Matemática Discreta y Lógica Matemática

Hoja 6 de ejercicios.

Facultad de Informática.

1. Todas las relaciones que siguen se suponen definidas sobre el conjunto $\mathbb{N}^+ =_{def} \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Estudia en cada caso qué propiedades cumple la relación, considerando reflexividad, simetría y transitividad.

   a) $xRy \Longleftrightarrow_{def} x \mid y$.

   b) $xRy \Longleftrightarrow_{def} x \mid y,\ x \neq y$.

   c) $xRy \Longleftrightarrow_{def} x \neq y$.

   d) $xRy \Longleftrightarrow_{def}$ al simplificar x/y e y/x, resultan dos fracciones con numeradores y denominadores impares.

   e) $xRy \Longleftrightarrow_{def} x < y^2$.

   f) $xRy \Longleftrightarrow_{def}$ existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $2^n < x < 2^{n+1}$, $2^n < y < 2^{n+1}$.

   g) $xRy \Longleftrightarrow_{def} y - x + 2$ es un número primo.

   h) $xRy \Longleftrightarrow_{def} \mid y - x \mid +2$ es un número primo.

2. Explica por qué las siguientes relaciones binarias, definidas sobre el conjunto de los seres humanos, no son de equivalencia. Identifica cuáles de las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva se verifican en cada caso.

   a) $xRy \Longleftrightarrow_{def}$ x e y tienen un progenitor común.

   b) $xRy \Longleftrightarrow_{def}$ x e y se conocen.

   c) $xRy \Longleftrightarrow_{def}$ x e y hablan un mismo lenguaje.

3. Enumera el conjunto formado por todas las relaciones binarias sobre el conjunto $\{0, 1\}$. Determina cuáles son reflexivas, cuáles son simétricas y cuáles son transitivas.

4. Una relación $R \subseteq \mathbb{A} \times \mathbb{A}$ se llama *total* si $dom(R) = A$. Muestra por medio de un ejemplo que una relación simétrica y transitiva puede no ser reflexiva. A continuación, demuestra formalmente que <u>si</u> una relación es simétrica, transitiva y total <u>entonces</u> siempre es reflexiva.

5. Estudia en cada caso si la relación dada es o no un orden sobre el conjunto dado.

   a) $R \subseteq \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$, definida por $(x, y)\ R\ (x', y') \Leftrightarrow_{def} x \leq x',\ y \geq y'$

   b) $R \subseteq \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$, definida por $(x, y)\ R\ (x', y') \Leftrightarrow_{def} x \leq x',\ y \neq y'$

   c) $R \subseteq \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$, definida por $(x, y)\ R\ (x', y') \Leftrightarrow_{def} x < x'$ o $(x = x',\ y \leq y')$

   d) $R \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$, definida por $X\ R\ Y \Leftrightarrow_{def}$ (X es finito y $X \subseteq Y$) o (X es infinito y $X \supseteq Y$)

6. Considera la relación binaria R sobre $(\mathbb{N} \to \mathbb{N})$ definida por la condición

$$f\ R\ g \Leftrightarrow_{def} \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) > g(n)\} \text{ es finito}$$

   Estudia si R es una relación de orden. En caso afirmativo, demuéstralo; en caso contrario, encuentra un contraejemplo.

7. Sea una función $f : A \to \mathbb{R}$, donde A es un conjunto cualquiera. Demuestra que la relación $R \subseteq A \times A$ definida por la condición $x\ R\ y \Leftrightarrow_{def} f(x) \leq f(y)$ es un orden si y sólo si f es inyectiva.

8. Construye relaciones binarias R_1, R_2, R_3, R_4 sobre el conjunto $\{0, 1, 2\}$ que verifiquen las propiedades siguientes:

   a) R_1 es simétrica y antisimétrica.

   b) R_2 es simétrica, pero no antisimétrica.

c) R_3 no es simétrica, pero sí antisimétrica.

d) R_4 no es ni simétrica ni antisimétrica.

9. Demuestra que el orden de inclusión en $\mathcal{P}(A)$ solo es lineal cuando A es vacío o unitario.

10. Dibuja diagramas de Hasse que representen los siguientes conjuntos ordenados:

a) $\{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 25\}$ ordenado por la relación de divisibilidad.

b) $\{X \in \mathcal{P}(\mathbf{5}) \mid |X| \text{ es par}\}$ ordenado por la relación de inclusión.

c) $(\mathbf{2}- \to \mathbf{2})$ ordenado por la relación de inclusión.

d) $(\mathbf{3}- \to \mathbf{2})$ ordenado por la relación de inclusión.

Nota: $\mathbf{n}$ representa el conjunto formado por los números naturales menores que n.

