Matemática Discreta y Lógica Matemática
Hoja 3 de ejercicios.
Facultad de Informática.

1. Demuestra que si $c \mid a$ y $c \mid b$, entonces $c \mid (m * a + n * b)$, cualquiera que sean $m, n \in \mathbb{Z}$.
2. Observa que si dos enteros a, b verifican $ab = 1$, entonces o bien $a = b = 1$ o bien $a = b = -1$. Deduce de esto que si m, n son enteros tales que $m \mid n$ y $n \mid m$, entonces $m = n$ ó $m = -n$.
3. Demuestra que si existen enteros x, y tales que $ax + by = 1$ entonces $mcd(a, b) = 1$.
4. Sean $a, b > 0$ y $d = mcd(a, b)$. Demuestra que la ecuación $ax + by = c$ (donde c es una constante entera) tiene solución entera para x, y si y sólo si $d \mid c$.
5. Probar que $c \mid ab$ implica $c \mid (mcd(a, c) * mcd(b, c))$.
6. Demuestra que si $n \geq 2$ y n no es primo, entonces debe existir un primo p tal que $p \mid n$ y $p^2 \leq n$.
7. Usa el resultado del ejercicio 6 para demostrar que si 467 no fuese primo, tendría un divisor primo $p \leq 19$. Deduce que 467 es primo.

Ejercicios Opcionales

8. Usa el principio de inducción para demostrar que para todo n natural
   a) $n^2 + 3n$ es múltiplo de 2
   b) $n^3 + 3n^2 + 2n$ es múltiplo de 6
9. Calcula el mcd de 1776 y 1492 y exprésalo en la forma $1776m + 1492n$, con $m, n \in \mathbb{Z}$.
10. Demuestra que si m, n, k son enteros que verifican $m \geq 2$, $n \geq 2$ y $m^2 = kn^2$, entonces k debe ser el cuadrado de un entero.
11. Supongamos $a, b > 0$ cuyas descomposiciones en factores primos puedan escribirse como

$$a = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r} \qquad b = p_1^{l_1} p_2^{l_2} \cdots p_r^{l_r}$$

donde $p_1, \ldots, p_r$ son distintos dos a dos y para todo $1 \leq i \leq r \, : \, k_i \geq 0, l_i \geq 0, k_i + l_i > 0$. Sean d y m definidos como sigue:

$$d = p_1^{u_1} p_2^{u_2} \cdots p_r^{u_r} \qquad m = p_1^{v_1} p_2^{v_2} \cdots p_r^{v_r}$$

donde $u_i = \min(k_i, l_i)$ y $v_i = \max(k_i, l_i)$ para todo $1 \leq i \leq r$.

Demuestra que $d = mcd(a, b)$ y $m = mcm(a, b)$. Donde $mcm(a, b)$ es el mínimo común múltiplo de a y b, y se define como el mínimo múltiplo común de a y b que es divisor de todos los múltiplos comunes.

Concluye que se verifica la siguiente igualdad:

$$mcd(a, b) * mcm(a, b) = a * b$$