Facultad de Ciencias MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

Facultad de Informática

Ejercicios de Repaso de la asignatura

Rafael del Vado Vírseda

Matemática Discreta y Lógica Matemática I

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Curso 2020-2021

Demuestra por inducción matemática

$$\frac{1}{2*1}+\frac{1}{3*2}+\cdots+\frac{1}{n*(n-1))}=\frac{n-1}{n} \quad \forall n \geq 2$$

Indica el tipo de inducción que utilizas.

Demuestra por inducción matemática que para todo número natural n, $a_n = 3 * 2^n - (-1)^n$.
Indica el tipo de inducción que utilizas.

$$\begin{aligned} a_0 &= 2 \\ a_1 &= 7 \\ a_n &= a_{n-1} + 2a_{n-2} \quad \text{if } n \geq 2 \end{aligned}$$

Demuestra que si $d = a + bc$ con $a, b \in \mathbb{Z}^+$, entonces $mcd(b, d) = mcd(a, b)$

Demuestra que dados $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tales que $a|c$ y $b|c$ y $\text{m.c.d.}(a, b) = 1$ entonces $a \cdot b|c$

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Si p es primo y se verifica $p|a$ y $p|a^2 + b^2$ demuestra:

$a)$ $p|a^2$

$b)$ $p|b$.

Estudia las siguientes igualdades entre conjuntos. Demuestra las que sean válidas, y construye un contraejemplo para las que no lo sean.

a) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B$

b) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

Demuestra que las dos funciones que se definen a continuación son biyecciones:

$g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ donde $g(n) = (-1)^{|n|} * n$

En cada uno de los casos que siguen, razona si se tiene $A \leq_c B$, $B \leq_c A$, ó ambas cosas.

a) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Z}$

b) $A = \mathbb{N}$, B finito

c) $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathcal{P}(\mathbb{N})$

d) $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

e) $A = [0, 1]$, $B = [0, 2]$

f) $A = \mathbb{N} \times \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{N} \times \mathbb{R}$

Sea $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid b^2 - a^2 = 3k$ para algún $k \in \mathbb{Z}\}$ una relación binaria sobre $\mathbb{Z}$.

(a) Demuestra que R es una relación de equivalencia.

(b) ¿Es R una función? ¿Por qué?

(c) Indica qué elementos forman las clases de equivalencia [2], [3].

En $\mathbb{N}_1$ se definen dos relaciones S, T del siguiente modo:

$$x\, S\, y \iff x < 2y, \qquad\qquad x\, T\, y \iff 2x < y.$$

(a) Demuestra que S no es un orden estricto. ¿Qué propiedades fallan?

(b) Demuestra que T es un orden estricto.

(c) Demuestra que T no es un orden total.

(d) Dado $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, dibuja un diagrama de Hasse que represente el orden T restringido a elementos de A.

(e) Determina las parejas de elementos diferentes del conjunto A que poseen supremo con respecto a T. Haz lo mismo para los ínfimos.

Demuestra por inducción matemática

$$\frac{1}{2*1}+\frac{1}{3*2}+\cdots+\frac{1}{n*(n-1))}=\frac{n-1}{n} \quad \forall n \geq 2$$

Indica el tipo de inducción que utilizas.

Demostramos por **INDUCCIÓN SIMPLE** sobre $n \geq 2$ que se cumple:

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i(i-1)} = \frac{n-1}{n}$$

CASO BASE: $n = 2$

$$\sum_{i=2}^{2} \frac{1}{i(i-1)} = \frac{1}{2(2-1)} = \frac{1}{2\cdot 1} = \frac{1}{2} = \frac{2-1}{2} \quad \checkmark$$

PASO INDUCTIVO: $n > 2$

$$\text{(HI)} \quad \sum_{i=2}^{k} \frac{1}{i(i-1)} = \frac{k-1}{k} \quad \text{para todo } k \geq 2$$

$$¿ \sum_{i=2}^{k+1} \frac{1}{i(i-1)} = \frac{k}{k+1} \quad \text{para todo } k \geq 2 \; ?$$

Demuestra por inducción matemática

$$\frac{1}{2*1}+\frac{1}{3*2}+\cdots+\frac{1}{n*(n-1))}=\frac{n-1}{n} \quad \forall n \geq 2$$

Indica el tipo de inducción que utilizas.

