Matemática Discreta y Lógica Matemática
Hoja 5 de ejercicios.
Facultad de Informática.

1. Considera el conjunto $A = \{a, b, c\}$ y las relaciones binarias sobre A dadas por:

$$R = \{(a, b),\ (b, c),\ (c, a)\} \qquad\qquad S = \{(a, c),\ (b, a)\}$$

   a) Calcula $R \circ S$, $S \circ R$, $R \circ R$ y $S \circ S$.

   b) Comprueba que $R \circ (S \circ R) = (R \circ S) \circ R$ y que $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.

2. Sean R y S dos relaciones binarias.

   a) Demuestra que $dom(R^{-1}) = ran(R)$, $ran(R^{-1}) = dom(R)$.

   b) Demuestra que $dom(R \circ S) \subseteq dom(R)$, $ran(R \circ S) \subseteq ran(S)$.

   c) Busca un ejemplo de R, S tales que las inclusiones de *b*) sean estrictas.

3. En los apartados que siguen, R, S, T, etc. representan relaciones binarias. Demuestra:

   a) $R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$

   b) $(R \cup S) \circ T = (R \circ T) \cup (S \circ T)$

   c) $R \subseteq S \Longrightarrow R^{-1} \subseteq S^{-1}$

   d) $R \subseteq R' \Longrightarrow R \circ S \subseteq R' \circ S$

   e) $S \subseteq S' \Longrightarrow R \circ S \subseteq R \circ S'$

4. Dadas dos funciones $f : A \to B$ y $g : B \to C$, siempre se verifica que $ran(f \circ g) \subseteq ran(g)$. Para cada uno de los dos apartados siguientes, encuentra una definición diferente de f, g de manera que se cumpla:

   a) $ran(f \circ g) \subset ran(g)$ *b*) $ran(f \circ g) = ran(g)$

5. Dados n conjuntos $A_1, \cdots, A_i, \cdots, A_n$ se definen n *funciones de proyección* $pr_i : A_1 \times \cdots \times A_i \times \cdots \times A_n \to A_i$ como: $pr_i(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n) =_{def} x_i$

   a) Demuestra que si los n conjuntos A_i son no vacíos, entonces las proyecciones pr_i son aplicaciones suprayectivas.

   b) Demuestra que en general las proyecciones no son aplicaciones inyectivas. Encuentra una condición suficiente para que pr_i sea inyectiva.

6. Demuestra que las dos funciones que se definen a continuación son biyecciones:

   a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ donde
   $$f(n) = \begin{cases} \text{n + 1} & \text{si n es par} \\ \text{n - 1} & \text{si n es impar} \end{cases}$$

   b) $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ donde $g(n) = (-1)^{|n|} * n$

7. Sea $f : A \to B$. Demuestra que las dos condiciones siguientes son equivalentes:

   a) f es inyectiva.

   b) Para cualquier par de funciones $g_1, g_2 : C \to A$: $g_1 \circ f = g_2 \circ f \Rightarrow g_1 = g_2$

8. Demuestra que si $f : A \to B$ es biyectiva, entonces $f^{-1} : A \to B$ también es biyectiva.

9. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$. Demuestra que:

   a) Si f y g son inyectivas, entonces $f \circ g$ también lo es.

   b) Si f y g son suprayectivas, entonces $f \circ g$ también lo es.

   c) Si f y g son biyectivas, entonces $f \circ g$ también lo es.

10. Sea X un conjunto fijado. Para cada subconjunto $A \subseteq X$, la *función característica* de A se define como la función $\chi_A : X \to \{0,1\}$ definida por:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A \end{cases}$$

Para $X = \{a, b, c\}$, determina todos los subconjuntos de X y sus funciones características.

11. Sea X un conjunto dado. Diremos que una aplicación $M : X \to \mathbb{N}$ es un *multiconjunto* formado por elementos de X, donde cada $x \in X$ tiene en M la *multiplicidad* $M(x)$.

    a) Usando la idea de función característica, discute en qué sentido puede decirse que los subconjuntos de X son un caso particular de multiconjunto.

    b) Para $X = \{a, b, c\}$, construye todos los multiconjuntos de elementos de X, con la restricción de que la multiplicidad de cada elemento sea menor o igual que 2.

    c) Discute posibles definiciones de las operaciones de unión, intersección y diferencia entre multiconjuntos de elementos de X, explicando en qué intuiciones te basas.

