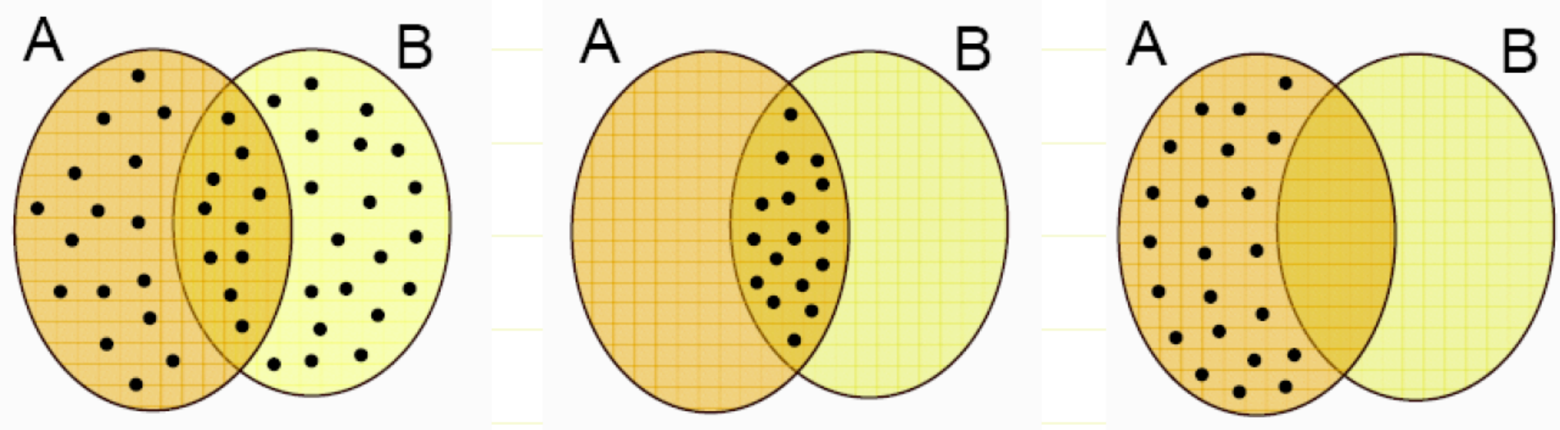
2.2 Operaciones de formación de conjuntos. Uniones, intersecciones, diferencias.

Definición: Dados dos conjuntos A y B definimos

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ó } x \in B\}$, "unión"

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$, "intersección"

$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}$, "diferencia"



$A \cup B$ $\qquad$ $A \cap B$ $\qquad$ $A \setminus B$

Ejemplo:

$A=\{2n \mid n\in\mathbb{N}\}$ $\quad B=\{3n \mid n\in\mathbb{N}\}$

$A\cup B=\{x\in\mathbb{N}:2\mid x \text{ ó } 3\mid x\}$

$A\cap B=\{x\in\mathbb{N}:2\mid x \text{ y } 3\mid x\}=\{x\in\mathbb{N}:6\mid x\}=\{6n\mid n\in\mathbb{N}\}$

$B\setminus A=\{x\in\mathbb{N}\mid x \text{ múltiplo de 3 e impar}\}$

Definición: si $A\cap B=\varnothing$ decimos que A y B son "disjuntos".

Definición: Si el conjunto X está formado por elementos que son a su vez conjuntos se dice que X es una "familia de conjuntos".

Ejemplo:

$M_k=\{n\cdot k\mid n\in\mathbb{N}\}$ = múltiplos de k

$F=\{M_k\mid k\geq 2\}=\{M_2,M_3,M_4,M_5,\ldots\}$

Definición: si F es una familia de conjuntos definimos la "unión" e "intersección" de F como:

$$\bigcup F = \{x \mid x \in C \text{ para algún } C \in F\}$$

$$\bigcap F = \{x \mid x \in C \text{ para todo } C \in F\}$$

Ejemplo: sean $M_k = \{n \cdot k \mid n \in \mathbb{N}\}$ y $F = \{M_k \mid k \geq 2\} = \{M_2, M_3, M_4, M_5, \ldots\}$.