PASO INDUCTIVO: $n > 2$

(HI) $\displaystyle\sum_{i=2}^{k} \frac{1}{i(i-1)} = \frac{k-1}{k}$ para todo $k \geq 2$

¿ $\displaystyle\sum_{i=2}^{k+1} \frac{1}{i(i-1)} = \frac{k}{k+1}$ para todo $k \geq 2$?

$$\sum_{i=2}^{k+1} \frac{1}{i(i-1)} \underset{k+1>2 \text{ pues } k \geq 2}{=} \sum_{i=2}^{k} \frac{1}{i(i-1)} + \frac{1}{(k+1)\cdot k} \overset{HI}{\underset{k\geq 2}{=}} \frac{k-1}{k} + \frac{1}{k(k+1)} =$$

$$\frac{(k-1)(k+1)+1}{k(k+1)} = \frac{k^2-1+1}{k(k+1)} = \frac{k^2}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1} \quad \checkmark$$

Demuestra por inducción matemática que para todo número natural n, $a_n = 3 * 2^n - (-1)^n$. Indica el tipo de inducción que utilizas.

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 2 \\
a_1 &= 7 \\
a_n &= a_{n-1} + 2a_{n-2} \quad \text{if } n \geq 2
\end{aligned}
$$

Demostramos por INDUCCIÓN COMPLETA sobre $n \geq 0$ que se cumple: $a_n = 3 \cdot 2^n - (-1)^n$.

CASOS BASE: $n = 0$ y $n = 1$

$a_0 = 3 \cdot 2^0 - (-1)^0 = 3 \cdot 1 - 1 = 3 - 1 = 2$ ✓

$a_1 = 3 \cdot 2^1 - (-1)^1 = 3 \cdot 2 - (-1) = 6 + 1 = 7$ ✓

PASO INDUCTIVO: $n > 1$

(HIC) Para todo $k \geq 2$:

$a_l = 3 \cdot 2^l - (-1)^l$ para todo $0 \leq l < k$

¿ $a_k = 3 \cdot 2^k - (-1)^k$ para todo $k \geq 2$?

Demuestra por inducción matemática que para todo número natural n, $a_n = 3 * 2^n - (-1)^n$. Indica el tipo de inducción que utilizas.

$$\begin{aligned} a_0 &= 2 \\ a_1 &= 7 \\ a_n &= a_{n-1} + 2a_{n-2} \quad \text{if } n \geq 2 \end{aligned}$$

PASO INDUCTIVO: $n > 1$

(HIC) Para todo $k \geq 2$:

$a_\ell = 3 \cdot 2^\ell - (-1)^\ell$ para todo $0 \leq \ell < k$

¿ $a_k = 3 \cdot 2^k - (-1)^k$ para todo $k \geq 2$?

$$a_k \underset{k \geq 2}{=} a_{k-1} + 2a_{k-2} \overset{HIC(\ell = k-1,\ \ell = k-2)}{=\!=\!=} 3 \cdot 2^{k-1} - (-1)^{k-1} + 2(3 \cdot 2^{k-2} - (-1)^{k-2}) =$$

$$\begin{cases} 0 \leq k-1 < k \\ 0 \leq k-2 < k \end{cases} \text{ pues } k \geq 2$$

$$3 \cdot 2^{k-1} - (-1)^{k-1} + 3 \cdot 2^{k-1} - 2 \cdot (-1)^{k-2} =$$

$$3 \cdot 2 \cdot 2^{k-1} - (-1)^{k-1} \cdot (1 + 2(-1)^{-1}) =$$

$$3 \cdot 2^k - (-1)^{k-1} \cdot (1-2) = 3 \cdot 2^k - (-1)^{k-1} \cdot (-1) = 3 \cdot 2^k - (-1)^k \ \checkmark$$

Facultad de Informática

Facultad de Ciencias MATEMÁTICAS

Demuestra que si $d = a + bc$ con $a, b \in \mathbb{Z}^+$, entonces $mcd(b, d) = mcd(a, b)$

