\xi - z| : \xi \in \partial D\}\right)^{-k-1} = |f|_{\partial D} \, d_z^{-k-1},$$

y por consiguiente:

$$\left| f^{(k)}(z) \right| \leq \frac{k!}{2\pi} \, |f|_{\partial D} \, d_z^{-k-1} . 2\pi r =$$

$$k! \frac{r}{d_z^{k+1}} \, |f|_{\partial D} \, ; k \in \mathbb{N}; z \in D$$

Corolario. *Sea $f \in H(\Omega)$ y $D := D(z_0; r)$ con $\overline{D} \subset \Omega$. Entonces para todo $k \in \mathbb{N}$ y para todo d, con $0 < d < r$ se verifica:*

$$\left| f^{(k)}(z) \right| \leq k! \frac{r}{d^{k+1}} \, |f|_{\partial D} \, , \forall z \in \overline{D}(z_0; r - d)$$

En particular si

$$f(z) = \sum a_n (z - z_0)^n,$$

y la serie tiene un radio de convergencia superior a r, tomando límites cuando $d \longrightarrow r$, obtenemos:

$$|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}; M(r) = máx \{|f(z)| : |z - z_0| = r\}$$

Teorema de Liouville
Cada función entera y acotada es constante.

D) Sea

$$f(z) = \sum a_n(z - z_0)^n; z \in \mathbb{C}.$$

De las desigualdades de Cauchy se deduce que

$$\forall r > 0, \forall n \in \mathbb{N}, r^n |a_n| \leq máx \{|f(z)| : |z| = r\}$$

Sea $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Deducimos que

$$\forall r > 0, \forall n \in \mathbb{N}, r^n |a_n| \leq M,$$

es decir,

$$\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = a_0$$

Teorema de Weiestrass

Si una sucesión de funciones (f_n) holomorfas en Ω converge en la topología τ_c, (de la convergencia uniforme sobre los compactos de Ω), hacia una función f, entonces f es holomorfa en Ω y para cada $k \geq 1$, la sucesión (f_n^k) converge en la topología τ_c f^k en Ω.

D) Ya sabemos que la hipótesis implica que $f \in C(\Omega)$. Sea D un disco arbitrario contenido en Ω y Δ un triángulo contenido en D. La convergencia en la topología τ_c nos permite escribir:

$$\int_{\partial\Delta} f = \lim_n \int_{\partial\Delta} f_n = 0.$$

El Teorema de Morera nos dice que f es holomorfa en Ω ya que D es arbitrario.

Sean $\overline{D}(z_0; r) \subset \overline{D}(z_0; R) \subset \Omega; r < R$ y γ la circunferencia $|z - z_0| = R$. La fórmula integral de Cauchy nos dice que:

$$f_n^k(z) - f^k(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f_n(\xi) - f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} d\xi; z \in \overline{D}(z_0; r)$$

Estimemos:

$$\left|f_n^k(z) - f^k(z)\right| \leq k! \frac{RM_n}{(R-r)^{k+1}}, z \in \overline{D}(z_0; r)$$

donde

$$M_n = Sup\left\{|f_n(\xi) - f(\xi)| : |\xi - z| = R\right\}$$

La convergencia de (f_n) hacia f en la topología τ_c nos permite afirmar que $(M_n) \longrightarrow 0$, de lo que deducimos que

$$\left(f_n^k\right) \longrightarrow f \text{ uniformemente en } \overline{D}(z_0; r).$$

Si K es un compacto de Ω y $0 < r < dist(K, \partial\Omega)$, podemos elegir $\{a_1, ..., a_n\} \subset K : K \subset \cup_{j=1}^{n} D(a_j; r)$. De la convergencia uniforme de $\left(f_n^k\right) \longrightarrow f$ sobre cada $\overline{D}(a_j; r)$ se obtiene el resultado.

Ceros de las funciones holomorfas.

Sea f holomorfa en un entorno de z_0 con

$$f(z) = \sum a_n (z - z_0)^n; z \in D, D \text{ disco centrado en } z_0$$

Def. Diremos que f tiene en z_0 un cero de orden m, $O_{z_0}(f) = m$, si $a_n = 0$ para cada $n < m$ y $a_m \neq 0$. En particular

$$f(z) = (z - z_0)^m . g(z) \text{ con } g \text{ holomorfa en } D \text{ y } g(z_0) \neq 0$$

Llamaremos ceros simples a los ceros de orden 1.

Observación

-

$$O_{z_0}(f) = m = \min\left\{n : f^{(n)}(z_0) \neq 0\right\}$$

$$O_{z_0}(f) > 0 \Longleftrightarrow f(z_0) = 0$$

$$O_{z_0}(f) = \infty \text{ si } f \text{ es idénticamente nula en un entorno de } z_0$$

$$O_{z_0}(f) = 0 \text{ si } f(z_0) \neq 0$$

Ejemplos:

$$f(z) = (z-1)^n, , O_1(f) = n$$

$$\text{Si } n \in \mathbb{N},\ O_z(z^n) = 0 \text{ si } z \neq 0$$
$$\text{Si } n \in \mathbb{Z},\ \ O_n(\sin \pi z) = 1$$

Multiplicidad.

$$\gamma(f \ : \ z_0) \equiv \text{multiplicidad de } f \text{ en } z_0 := O_{z_0}(f - f(z_0))$$

Siempre $\gamma(f : z_0) \geq 1$.

$$\gamma(f : z_0) = n < \infty \Longleftrightarrow f(z) = f(z_0) + (z - z_0)^n F(z)$$

$F(z)$ holomorfa en un entorno de $z_0$con $F(z_0) \neq 0$

$$\gamma(f : z_0) = 1 \Longleftrightarrow f'(z_0) \neq 0$$