12. Sea $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b, c\}$. Definimos una relación $R = \{(1, a), (2, b), (1, c)\}$. Contesta razonadamente:

    a) ¿Es R una función? Razona tu respuesta. Si la respuesta es afirmativa indica si es inyectiva, si es sobreyectiva y si es biyectiva.

    b) Calcula R^{-1}. ¿Es R^{-1} una función? Razona tu respuesta. Si la respuesta es afirmativa indica si es inyectiva, si es sobreyectiva y si es biyectiva.

13. Sea $A = \{a, b, c\}$ y sea A^* el conjunto de todas las palabras que se pueden escribir con letras de A. Definimos la función $L : A^* \to \mathbb{N}$ como $L(x)$= el número de letras que tiene la palabra x, es decir, la longitud o tamaño de x. La palabra vacía la escribimos ϵ.

    a) ¿La función L es inyectiva, suprayectiva, biyectiva?

    b) Calcula el conjunto $L^{-1}(3)$, ¿cuántos elementos tiene?

    c) Demuestra que para todo $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $L^{-1}(n)$ es finito.

    d) Demuestra que para todo $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$, $L^{-1}(n) \cap L^{-1}(m) = \emptyset$.

14. Sean A, B, C conjuntos finitos. Deduce una fórmula para calcular el cardinal $\mid A \cup B \cup C \mid$ en función de los tres cardinales $\mid A \mid$, $\mid B \mid$ y $\mid C \mid$.

15. Demuestra que <u>si</u> $A \sim_c B$ y $A \cap B = \emptyset$, <u>entonces</u> $A \cup B \sim_c A \times \{0, 1\}$.

16. Demuestra que se verifican las dos propiedades siguientes:

    a) <u>Si</u> $A \leq_c B$ <u>entonces</u> $\mathcal{P}(A) \leq_c \mathcal{P}(B)$.

    b) <u>Si</u> $A \sim_c B$ <u>entonces</u> $\mathcal{P}(A) \sim_c \mathcal{P}(B)$.

17. Sean $A \subseteq B \subseteq C$. Demuestra que <u>si</u> $A \sim_c C$, <u>entonces</u> $A \sim_c B$ y $B \sim_c C$.
(*Idea*: Usa el teorema de Schröeder y Bernstein: $A \leq_c B,\ B \leq_c A \implies A \sim_c B$).

18. Demuestra que <u>si</u> A es infinito y B es finito <u>entonces</u> $A \cup B \sim_c A$.
(Idea: Usa que $\mathbb{N} \leq_c A$, por ser A un conjunto infinito).

19. Demuestra que <u>si</u> $f : A \to A$ es una función inyectiva y no suprayectiva, <u>entonces</u> A es infinito.
(*Idea*: Considera los elementos a, $f(a)$, $f(f(a))$, etc., siendo $a \in A \setminus ran(f)$).

20. *a*) Demuestra que <u>si</u> $\mathbb{A}$ es cualquier alfabeto finito no vacío, <u>entonces</u> el conjunto $\mathbb{A}^*$ formado por todas las palabras sobre $\mathbb{A}$ es infinito numerable.

    b) Demuestra que <u>si</u> $\mathbb{A}$ es cualquier alfabeto infinito numerable, <u>entonces</u> el conjunto $\mathbb{A}^*$ formado por todas las palabras sobre $\mathbb{A}$ es infinito numerable.

21. Demuestra que el conjunto formado por todos los programas sintácticamente correctos que se pueden escribir en el lenguaje *Pascal* es infinito numerable.

22. Demuestra que el conjunto formado por todos los polinomios con coeficientes enteros y una indeterminada x es infinito numerable.

23. Demuestra que los siguientes conjuntos son numerables. Indica si alguno de ellos es finito.

$$\begin{array}{lcll}\mathcal{F}_n & = & \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid \mid X \mid = n\} & \text{(siendo } n \in \mathbb{N}\text{, fijo)} \\ \mathcal{F} & = & \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid X \text{ es finito}\} & \\ \mathcal{CF} & = & \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid \mathbb{N} \setminus X \text{ es finito}\} & \end{array}$$

24. Usando la técnica de diagonalización de Cantor, demuestra:

    a) $(\mathbb{N} \to \mathbb{N})$ no es numerable.

    b) $(\mathbb{N} \to A)$ no es numerable, siempre que A tenga dos o más elementos.