Demostramos que $\{x \in \mathbb{Z} \mid x|b \wedge x|d\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x|a \wedge x|b\}$ por el DOBLE CONTENIDO:

$\subseteq$) Sea $x \in \mathbb{Z}$ tal que $x|b$ y $x|d$. Veamos que $x|a$:

Como $x|d$ y $d = a + bc$ con $c \in \mathbb{Z}$, se tiene que:

$x|(a+bc) \Rightarrow a + bc = x \cdot k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow a = x \cdot k - b \cdot c$ para algún $k \in \mathbb{Z}$

Como $x|b$: $b = x \cdot k'$ para algún $k' \in \mathbb{Z}$.

Sustituyendo

$a = x \cdot k - b \cdot c = x \cdot k - x \cdot k' \cdot c = x \cdot (k - k' \cdot c)$ siendo $k - k' \cdot c \in \mathbb{Z}$

Luego $x|a$.

Demuestra que si $d = a + bc$ con $a, b \in \mathbb{Z}^+$, entonces $mcd(b, d) = mcd(a, b)$

$\supseteq$) Sea $x \in \mathbb{Z}$ tal que $x|a$ y $x|b$. Veamos que $x|d$:

$$\left.\begin{array}{l} x|a \\ x|b \underset{\substack{\uparrow \\ \text{propiedades}}}{\Rightarrow} x|b\cdot c \end{array}\right\} \Rightarrow x|(a+bc) \underset{\substack{\uparrow \\ d = a+bc}}{\Rightarrow} x|d.$$

Como los divisores coinciden, se tiene que $mcd(b,d) = mcd(a,b)$.

Demuestra que dados $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tales que $a|c$ y $b|c$ y m.c.d.$(a, b) = 1$ entonces $a \cdot b|c$

$$mcd(a,b) = 1 \overset{\text{Bézout}}{\Rightarrow} 1 = m \cdot a + n \cdot b \text{ para ciertos } m, n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow c = m \cdot a \cdot c + n \cdot b \cdot c$$

$a|c \Rightarrow c = a \cdot k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

$b|c \Rightarrow c = b \cdot k'$ para algún $k' \in \mathbb{Z}$.

Sustituyendo

$c = m \cdot a \cdot c + n \cdot b \cdot c = m \cdot a \cdot b \cdot k' + n \cdot b \cdot a \cdot k = a \cdot b \cdot (mk' + nk)$ siendo $mk' + nk \in \mathbb{Z}$

Luego

$a \cdot b | c$

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Si p es primo y se verifica $p|a$ y $p|a^2+b^2$ demuestra:

a) $p|a^2$

b) $p|b$.

Como $p|a \underset{\uparrow \text{propiedades}}{\Rightarrow} p|a^2$, se tiene que $a^2 = p\cdot k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

Como $p|(a^2+b^2)$, se tiene que $a^2+b^2 = p\cdot k'$ para algún $k' \in \mathbb{Z}$.

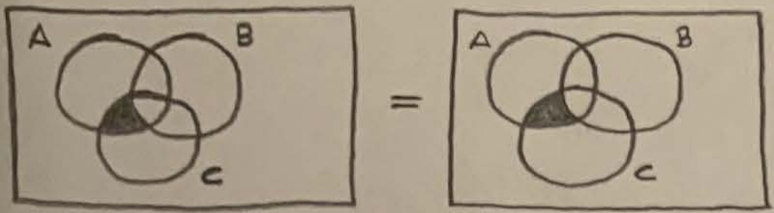
Despejando

$b^2 = p\cdot k' - a^2 = p\cdot k' - p\cdot k = p\cdot(k'-k)$ siendo $k'-k \in \mathbb{Z}$

Luego

$p|b^2 \Rightarrow p$ primo y $p|(b\cdot b) \overset{\text{propiedades}}{\Rightarrow} p|b$.