Tenemos

$$\bigcup F = \bigcup_{k \geq 2} M_k = \mathbb{N} \setminus \{1\} \qquad \bigcap F = \bigcap_{k \geq 2} M_k = \{0\}$$

Definición: si A es un conjunto consideramos el conjunto $\wp(A)$ de todos los subconjuntos de A: $\wp(A) = \{S \mid S \subseteq A\}$

$\wp(A)$ es "partes de A" ("potencia de A").

Ejemplo: Si $A = \{1,2,3\}$ entonces

$$\wp(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

Definición: (x, y) denota el "par ordenado" formado por x e y.

x = primera componente del par

y = segunda componente del par

$(2,3) \neq (3,2)$ (importa el orden!)

Principio de igualdad:

$$(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow x = x', y = y'$$

Ejemplo: Los pares ordenados de números reales representan los puntos del plano $\mathbb{R}^2$.

Definición: dados dos conjuntos A y B definimos el "producto cartesiano" de A y B como el conjunto

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Ejemplo: si $L = \{a,b,c\}$ y $N = \{15,19,21\}$ entonces

$$L \times N = \{(a,15),(a,19),(a,21),(b,15),(b,19),(b,21),(c,15),(c,19),(c,21)\}$$

Observación:

$A \times \varnothing = \varnothing$, $\varnothing \times B = \varnothing$, $A \times A = A^2 = \{(x, y) \mid x \in A, y \in A\}$

Análogamente tenemos "triplas"o " n -tuplas ordenadas:

$$(x, y, z) = (x', y', z') \Leftrightarrow x = x', y = y', z = z'$$

$$(x_1, \ldots, x_n) = \left(x_1', \ldots, x_n'\right) \Leftrightarrow x = x_1', \ldots, x_n = x_n'$$

Definición: si $A_1, \ldots, A_n$ conjuntos se define

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}$$

Ejemplo: si $L = \{a, b, c\}$, $N = \{15, 19, 21\}$ y $G = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ tenemos

$$L \times N \times G = \{(a,15,\alpha),(a,19,\alpha),(a,21,\alpha),(b,15,\alpha),\ldots,(c,15,\gamma),(c,19,\gamma),(c,21,\gamma)\}$$

3 "huecos" en cada tripla y 3 posibilidades por hueco: $3^3 = 27$ elementos

Dados los conjuntos $A = \{1, \{2\}\}, B = \{1, 2, \{1, 2\}\}$, enumera cada uno de los conjuntos siguientes:

a) $A \cup B$ *b*) $A \cap B$ *c*) $A \setminus B$ *d*) $B \setminus A$
e) $\mathcal{P}(A)$ *f*) $B \cap \mathcal{P}(A)$ *g*) $A \times B$ *h*) $(A \times B) \cap (B \times A)$.

Solución:

a) $A \cup B = \{1, 2, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

b) $A \cap B = \{1\}$.

c) $A \setminus B = \{\{2\}\}$.

d) $B \setminus A = \{2, \{1, 2\}\}$.

e) $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{\{2\}\}, \{1, \{2\}\}\}$.

f) $B \cap \mathcal{P}(A) = \emptyset$.

g) $A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, \{1, 2\}), (\{2\}, 1), (\{2\}, 2), (\{2\}, \{1, 2\})\}$.

h) Se tiene $B \times A = \{(1, 1), (1, \{2\}), (2, 1), (2, \{2\}), (\{1, 2\}, 1), (\{1, 2\}, \{2\})\}$.
Por lo que $(A \times B) \cap (B \times A) = \{(1, 1)\}$.

Enumera los conjuntos: $\mathcal{P}(\emptyset)$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))))$.

Solución:

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}.$$

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}.$$

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) = \boldsymbol{\{}\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\boldsymbol{\}}.$$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))) = \\
&\boldsymbol{\{}\emptyset, \\
&\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \\
&\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \\
&\{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \\
&\{\{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \\
&\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \\
&\{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \\
&\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\boldsymbol{\}}.
\end{aligned}$$

Sea $A = \{\emptyset, 5\} \cap \{ \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}, 5\} \}$. Entonces:

(a) $A = \{\emptyset\}$ (b) $A = \emptyset$ (c) $A = \{\emptyset, 5\}$

Solución:

La respuesta (a) es incorrecta, ya que $\emptyset$ es un elemento del primer conjunto, pero no del segundo, luego no puede estar en la intersección.

