3. CONJUNTOS ORDENADOS

3.1 Órdenes y conjuntos ordenados.

En $\mathbb{R}$ tenemos las relaciones $\leq$ y $<$ que verifican

- $x \leq x \ \forall x \in \mathbb{R}$ (Reflexiva)
- $x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y$
- $\left.\begin{matrix} x \leq y \\ y \leq z \end{matrix}\right\} \Rightarrow x \leq z$ (transitiva)

- $x \not< x$
- $\left.\begin{matrix} x < y \\ y < z \end{matrix}\right\} \Rightarrow x < z$ (transitiva)

Defినción: sea $R \subseteq A \times A$ relación binaria en A. Decimos que R es…

- "antirreflexiva" si $x \not R x$ para todo $x \in A$
- "antisimétrica" si $\left.\begin{matrix} xRy \\ yRx \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = y$

Observación: en $\mathbb{R}$

$\leq$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva

$<$ es antirreflexiva y transitiva

Definición: sea $R \subseteq A \times A$ relación binaria en A. Decimos que R es un…

- "orden" si R es reflexiva, antisimétrica y transitiva
- "orden estricto" si R es antirreflexiva y transitiva

Ejemplo:

- $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definida por $xRy \Leftrightarrow x \leq y$ es un orden.
- $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definida por $xRy \Leftrightarrow x < y$ es un orden estricto
- $R \subseteq \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+$ definida por $xRy \Leftrightarrow x \mid y$ es un orden
- $R \subseteq \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+$ definida por $xRy \Leftrightarrow x \mid y, (x \neq y)$ es un orden estricto
- $R \subseteq P(A) \times P(A)$ definida por $XRY \Leftrightarrow X \subset Y$ es un orden estricto

Notación: denotamos los órdenes por

$\sqsubseteq$ orden $\qquad\qquad \sqsubset$ orden estricto

$x \sqsubseteq y$: "x precede a y" o "x es menor o igual que y"

$x \sqsubset y$: "x precede estrictamente a y" o "x es menor que y"

Ejemplo:

- $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida por $xRy \Leftrightarrow x \mid y$

  $2 \mid (-2)$, $(-2) \mid 2$ y $2 \neq (-2)$ no antisimétrica $\Rightarrow$ NO orden

- $R \subseteq P(A) \times P(A)$ definida por $XRY \Leftrightarrow X \cap Y \neq \varnothing$

  R no reflexiva $\Rightarrow$ NO orden (además no transitiva)

Proposición:

(a) Dado un orden $\sqsubseteq$ entonces la relación dada por $xRy \Leftrightarrow x \sqsubseteq y, x \neq y$ es un orden estricto que escribimos como $\sqsubset$.

(b) Dado un orden estricto $\sqsubset$ entonces la relación dada por $xRy \Leftrightarrow x \sqsubset y$ ó $x \neq y$ es un orden que escribimos como $\sqsubseteq$.

Definición: sea $R \subseteq A \times A$ una relación binaria en A. Decimos que R es "conexa" si dados $x, y \in A$ con $x \neq y$ tenemos que o bien xRy o bien yRx.

(conexa = "todos relacionados con todos los demás")

Definición:

- orden + conexa = "orden total" (o "lineal")
- orden estricto + conexo = "orden estricto total" (o "lineal")
- si un orden no es total se llama "parcial"

Ejemplo:

- $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definida por $xRy \Leftrightarrow x \leq y$ es un orden total
- $R \subseteq \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+$ definida por $xRy \Leftrightarrow x \mid y$ es un orden parcial ($3 \nmid 5, 5 \nmid 3$)
- $R \subseteq P(A) \times P(A)$ definida por $XRY \Leftrightarrow X \subset Y$ es un orden estricto parcial

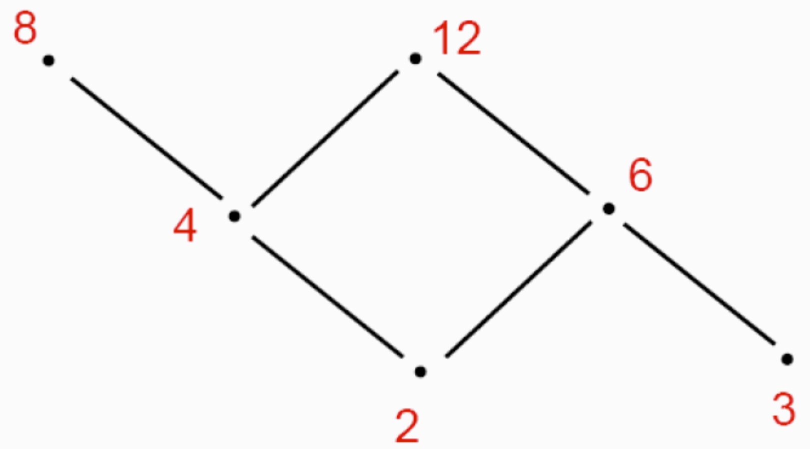
Observación: en un orden total, cualesquiera dos elementos son comparables

Definición: un "conjunto ordenado" es un conjunto con una relación de orden definida en él

Definición: un "diagrama de Hasse" es una representación de un conjunto ordenado (finito) $(A,\sqsubseteq)$ de modo que:

- Cada punto representa un elemento de A
- Si $x \sqsubseteq y$ entonces se añade una línea ascendente de x a y
- No se representan las líneas que se entienden por transitividad

Ejemplo: $A=\{2,3,4,6,8,12\}$ con orden dado por $x \sqsubseteq y \Leftrightarrow x \mid y$



Observación: los diagramas de Hasse sólo se usan para representar órdenes, no órdenes estrictos.