¿ $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B$? SÍ



$(A \setminus B) \cap C$ $\qquad$ $(A \cap C) \setminus B$

DIAGRAMAS DE VENN

$$
\begin{aligned}
x \in (A \setminus B) \cap C &\overset{\text{Def} \cap}{\Leftrightarrow} x \in A \setminus B \wedge x \in C \\
&\overset{\text{Def} \setminus}{\Leftrightarrow} x \in A \wedge x \notin B \wedge x \in C \\
&\overset{\text{Commut + Associat}}{\Leftrightarrow} x \in A \wedge x \in C \wedge x \notin B \\
&\overset{\text{Def} \cap}{\Leftrightarrow} x \in A \cap C \wedge x \notin B \\
&\overset{\text{Def} \setminus}{\Leftrightarrow} x \in (A \cap C) \setminus B
\end{aligned}
$$

DOBLE CONTENIDO

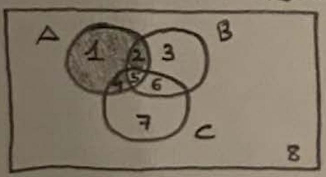
TABLAS DE PERTENENCIA

A	B	C	$A \setminus B$	$(A \setminus B) \cap C$	$A \cap C$	$(A \cap C) \setminus B$
1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0

$$
\begin{aligned}
(A \setminus B) \cap C &= (A \cap \overline{B}) \cap C && [\text{Definición de } \setminus] \\
&= (A \cap C) \cap \overline{B} && [\text{Associat + Commutat}] \\
&= (A \cap C) \setminus B && [\text{Definición de } \setminus]
\end{aligned}
$$

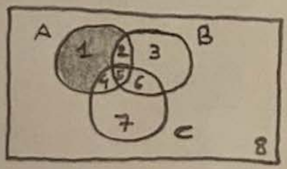
LEYES DE BOOLE

DIAGRAMAS DE VENN



$A \setminus (B \cap C)$

$\neq$



$(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

CONTRAEJEMPLO

$A = \{1, 2, 4, 5\}$

$B = \{2, 3, 5, 6\}$

$C = \{4, 5, 6, 7\}$

$A \setminus (B \cap C) = \{1, 2, 4\}$

$\neq$

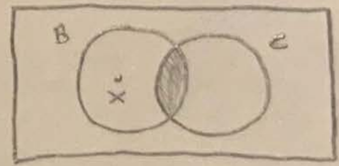
$(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = \{1\}$

¿ $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) \subset A \setminus (B \cap C)$? SÍ

CONTENIDO

$$
\begin{aligned}
x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C) &\overset{\text{Def } \cap}{\Leftrightarrow} x \in A \setminus B \wedge x \in A \setminus C \\
&\overset{\text{Def } \setminus}{\Leftrightarrow} x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C \\
&\overset{(*)}{\Rightarrow} x \in A \wedge x \notin B \cap C \\
&\overset{\text{Def } \setminus}{\Leftrightarrow} x \in A \setminus (B \cap C)
\end{aligned}
$$

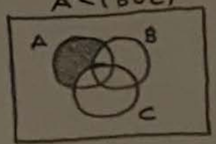
(*) $x \notin B \cap C \not\Rightarrow x \in B \wedge x \notin C$



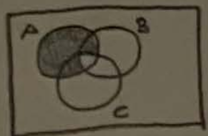
$x \notin B \cap C$ pero $x \in B$

$$
\begin{aligned}
(A \setminus B) \cap (A \setminus C) &\overset{\text{Def } \setminus}{=} (A \cap \overline{B}) \cap (A \cap \overline{C}) \\
&\overset{\text{Distributiva}}{=} A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) \\
&\overset{\text{De Morgan}}{=} A \cap (\overline{B \cup C}) \\
&\overset{\text{Def } \setminus}{=} A \setminus (B \cup C) \\
&\overset{(*)}{\subset} A \setminus (B \cap C)
\end{aligned}
$$

(*) $A \setminus (B \cup C)$



$\cap$



$A \setminus (B \cap C)$

LEYES DE BOOLE

TABLAS DE PERTENENCIA

A	B	C	$A \setminus B$	$A \setminus C$	$(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$	$B \cap C$	$A \setminus (B \cap C)$
1	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0

Demuestra que las dos funciones que se definen a continuación son biyecciones:

$g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ donde $g(n) = (-1)^{|n|} * n$

$g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ donde $g(n) = (-1)^{|n|} \cdot n$ es BIYECTIVA:

$$g(n) = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ es par} \\ -n & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