11. Estudia los elementos extremos y extremales en los siguientes conjuntos de números, ordenados por la relación de divisibilidad.

a) $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

b) $\{2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

c) $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$

d) $\{2, 3, 4, 6, 8, 12\}$

12. Estudia los elementos extremos y extremales en las siguientes familias de conjuntos, ordenadas por la relación de inclusión.

a) $\{X \in \mathcal{P}(\mathbf{3}) \mid X \neq \emptyset\}$

b) $\mathcal{F} =_{def} \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid X \neq \emptyset,\ X \text{ finito}\}$

c) $\mathcal{CF} =_{def} \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid X \neq \mathbb{N},\ \mathbb{N} \setminus X \text{ finito}\}$

13. Define un orden lineal $\sqsubseteq$ sobre $\mathbb{Z}$ de tal manera que $(\mathbb{Z}, \sqsubseteq)$ y $(\mathbb{Z}, \leq)$ no sean isomorfos.

14. En $\mathbb{N}^+$ se definen dos relaciones S y T del siguiente modo:

$$x\ S\ y \Leftrightarrow_{def} x < 2 * y \qquad x\ T\ y \Leftrightarrow_{def} 2 * x < y$$

a) Demuestra que S no es un orden estricto. ¿Qué propiedades fallan?

b) Demuestra que T es un orden estricto.

c) Demuestra que T no es un orden total.

d) Dado $A =_{def} \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, dibuja un diagrama de Hasse que represente el orden T restringido a elementos de A.

e) Determina las parejas de elementos diferentes del conjunto A que poseen supremo con respecto a T. Haz lo mismo para los ínfimos.

15. Sea $A = \{0, 1, 2\} \times \{2, 5, 8\}$. Sea $R \subseteq (A \times A)$ definida por $(a, b)R(c, d)$ sii $(a + b)|(c + d)$. Considera el conjunto $B = \{n \in \mathbb{N} \mid 2 \leq n \leq 12\}$. Sea $S \subseteq (B \times B)$ definida por aSb sii $(a \mid b)$ o bien (a es primo y $a < b$).

a) Demuestra que las dos relaciones son ordenes parciales.

b) Dibuja para cada relación su diagrama de Hasse.

c) ¿Tienen elementos minimales y maximales? ¿Máximo y mínimo?

16. Sobre el conjunto $A = \mathbb{N}$ x $\mathbb{N}$ formado por todas las parejas de números naturales, definimos una relación $\sqsubseteq$ tal que $(x, y) \sqsubseteq (x', y')$ sii $x \leq x' \ \wedge\ y \geq y'$.

a) Demuestra que $\sqsubseteq$ es una *relación de orden*.

b) ¿Es $\sqsubseteq$ un *orden total*? Razona tu respuesta.

c) Demuestra que ($A, \sqsubseteq$) es un *retículo*.

17. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{N}^+$ son retículo con el orden definido por $x \sqsubseteq y \Leftrightarrow_{def} x|y$? ¿Por qué?.

    a) $\{5, 10, 15, 30\}$
    b) $\{1, 3, 7, 15\}$
    c) $\{2, 3, 5, 6, 10, 30\}$
    d) $\{1, 2, 3, 4, 6, 9\}$
    e) $\{1, 3, 7, 15, 21, 105\}$
    f) $\{2, 3, 5, 6, 10, 21, 30\}$

18. Razona en cada uno de los casos siguientes si se tiene un retículo, un semiretículo inferior, un semiretículo superior, o ninguna de las tres cosas, tomando como orden la relación de inclusión.

    a) $\{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid A \text{ es finito}\}$
    b) $\{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid A \text{ es infinito}\}$
    c) $\{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid |A| \text{ es par}\}$
    d) $\{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid \mathbb{N} \setminus A \text{ es finito}\}$
    e) $\{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid |A| \leq 10\}$
    f) $\{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid |A| > 10\}$

19. Sean $\mathcal{F}$, $\mathcal{CF}$ las dos familias de conjuntos definidas en el ejercicio 12.

    a) Construye un isomorfismo de orden $f : (\mathcal{F}, \subseteq) \to (\mathcal{CF}, \supseteq)$
    b) Demuestra que $(\mathcal{F}, \subseteq)$ y $(\mathcal{CF}, \subseteq)$ no son isomorfos como conjuntos ordenados.

20. Un orden lineal $\leq$ sobre un conjunto A se llama *denso* si el orden estricto $<$ asociado a $\leq$ satisface la siguiente condición: para todo $x, y \in A$ tales que $x < y$, existe $z \in A$ tal que $x < z < y$.

    a) Demuestra que si dos conjuntos ordenados linealmente son isomorfos y uno de ellos es denso, también lo es el otro.
    b) Demuestra que $(\mathbb{Z}, \leq)$ y $(\mathbb{Q}, \leq)$ no son isomorfos.