Consideramos ahora funciones que "preservan" el orden

Definición: sean $(A,\sqsubseteq)$, $(B,\sqsubseteq)$ dos conjuntos ordenados y $f:A\to B$ una función. Decimos que

- f es "monótona" si

  $x \sqsubseteq_A y \Rightarrow f(x) \sqsubseteq_B f(y)$

- f "preserva el orden" si

  $x \sqsubseteq_A y \Leftrightarrow f(x) \sqsubseteq_B f(y)$

- f es un "isomorfismo de orden" si

  f es biyectiva y preserva el orden

Ejemplo: consideramos el orden usual $\leq$.

(a) $\begin{aligned} f:\mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$

tenemos que $-3 \leq 2$ y no $f(-3) \leq f(2)$, por tanto f no es monótona

(b) $\begin{aligned} f:\mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$

tenemos que $x \leq y \Leftrightarrow x^2 \leq y^2$

Preserva el orden, pero no es biyectiva

(c) $\begin{aligned} f:\mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ \mathrm{n} &\mapsto n+1 \end{aligned}$

es un isomorfismo de orden

Observación: si $(A, \sqsubseteq_A)$ y $(B, \sqsubseteq_B)$ son isomorfos, por supuesto tienen que ser equipotentes, pero además se conservan otras propiedades.

- **Elementos extremos y extremales**

Definición: sea $(A,\sqsubseteq)$ conjunto ordenado, $S \subseteq A$ un subconjunto de A y $x \in S$ un elemento en S. Decimos que x es…

- "máximo" de S si $y \sqsubseteq x$ para cualquier otro $y \in S$.

  (x es mayor o igual que cualquier otro en S)

- "maximal" de S si no existe $y \in S$ tal que $x \sqsubset y$.

  (no hay nadie en S mayor estrictamente que él)

- "mínimo" de S si $x \sqsubseteq y$ para cualquier otro $y \in S$.

  (x es menor o igual que cualquier otro en S)

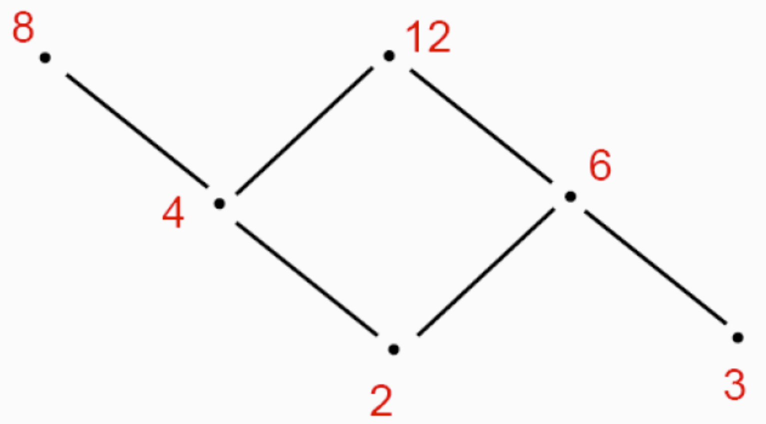
- "minimal" de S si no existe $y \in S$ tal que $y \sqsubset x$.

  (no hay nadie en S menor estrictamente que él)

Ejemplo: consideramos $A=\{2,3,4,6,8,12\}$ con el orden dado por divisibilidad ($x \sqsubseteq y \Leftrightarrow x \mid y$) y $S=\{2,4,6,8,12\}$.

Tenemos que

- 2 es mínimo en S
- 2 es el único minimal en S
- 8 y 12 son maximales en S
- No hay máximo en S



Definición:

Extremos = máximos y mínimos

Extremales = maximales y minimales

Proposición:

- x mínimo (o máximo) $\Rightarrow$ x minimal (o maximal)
- si x es mínimo (o máximo) entonces es único

(un subconjunto de un conjunto ordenado tiene a lo sumo un mínimo)

(igual para máximo)

Teorema: sean $(A, \sqsubseteq_A)$ y $(B, \sqsubseteq_B)$ dos conjuntos ordenados y $f : A \rightarrow B$ un isomorfismo de conjuntos ordenados. Entonces:

- x máximo en A $\Leftrightarrow$ $f(x)$ máximo en B.
- x maximal en A $\Leftrightarrow$ $f(x)$ maximal en B.
- x mínimo en A $\Leftrightarrow$ $f(x)$ mínimo en B.
- x minimal en A $\Leftrightarrow$ $f(x)$ minimal en B.