- g es inyectiva: $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{Z} : (g(n_1) = g(n_2) \Rightarrow n_1 = n_2)$

Distinguimos casos:

CASO I: n_1 y n_2 son pares

$$\left.\begin{aligned} g(n_1) &= n_1 \\ &\parallel \\ g(n_2) &= n_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow n_1 = n_2$$

CASO II: n_1 y n_2 son impares

$$\left.\begin{aligned} g(n_1) &= -n_1 \\ &\parallel \\ g(n_2) &= -n_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow -n_1 = -n_2 \Rightarrow n_1 = n_2$$

CASO III: n_1 par y n_2 impar (análogo si n_2 es par y n_1 es impar)

$$\left.\begin{aligned} g(n_1) &= n_1 \\ &\parallel \\ g(n_2) &= -n_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underbrace{n_1}_{\text{PAR}} = \underbrace{-n_2}_{\text{IMPAR}} \Rightarrow n_1 = n_2 = 0$$

- <u>g es sobreyectiva</u>: $\forall m \in \mathbb{Z} : (\exists n \in \mathbb{Z} : g(n) = m)$

Distinguimos casos:

<u>CASO I</u>: m es par

$$m = g(n) = n \Rightarrow n = m \in \mathbb{Z}$$

<u>CASO II</u>: m es impar

$$m = g(n) = -n \Rightarrow n = -m \in \mathbb{Z}$$

- <u>g es biyectiva</u>, luego admite inversa $g^{-1} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$$g^{-1}(n) = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ es par} \\ -n & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

$$g \circ g^{-1} = id_{\mathbb{Z}} : \begin{cases} \text{Si } n \text{ es par: } (g \circ g^{-1})(n) = g^{-1}(g(n)) = g^{-1}(n) = n \\ \text{Si } n \text{ es impar: } (g \circ g^{-1})(n) = g^{-1}(g(n)) = g^{-1}(\underbrace{-n}_{\text{IMPAR}}) = -(-n) = n \end{cases}$$

$$g^{-1} \circ g = id_{\mathbb{Z}} : \begin{cases} \text{Si } n \text{ es par: } (g^{-1} \circ g)(n) = g(g^{-1}(n)) = g(n) = n \\ \text{Si } n \text{ es impar: } (g^{-1} \circ g)(n) = g(g^{-1}(n)) = g(\underbrace{-n}_{\text{IMPAR}}) = -(-n) = n \end{cases}$$

En cada uno de los casos que siguen, razona si se tiene $A \leq_c B$, $B \leq_c A$, ó ambas cosas.

a) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Z}$

b) $A = \mathbb{N}$, B finito

c) $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathcal{P}(\mathbb{N})$

d) $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

e) $A = [0, 1]$, $B = [0, 2]$

f) $A = \mathbb{N} \times \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{N} \times \mathbb{R}$

a) $A = \mathbb{N}$ y $B = \mathbb{Z}$: $A \leq_c B$, $B \leq_c A$, $A \sim_c B$

b) $A = \mathbb{N}$ y B finito : $B <_c A$

c) $A = \mathbb{Q}$ y $B = \mathcal{P}(\mathbb{N})$: $A <_c B$

d) $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y $B = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$: $A \leq_c B$, $B \leq_c A$, $A \sim_c B$

e) $A = [0,1]$ y $B = [0,2]$: $A \leq_c B$, $B \leq_c A$, $A \sim_c B$

f) $A = \mathbb{N} \times \mathbb{Q}$ y $B = \mathbb{N} \times \mathbb{R}$: $A <_c B$

Sea $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid b^2 - a^2 = 3k \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}\}$ una relación binaria sobre $\mathbb{Z}$.

(a) Demuestra que R es una relación de equivalencia.

(b) ¿Es R una función? ¿Por qué?

(c) Indica qué elementos forman las clases de equivalencia [2], [3].

