1.2 Axiomas de Peano. Principio de Inducción

$$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,\ldots\}$$

$\mathbb{N}$ está generado por 0 y la función sucesor

Podemos caracterizar $\mathbb{N}$ por los siguientes axiomas (propiedades básicas)

- **Axiomas de Peano (1858-1932)**

P1: $s(n) = s(m) \Rightarrow n = m$

(dos números naturales distintos tienen sucesores distintos)

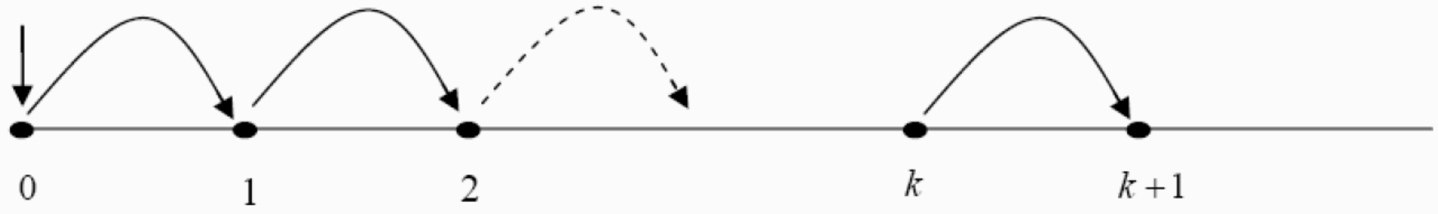
P2: Para todo número natural n se verifica que $s(n) \neq 0$

P3: Para toda propiedad P tenemos

$$\left.\begin{array}{l} P(0) \\ P(k) \underset{\forall k \in \mathbb{N}}{\Rightarrow} P(k+1) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad P(n) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

Si una propiedad la cumple el 0 y cuando la cumple un número siempre la cumple su siguiente entonces la cumplen todos los números naturales.

Si el 0 tiene una propiedad que se transmite de cualquier número a su sucesor, entonces todos los números naturales tienen esa propiedad.



P3 es el PRINCIPIO DE INDUCCIÓN

$$\left.\begin{array}{l} P(0) \\ P(k) \underset{\forall k \in \mathbb{N}}{\Rightarrow} P(k+1) \end{array}\right\} \Rightarrow P(n) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

$P(0)$: base de la inducción

$P(k)$: hipótesis de inducción

$P(k) \Rightarrow P(k+1) \quad \forall k \in \mathbb{N}$: paso inductivo

Ejemplo 1: La ecuación $2+4+\cdots+2n = n(n+1)$ es válida para todo natural n.

Ejemplo 4: Para todo número natural $n \geq 0$ se verifica que $\left(3^{2n} + 4^{n+1}\right)$ es múltiplo de 5.

Si "empezamos en m" obtenemos:

$$\mathbb{Z}_m = \{m, s(m), s(s(m)), \ldots\} = \{m, m+1, m+2, \ldots\}$$

$\mathbb{Z}_m$ está generado por m y la función sucesor.

Ejemplo: $\mathbb{Z}_2 = \{2,3,4,5,\ldots\}$, $\mathbb{Z}_{-5} = \{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$

Tenemos Inducción para $\mathbb{Z}_m$.

$$\left.\begin{array}{l} P(m) \\ P(k) \underset{\forall k \in \mathbb{Z}_m}{\Longrightarrow} P(k+1) \end{array}\right\} \Rightarrow P(n) \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}_m$$

Ejemplo: Para todo $n \geq 4$ se verifica la desigualdad $2^n < n!$.

Base: ¿$P(4)$? ¿Se verifica que $2^4 < 4!$?

$2^4 = 16$ y $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ ✓

Paso inductivo: ¿Se verifica que $P(k)$ implica que $P(k+1)$ cuando $k \geq 4$?

Hipótesis de Inducción: $2^k < k!$

¿Se verifica $2^{k+1} < (k+1)!$?

$$2^{k+1} = 2^k \cdot 2 \overset{\text{HI}}{<} k! \cdot 2 < k! \cdot (k+1) = (k+1)! \ \Rightarrow 2^{k+1} < (k+1)! \ \checkmark$$

Así $2^n < n! \ \ \forall n \in \mathbb{Z}_4$

Principio de Inducción completa $\mathbb{N}$

$$\left.\begin{array}{l} P(0) \\ \{P(k)\}_{0 \le k \le r} \underset{\forall r \in \mathbb{N}}{\Rightarrow} P(r+1) \end{array}\right\} \Rightarrow P(n) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

Si una propiedad la cumple el 0 y cuando la cumplen todos los números hasta r siempre la cumple $r+1$ entonces la cumplen todos los números naturales.

El paso inductivo requiere que probemos la propiedad P para $r+1$ usando que la propiedad la verifican todos los números menores o iguales que r.

Y lo mismo puede hacerse empezando en cualquier entero m.

$$\left.\begin{array}{l} P(m) \\ \{P(k)\}_{m\leq k\leq r} \underset{\forall r\in\mathbb{N}}{\Rightarrow} P(r+1) \end{array}\right\} \Rightarrow P(n) \text{ para todo } n\in\mathbb{Z}_m$$

Ejemplo 6: Todo número natural mayor o igual que 2 admite una descomposición en producto de números primos.

Definimos la propiedad P como $P(n): n$ admite descomposición en producto de números primos.

Probamos que $P(n)$ se verifica para todo $n\geq 2$ por inducción completa sobre $\mathbb{Z}_2$

Base: ¿$P(2)$? 2 es primo ✓

Hipótesis de Inducción: $\{P(k)\}_{2\leq k\leq r}$: k tiene descomposición como producto de números primos para todo $2\leq k\leq r$.

Paso inductivo: ¿Se deduce de la HI que $P(r+1)$? ¿Tiene $r+1$ descomposión como producto de números primos?

Dos casos.

Caso 1: $r+1$ primo. nada que demostrar

Caso 2: $r+1$ no primo.

Entonces $r+1=\alpha\cdot\beta$ con $\alpha\leq r$ y $\beta\leq r$.

Por HI tenemos que $\alpha=p_1\cdots p_r$ y $\beta=q_1\cdots q_s$ con $p_1,\ldots,p_r,q_1,\ldots,q_s$ primos.

Entonces $r+1=(p_1\cdots p_r)\cdot(q_1\cdots q_s)$ producto de números primos.

Inducción completa con varios casos base en $\mathbb{Z}_m$.

$$\left.\begin{array}{l} P(m),P(m+1),\ldots,P(l) \\ \{P(k)\}_{m\leq k\leq r} \underset{\forall r\in\mathbb{N}}{\Rightarrow} P(r+1) \end{array}\right\} \Rightarrow P(n) \text{ para todo } n\in\mathbb{Z}_m$$

Ejemplo: ejercicios tema siguiente sobre definiciones recursivas.

Inducción estructural para $\mathbb{Z}$.

$$\left.\begin{array}{l} P(0) \\ P(k) \underset{\forall k\in\mathbb{Z}}{\Rightarrow} P(s(k)) \\ P(k) \underset{\forall k\in\mathbb{Z}}{\Rightarrow} P(p(k)) \end{array}\right\} \Rightarrow P(n) \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}$$