La respuesta (c) es incorrecta, por el mismo motivo que la anterior, además 5 tampoco está en el segundo conjunto.

La respuesta (b) es la correcta, ya que ningún elemento del primer conjunto está en el segundo, por lo que no tienen elementos en común.

Si A, B, C, D son conjuntos cualesquiera, $(A \times C) \cap (B \times D)$ es igual a:

(a) $(A \cap B) \times (C \cap D)$ (b) $(A \cap C) \times (B \cap D)$ (c) $(A \cap D) \times (B \cap C)$

Solución:

Tenemos la siguiente cadena de equivalencias,

$$\begin{aligned}
(a,b) \in (A \times C) \cap (B \times D) \quad &\Longleftrightarrow \quad (a,b) \in A \times C \ \text{ y } \ (a,b) \in B \times D \\
&\Longleftrightarrow \quad a \in A \ \text{ y } \ b \in C \ \text{ y } \ a \in B \ \text{ y } \ b \in D \\
&\Longleftrightarrow \quad a \in A \cap B \ \text{ y } \ b \in C \cap D \\
&\Longleftrightarrow \quad (a,b) \in (A \cap B) \times (C \cap D).
\end{aligned}$$

Consideremos los siguientes conjuntos de números naturales: A está formado por los múltiplos de 6, B por los múltiplos de 10 y C por los múltiplos de 60. Probar o refutar cada una de las siguientes igualdades:

a) $A \cup B = C$,

b) $A \cap B = C$,

c) $A - C = B$.

Solución:

a) El conjunto $A \cup B$ está formado por todos los elementos de A y todos los de B, es decir, por los números naturales que son múltiplos de 6 ó de 10. Entre estos tenemos los que son múltiplos de 60, pero también muchos más, como por ejemplo 6 y 10 que no son múltiplos de 60. Por lo tanto, la igualdad del enunciado es falsa.

b) El conjunto $A \cap B$ consta de aquellos elementos que pertenecen a A y a B, es decir, de los números naturales que son múltiplos de 6 y también de 10. Un número natural es múltiplo de 6 y de 10 si y solo si es múltiplo de $mcm(6, 10) = 30$. Por tanto, $A \cap B$ es el conjunto de los múltiplos de 30, que incluye todos los múltiplos de 60 y más, como por ejemplo 30, 90, 150. De nuevo, la igualdad del enunciado es falsa.

c) El conjunto $A - C$ está formado por los elementos de A que no pertenecen a C, es decir, por los múltiplos de 6 que no son múltiplos de 60, como por ejemplo de 12, 18, 24. Claramente estos elementos no son múltiplos de 10, por lo que tampoco es cierta la igualdad del tercer apartado. En este caso, ni siquiera se tiene una inclusión como en los dos anteriores.

Sean A, B dos conjuntos. Demuestra que si dos cualesquiera de los enunciados siguientes son verdaderos, también lo es el tercero:

a) A y B son disjuntos $\qquad$ *b*) $A \subseteq B$ $\qquad$ *c*) $A = \emptyset$.

Solución:

$\underline{a), b) \implies c)}$ Si $x \in A$ entonces $x \in B$ porque $A \subseteq B$. Por tanto $x \in A \cap B$, por definición de $\cap$, pero $A \cap B = \emptyset$, por lo que hemos llegado a una contradicción de suponer que existe un x tal que $x \in A$, luego $A = \emptyset$.

$\underline{a), c) \implies b)}$ Por $c)$, $A = \emptyset$. Esto implica que $A \subseteq B$, ya que el conjunto vacío está contenido en cualquier conjunto.

$\underline{b), c) \implies a)}$ Por $c)$, $A = \emptyset$. Esto implica que $A \cap B = \emptyset$, ya que ningún conjunto tiene elementos en común con el vacío.