$R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tal que $a R b \Leftrightarrow_{def} b^2 - a^2$ es múltiplo de 3

a) R es una relación de equivalencia:

- R es reflexiva: $\forall x \in \mathbb{Z} : x R x$

  $x R x \Leftrightarrow x^2 - x^2 = 0$ es múltiplo de 3. ✓

- R es simétrica: $\forall x, y \in \mathbb{Z} : (x R y \Rightarrow y R x)$

  $x R y \Leftrightarrow y^2 - x^2 = 3k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$

  $y^2 - x^2 = 3k \Rightarrow -y^2 + x^2 = -3k \Rightarrow x^2 - y^2 = 3\underbrace{(-k)}_{k'}$ para algún $k' \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow y R x$ ✓

Facultad de Informática

Facultad de Ciencias MATEMÁTICAS

- R es transitiva: $\forall x, y, z \in \mathbb{Z} : ((xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz)$

$$
\begin{array}{rl}
 & xRy \Leftrightarrow y^2 - x^2 = 3k, \text{ con } k \in \mathbb{Z} \\
+ & yRz \Leftrightarrow z^2 - y^2 = 3k', \text{ con } k' \in \mathbb{Z} \\
\hline
 & xRz \Leftrightarrow z^2 - x^2 = 3\underbrace{(k + k')}_{k''}, \text{ con } k'' \in \mathbb{Z} \quad \checkmark
\end{array}
$$

b) R no es una función, pues $0R3$ y $0R6$.

c) $[2] = \{ y \in \mathbb{Z} \mid 2Ry \}$

$$= \{ y \in \mathbb{Z} \mid y^2 - 2^2 = 3k, \text{ para algún } k \in \mathbb{Z} \}$$

$$= \{ y \in \mathbb{Z} \mid y = \pm\sqrt{3k+4}, \text{ para algún } k \in \mathbb{Z} \}$$

$$= \{ \underbrace{1, -1}_{k=-1}, \underbrace{2, -2}_{k=0}, \underbrace{4, -4}_{k=4}, \underbrace{5, -5}_{k=7}, \underbrace{8, -8}_{k=20}, \dots \}$$

$[3] = \{ y \in \mathbb{Z} \mid 3Ry \}$

$$= \{ y \in \mathbb{Z} \mid y^2 - 3^2 = 3k, \text{ para algún } k \in \mathbb{Z} \}$$

$$= \{ y \in \mathbb{Z} \mid y = \pm\sqrt{3k+9}, \text{ para algún } k \in \mathbb{Z} \}$$

$$= \{ \underbrace{0}_{k=-3}, \underbrace{3, -3}_{k=0}, \underbrace{6, -6}_{k=9}, \underbrace{7, -7}_{k=11}, \dots \}$$

En $\mathbb{N}_1$ se definen dos relaciones S, T del siguiente modo:

$$x\,S\,y \iff x < 2y, \qquad x\,T\,y \iff 2x < y.$$

(a) Demuestra que S no es un orden estricto. ¿Qué propiedades fallan?

$S, T \subseteq \mathbb{N}_1 \times \mathbb{N}_1$ tales que $x\,S\,y \overset{def}{\iff} x < 2y$ y $x\,T\,y \overset{def}{\iff} 2x < y$

a) La relación S no es un orden estricto:

- S no es antirreflexiva: $\forall x \in \mathbb{N}_1 : x \not S x$

  $1\,S\,1 \iff 1 < 2 \cdot 1$ (contraejemplo)

- S no es transitiva: $\forall x, y, z \in \mathbb{N}_1 : ((x\,S\,y \wedge y\,S\,z) \Rightarrow x\,S\,z)$

  $$\left.\begin{array}{l} 4\,S\,3 \iff 4 < 2\cdot 3 \\ 3\,S\,2 \iff 3 < 2\cdot 2 \end{array}\right\} \text{ pero } 4 \not S 2 \text{ pues } 4 \not< 2\cdot 2 \text{ (contraejemplo)}$$

En $\mathbb{N}_1$ se definen dos relaciones S, T del siguiente modo:

$$x\,S\,y \iff x < 2y, \qquad\qquad x\,T\,y \iff 2x < y.$$

(a) Demuestra que S no es un orden estricto. ¿Qué propiedades fallan?

(b) Demuestra que T es un orden estricto.

(c) Demuestra que T no es un orden total.

b) La relación T sí es un orden estricto:

- T sí es antirreflexiva : $\forall x \in \mathbb{N}_1 : x \not{T} x$

$xTx \Leftrightarrow 2x < x \Leftrightarrow x < 0$ no es posible para $x \in \mathbb{N}_1$.

