Matemática Discreta y Lógica Matemática

Hoja 1 del tema 2.

Facultad de Informática.

1. Demuestra mediante inducción que las siguientes propiedades se cumplen para todo número entero $n \geq 1$. Indica en cada caso que tipo de inducción usas.

   a) $1 + 2 + \ldots + n = \frac{(n^2+n)}{2}$

   b) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

   c) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

   d) $\frac{1}{1*2*3} + \frac{1}{2*3*4} + \cdots + \frac{1}{n*(n+1)*(n+2)} = \frac{n*(n+3)}{4*(n+1)*(n+2)}$

   e) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2*n-1}{2^n} = 3 - \frac{2*n+3}{2^n}$

2. Demuestra mediante inducción que las siguientes propiedades se cumplen para todo número natural n. Indica en cada caso que tipo de inducción usas.

   a) $\sum_{i=1}^{n}(4 * i - 3) = n * (2 * n - 1)$.

   b) $\sum_{i=0}^{n}(3 * 5^i) = (3/4) * (5^{n+1} - 1)$.

   c) $\sum_{i=1}^{n}(i * i!) = (n + 1)! - 1$.

   d) $\sum_{i=2}^{n}(i - 1) * i = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$.

3. Llamamos factorial de n al producto $1 * 2 * \ldots * n$, que escribimos $n!$. Demuestra que para todo entero $n \geq 2$, $n! < n^n$.

4. Demuestra que para todo entero $n \geq 1$, n impar, existe un entero m tal que $n^2 - 1 = 8m$.

5. Demuestra que para todo entero $n \geq 4$, $n^2 > 3n$.

6. Demuestra que para todo entero $n \geq 2$ se cumplen las siguientes desigualdades:

   a) $n^2 > n + 1$

   b) $2^{n+1} < 3^n$

   c) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$

7. Demuestra que para todo natural n, $2^{3n} - 1$ es divisible por 7.

8. Demuestra que la suma de los cubos de tres números naturales consecutivos es divisible por 9.

9. Demuestra que, para todo $n \geq 1$, $2^{3n-1} + 5^n$ es múltiplo de 3.

10. Demuestra que dados dos números enteros a, b con $a \neq 0$ y $b \neq 1$, para todo n natural, se verifica la igualdad:
$$a + ab + ab^2 + \ldots + ab^n = \frac{ab^{n+1} - a}{b - 1}$$

11. Encuentra a partir de qué valor natural la desigualdad $2^n > 2n + 1$ es válida.

12. En cada uno de los dos casos siguientes, encuentra el valor apropiado para la base de la inducción (n_0), y prueba que la propiedad se verifica para todo entero $n \geq n_0$.

a) $n^2 + 6n - 8 \geq 0$

b) $n^3 \geq 6n^2$

13. Conjetura una fórmula que de el valor de $S_n = 1 * 1! + 2 * 2! + \ldots + n * n!$ en función de n y demuestra por inducción que es correcta.

    Pista: Escribe los valores de S_1, S_2, S_3, $S_4, \ldots$ y conjetura un valor para S_n a partir de ellos.