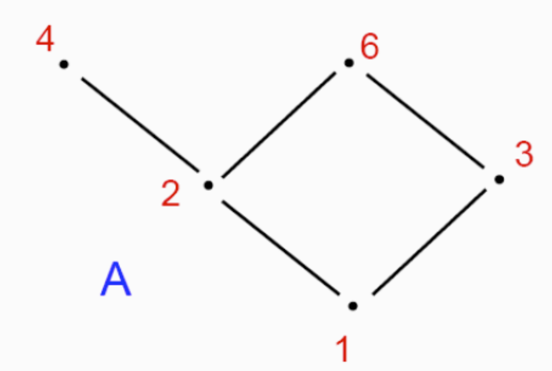
Ejemplo:

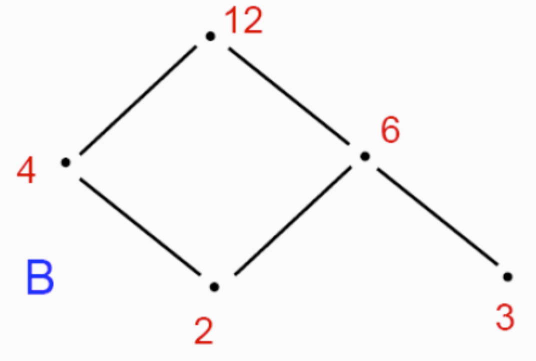
$(\mathbb{Z},\leq)$ no tiene mínimo $\qquad$ $(\mathbb{N},\leq)$ tiene mínimo (0)

Entonces $(\mathbb{Z},\leq)$ y $(\mathbb{N},\leq)$ no son isomorfos (aunque sí equipotentes).

Ejemplo:

$A=\{1,2,3,4,6\}$, $B=\{2,3,4,6,12\}$, $x\sqsubseteq y \Leftrightarrow x\mid y$





A tiene dos maximales y mínimo

B tiene máximo y dos minimales

$(A,\sqsubseteq_A)$ y $(B,\sqsubseteq_B)$ no son isomorfos

Observación: dado $(A,\sqsubseteq)$ conjunto ordenado y $S \subseteq A$ un subconjunto de A vamos a considerar los elementos "por encima" y "por debajo" de S.

Definición: dado $(A,\sqsubseteq)$ conjunto ordenado y $S \subseteq A$ subconjunto de A.

- Decimos que $x \in A$ es una "cota superior" de S si $u \sqsubseteq x$ para todo $u \in S$
- Decimos que $x \in A$ es una "cota inferior" de S si $x \sqsubseteq u$ para todo $u \in S$

Definición: dado $(A,\sqsubseteq)$ conjunto ordenado y $S \subseteq A$ subconjunto de A.

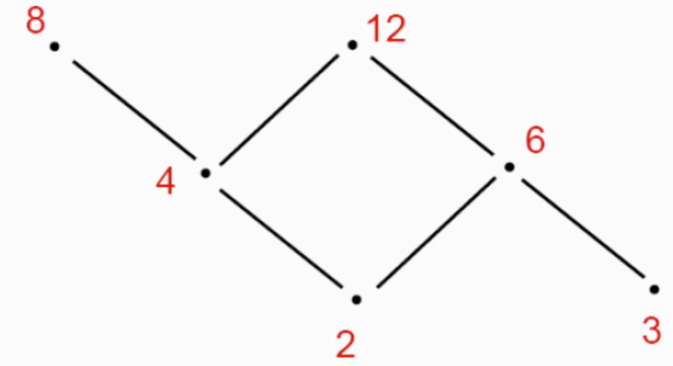
Definimos el

- "supremo" de S como $\sqcup S = \min\{x \in A \mid x \text{ cota superior de } S\}$
- "ínfimo" de S como $\sqcap S = \max\{x \in A \mid x \text{ cota inferior de } S\}$

Observación: a diferencia de $\max(S)$ y $\min(S)$, $\sqcup S$ y $\sqcap S$ no tienen por qué estar en S.

De hecho no tienen ni por qué existir.

Ejemplo: $A=\{2,3,4,6,8,12\}$, $x \sqsubseteq y \Leftrightarrow x \mid y$



$S=\{4,6\}$

No existe $\max(S)$, no existe $\min(S)$

pero $\sqcup S=12$ y $\sqcap S=2$.

Si $S=\{2,3\}$, entonces, no existe $\max(S)$ ni $\min(S)$ ni $\sqcap S$, pero $\sqcup S=6$.

Proposición:

- Si existe $\max(S)$ entonces $\max(S)= \sqcup S$.
- Si existe $\min(S)$ entonces $\min(S)= \sqcap S$.