25. ¿Existe un conjunto X tal que $\mathcal{P}(X)$ sea infinito numerable?. Razona tu respuesta.

26. En cada uno de los casos que siguen, razona si se tiene $A \leq_c B$, $B \leq_c A$, ó ambas cosas.

    a) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Z}$ *b*) $A = \mathbb{N}$, B finito *c*) $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathcal{P}(\mathbb{N})$

    d) $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ *e*) $A = [0, 1]$, $B = [0, 2]$ *f*) $A = \mathbb{N} \times \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{N} \times \mathbb{R}$

Ejercicios Opcionales

27. Dada una relación binaria R sobre un conjunto A, las *potencias* de R se definen recursivamente como sigue:

$$R^0 = id_A \qquad\qquad R^{n+1} = R^n \circ R \ (n \geq 0)$$

Considera la relación S del ejercicio 1 y calcula: S^0, S^1, S^2, S^3, $\bigcup_{n \leq 3} S^n$.

28. La *imagen de un conjunto* S por medio de una función f se define como: $f(S) =_{def} \{f(x) \mid x \in dom(f) \cap S\}$. Demuestra que para f, S, T cualesquiera se verifica que:

    a) $f(S \cup T) = f(S) \cup f(T)$

    b) $f(S \cap T) \subseteq f(S) \cap f(T)$

    c) $f(S \setminus T) \supseteq f(S) \setminus f(T)$

    Demuestra además mediante contraejemplos que para (b) y (c) no vale siempre la igualdad.

29. La *imagen inversa de un conjunto* S por medio de una función f se define como: $f^{-1}(S) =_{def} \{x \in dom(f) \mid f(x) \in S\}$. Demuestra que para f, S, T cualesquiera se verifica que:

    a) $f^{-1}(S \cup T) = f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T)$

    b) $f^{-1}(S \cap T) = f^{-1}(S) \cap f^{-1}(T)$

    c) $f^{-1}(S \setminus T) = f^{-1}(S) \setminus f^{-1}(T)$

30. Sea $f : A \to B$. Demuestra que f es biyectiva si y solo si existe otra función $g : B \to A$ tal que $f \circ g = id_A$ y $g \circ f = id_B$. Además, en caso de existir esta g, se tiene que $g = f^{-1}$.

31. Dadas dos funciones f y g, se dice que g es una función *inversa por la derecha* de f si se cumple que $f \circ g = id_{dom(f)}$ y se dice que g es una función *inversa por la izquierda* de f si se cumple que $g \circ f = id_{ran(f)}$.

    a) Demuestra que cualquier f tiene alguna función inversa por la izquierda.

    b) Define una función f que tenga varias funciones inversas por la izquierda diferentes y no tenga ninguna función inversa por la derecha.

32. Sean $A, B \subseteq X$ y $\backslash A = X \setminus A$, siendo X un conjunto fijado de antemano. Demuestra que las funciones características verifican las propiedades siguientes:

    a) $\chi_{A \cup B}(x) = max(\chi_A(x), \chi_B(x)) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x) * \chi_B(x)$

    b) $\chi_{A \cap B}(x) = min(\chi_A(x), \chi_B(x)) = \chi_A(x) * \chi_B(x)$

    c) $\chi_{\backslash A}(x) = 1 - \chi_A(x)$

33. Demuestra que la aplicación $\chi : \mathcal{P}(X) \to (X \to \{0,1\})$ que hace corresponder a cada $A \in \mathcal{P}(X)$ su función característica χ_A, es una biyección.

34. Sean $f, g : A - \to B$ dos funciones parciales. Se dice que g es una *extensión* de f, y se escribe $f \subseteq g$, si al considerar a f y g como conjuntos de pares ordenados resulta que f es un subconjunto de g. Se dice que f y g son *compatibles* si existe alguna $h : A - \to B$ que sea una extensión común de f y de g (es decir, que $f \subseteq h$ y $g \subseteq h$).

    a) Demuestra que $f \subseteq g$ si y solo si $g \upharpoonright dom(f) = f$.

    b) Demuestra que f y g son compatibles si y solo si $f \cup g$ es una función, entendiendo que $f \cup g$ es la unión de f y g como conjuntos de pares ordenados.