- T sí es transitiva : $\forall x, y, z \in \mathbb{N}_1 : ((xTy \wedge yTz) \Rightarrow xTz)$

$$\left.\begin{array}{l} xTy \Leftrightarrow 2x < y \\ yTz \Leftrightarrow 2y < z \end{array}\right\} \Rightarrow 2x < y \underset{\substack{\uparrow \\ y \in \mathbb{N}_1}}{<} 2y < z \Rightarrow 2x < z \Leftrightarrow xTz$$

(c) T no es un orden total porque no cumple la propiedad *conexa*, es decir, no todos los elementos están relacionados mediante T; por ejemplo, no se tiene $3\,T\,4$ (pues $2 \cdot 3 \not< 4$) ni $4\,T\,3$ (pues $2 \cdot 4 \not< 3$).

En $\mathbb{N}_1$ se definen dos relaciones S, T del siguiente modo:

$$x\,S\,y \iff x < 2y, \qquad x\,T\,y \iff 2x < y.$$

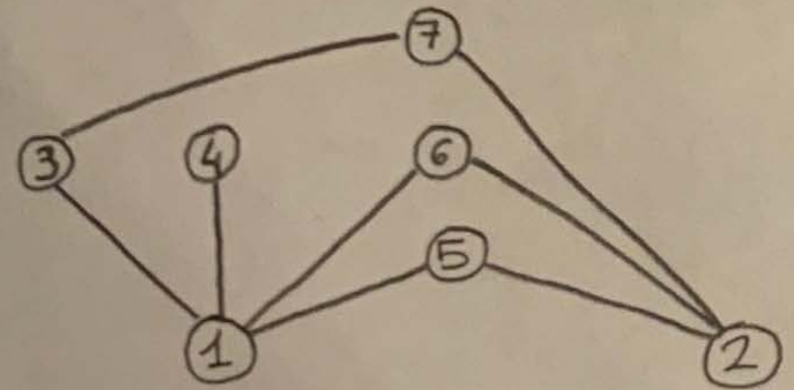
(a) Demuestra que S no es un orden estricto. ¿Qué propiedades fallan?

(b) Demuestra que T es un orden estricto.

(c) Demuestra que T no es un orden total.

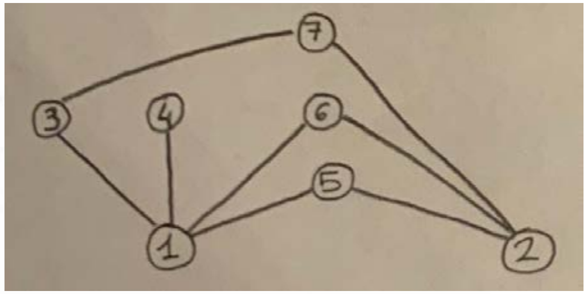
(d) Dado $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, dibuja un diagrama de Hasse que represente el orden T restringido a elementos de A.

c) Dibujamos el diagrama de Hasse para (A, T), siendo $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$:



Facultad de Informática

Facultad de Ciencias MATEMÁTICAS



En $\mathbb{N}_1$ se definen dos relaciones S, T del siguiente modo:

$$x\, S\, y \iff x < 2y, \qquad x\, T\, y \iff 2x < y.$$

(a) Demuestra que S no es un orden estricto. ¿Qué propiedades fallan?

(b) Demuestra que T es un orden estricto.

(c) Demuestra que T no es un orden total.

(d) Dado $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, dibuja un diagrama de Hasse que represente el orden T restringido a elementos de A.

(e) Determina las parejas de elementos diferentes del conjunto A que poseen supremo con respecto a T. Haz lo mismo para los ínfimos.

d) Parejas de elementos diferentes con supremo:

$\{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{1,6\}, \{1,7\}, \{2,3\}, \{2,5\}, \{2,6\}, \{2,7\}, \{3,7\}$

Parejas de elementos diferentes con ínfimo: todas salvo las siguientes parejas

$\{5,6\}, \{5,7\}, \{6,7\}$