Para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos la familia de conjuntos $A_k = \{\{m \in \mathbb{N} \mid m < n\} \mid n \leq k\}$. Definimos además la familia de conjuntos $B = \{\{m \in \mathbb{N} \mid m < n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

a) Enumera A_0, A_1 y A_2 .

b) Demuestra que $A_k \subset B$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

c) Demuestra que $\emptyset \in A_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Solución:

Sea $C_n = \{m \in \mathbb{N} \,|\, m < n\}$, con $n \in \mathbb{N}$, entonces $C_0 = \emptyset$, $C_1 = \{0\}$, $C_2 = \{0, 1\} \ldots$

Usando esta notación, $A_k = \{C_n \,|\, n \leq k\}$, $B = \{C_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.

a) Por lo anterior, $A_0 = \{\{m \in \mathbb{N} \,|\, m < n\} | n \leq 0\} = \{C_0\} = \{\emptyset\}$,
$A_1 = \{\emptyset, \{0\}\} = \{C_0, C_1\}$,
$A_2 = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\} = \{C_0, C_1, C_2\}$.

b) Sea $k \in \mathbb{N}$, $A_k = \{C_0, C_1, \ldots, C_k\}$, $B = \{C_0, C_1, \ldots, C_k, C_{k+1}, \ldots\}$.
Sea $C \in A_k$, eso quiere decir que existe n, $0 \leq n \leq k$ tal que $C = C_n = \{m \in \mathbb{N} \,|\, m < n\}$. Luego $C \in B$. Sin embargo, $B \neq A_k$ porque $C_{k+1} = \{m \in \mathbb{N} | m < k + 1\} \in B$, pero $C_{k+1} \notin A_k$.

c) Sea $k \in \mathbb{N}$.
$A_k = \{C_0, C_1, \ldots, C_k\}$, como $C_0 = \{m \in \mathbb{N} | m < 0\} = \emptyset$, entonces $\emptyset \in A_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, sean $A_k = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq k\}$ y $B_k = \{n \in \mathbb{N} \mid n > k\}$. Determina:

$a)$ $\bigcup\{A_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ $\qquad$ $b)$ $\bigcap\{A_k \mid k \in \mathbb{N}\}$

$c)$ $\bigcup\{B_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ $\qquad$ $d)$ $\bigcap\{B_k \mid k \in \mathbb{N}\}$.

Solución:

Sea k $\in \mathbb{N}$, $A_k = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq k\}$, $B_k = \{n \in \mathbb{N} \mid n > k\}$.

De manera que:

$$\begin{array}{lll} A_0 = \{0\}, & A_1 = \{0,1\} & \dots \\ B_0 = \{1,2,\dots\}, & B_1 = \{2,3,\dots\} & \dots \end{array}$$

Observamos que:

$$\begin{array}{ccccccccc} A_0 & \subset & A_1 & \dots & \subset & A_k & \subset & A_{k+1} & \subset & \dots \\ B_0 & \supset & B_1 & \dots & \supset & B_k & \supset & B_{k+1} & \supset & \dots \end{array}$$

Se tiene:

$a)$ $\bigcup A_k = \{n \in \mathbb{N} |$ existe $k \in \mathbb{N}$, tal que $n \leq k\} = \mathbb{N}$.

$b)$ $\bigcap A_k = \{n \in \mathbb{N} |\ n \leq k$ para todo $k \in \mathbb{N}\} = A_0 = \{0\}$.

$c)$ $\bigcup B_k = \{n \in \mathbb{N} |$ existe $k \in \mathbb{N}$, tal que $n > k\} = B_0 = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

$d)$ $\bigcap B_k = \{n \in \mathbb{N} |\ n > k$, para todo $k \in \mathbb{N}\} = \emptyset$.

Definiciones de operaciones derivadas:

Se pueden definir a partir de otras operaciones sobre conjuntos ya definidas.

Def:

Dados dos conjuntos A y B, su **diferencia simétrica** , $A \oplus B$, *es el conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen a B y los de B que no pertenecen a A.*

$$A \oplus B = \{x / ((x \in A) \land (x \notin B)) \lor ((x \in B) \land (x \notin A))\}$$

Como operación derivada:

$$A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Algunas propiedades de $\oplus$

Prop.: Dados dos conjuntos cualesquiera A, B se tiene:

1. Conmutatividad $A \oplus B = B \oplus A$
2. $A \oplus (A \oplus A) = A$
3. Asociatividad $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$
4. $A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$