35. Sea $\mathbb{A}$ un alfabeto. Dadas dos palabras $u = u_0 u_1 \cdots u_{n-1} \in \mathbb{A}^*$, $v = v_0 v_1 \cdots v_{m-1} \in \mathbb{A}^*$, definimos:

    - La *concatenación* o producto de u y v como: $u \cdot v =_{def} u_0 u_1 \cdots u_{n-1} v_0 v_1 \cdots v_{m-1}$
    - La *imagen especular* o inversa de u como: $u^R =_{def} u = u_{n-1} u_{n-2} \cdots u_1 u_0$

    Explica de modo más preciso como serían las definiciones de $u \cdot v$ y de u^R, teniendo en cuenta que las palabras son sucesiones finitas de símbolos de $\mathbb{A}$, y razona por qué son ciertas las propiedades siguientes:

    (a) $u \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot u = u$ (ε es neutro) (b) $(u \cdot v) \cdot w = u \cdot (v \cdot w)$ ($\cdot$ es asociativa) (c) $\varepsilon^R = \varepsilon$
    (d) $(u^R)^R = u$ (e) $(u \cdot v)^R = v^R \cdot u^R$

36. Dados los alfabetos $\mathbb{A} = \{a, b, c\}$, $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ considera la función inyectiva $\alpha : \mathbb{A} \to \mathbb{B}^+$ definida como: $\alpha(a) = 100$, $\alpha(b) = 101$, $\alpha(c) = 110$ y utiliza α para definir otra función *cod* : $\mathbb{A}^* \to \mathbb{B}^*$, poniendo: $cod(u_0 \cdots u_i \cdots u_{n-1}) =_{def} \alpha(u_0)\alpha(u_1) \cdots \alpha(u_{n-1})$. Demuestra que *cod* es inyectiva. Observa que *cod* es una función de *codificación*; a $cod(u) \in \mathbb{B}^*$ se le llama *código* de u. La función inversa $cod^{-1} = decod$ se llama función de *decodificación*. Explica cómo reconocer si $v \in \mathbb{B}^*$ pertenece o no al dominio de *decod* y cómo se puede calcular $decod(v)$.

37. Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ los alfabetos del ejercicio anterior. Encuentra una función inyectiva $\alpha : \mathbb{A} \to \mathbb{B}^+$ tal que al definir a partir de ella la función $cod : \mathbb{A}^* \to \mathbb{B}^*$ del mismo modo que en el ejercicio anterior, no se obtenga una función inyectiva. Razona por qué una función α de este tipo no sirve para definir un código.

38. Considera una función $\alpha : [0.,26] \to [0.,26]$ definida como $\alpha(n) = (a + bn)$ **mod** 27, siendo $a, b \in [0.,27]$ dos números fijos. Demuestra que:

    a) Una α definida de esta manera no siempre es inyectiva.

    b) Si se eligen $0 < a < 27$, $b = 1$, entonces α es biyectiva, y se puede utilizar para definir un código, tal como se ha visto en el ejercicio precedente.

39. Sea $\mathcal{F} = \{\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{N} \mid X\ finito\}$. Sea $f : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(A) =$ suma de los elementos pares de A.

    a) ¿Es f inyectiva? ¿Es f suprayectiva? ¿Es f biyectiva?

    b) Calcula el conjunto $f^{-1}(6)$. ¿Cuántos elementos tiene?

40. Sea $\mathcal{F} = \{\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{N} \mid X\ finito\}$. Sea $f : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida como $f(A) = max(A) + min(A)$.

    a) ¿Es f suprayectiva? ¿Es f inyectiva ? ¿Es f biyectiva?

    b) Calcula el conjunto $f^{-1}(5)$ ¿Cuántos elementos tiene?

    c) Para todo $n \in \mathbb{N}$, ¿Qué tamaño tiene el conjunto $f^{-1}(n)$? ¿Por qué?

41. Sea $\mathcal{F} = \{\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{N} \mid X\ finito\}$. Sea $F : \mathcal{F} \to \mathbb{N}$ definida por $F(A) =$ suma de los elementos impares de A.

    a) Calcula $F(A_n)$, siendo $n \geq 1$ y $A_n = \{0, 1, 2, \ldots, 2 * n - 1\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 2 * n\}$.

    b) Demuestra que el rango de F es $\mathbb{N} \setminus \{2\}$.

    c) Demuestra que F no es inyectiva.

    d) Calcula el conjunto $F^{-1}(8)$ ¿cuántos elementos tiene?