2.5 Funciones

Intuitivamente una función es una ley que establece como asignar a cada objeto de un conjunto un objeto de otro conjunto.

Históricamente una función establece la dependencia de magnitudes respecto de otras magnitudes (e.g. velocidad de un objeto en caída libre en función del tiempo)

En **Informática** una función es la mejor manera de representar la relación entre los datos y el resultado de un proceso de cómputo.

Definición: Una relación binaria $R \subseteq A \times B$ es una "función" si para todo $a \in A$ existe un único $b \in B$ tal que aRb.

Ejemplo: $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $xRy \Leftrightarrow y = x^2$ $\quad R = \{(0,0),(1,1),(-1,1),(2,4),(-2,4),(3,9),\ldots\}$

¿ R^{-1} función? $xR^{-1}y \Leftrightarrow yRx \Leftrightarrow x = y^2$

$4R^{-1}2, 4R^{-1}(-2) \Rightarrow R^{-1}$ no es una función $\quad R^{-1} = \{(0,0),(1,1),(1,-1),(4,2),(4,-2),\ldots\}$

Observación: R función $\not\Leftrightarrow$ R^{-1} función

Notación: Si $R \subseteq A \times B$ es una función, normalmente se denota por una letra minúscula como f y para cada $x \in dom(R)$ escribimos $y = f(x)$ en lugar de xRy.

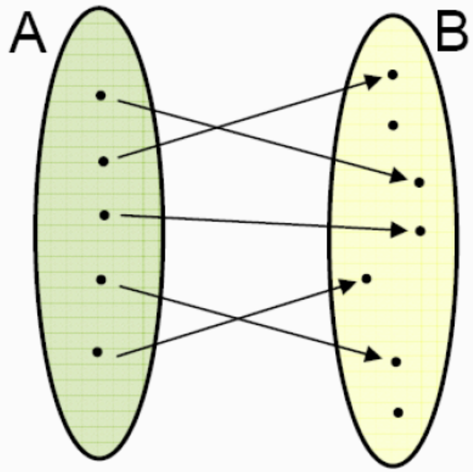
Entendemos f como una transformación $x \mapsto y$.

Si $dom(f) = A$ escribimos $f : A \to B$

f transforma cada elemento de A en un elemento de B

f empareja cada elemento de A con un elemento de B

f manda cada elemento de A a un elemento de B



Cada "original" del dominio tiene una sola "imagen"

Ejemplo:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^2 - 5$$

$$g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$$
$$x \quad \mapsto g(x) = \frac{5}{x}$$

podemos escribir

$$g : \mathbb{R} \dashrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \quad \mapsto \quad \frac{5}{x}$$

función parcial. No se especifica el dominio.

Definición: dados dos conjuntos A y B se definen los siguientes conjuntos

$$(A \to B) = \{f : A \to B \mid f \text{ función}\}$$
$$(A \dashrightarrow B) = \{f : A \dashrightarrow B \mid f \text{ función parcial}\}$$

Ejemplo:

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) = \sqrt{n}$, función total

$g : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $g(n) = \sqrt{n}$, función parcial

Observación: una función total es en particular una función parcial.

Ejemplo: definición por casos

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

- **Ley de igualdad:**

$$f = g \Leftrightarrow \begin{cases} dom(f) = dom(g) \\ f(x) = g(x) \text{ para todo } x \text{ en } dom(f) = dom(g) \end{cases}$$

dos funciones son iguales si tienen el mismo dominio y se comportan igual sobre cada elemento del dominio.

Ejemplo:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; f(x) = x^2 - 1$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; g(x) = (x+1)(x-1)$

tenemos que $f = g$.

Sean ahora

$$f(x) = x + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad (x \in \mathbb{R})$$

para todo $x \neq 1$ tenemos $f(x) = g(x)$, pero $dom(f) = \mathbb{R}$ y $dom(g) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

con lo que $f \neq g$.

Definición:

$$id_A : A \to A$$

$$id_A(a) = a$$

$$\varnothing : \varnothing \to B$$

$$\varnothing : A - - \to B$$

$$dom(\varnothing) = \varnothing$$

▪ Operaciones entre funciones.

Definición: dada f función y $S \subseteq dom(f)$ definimos $f \mid S$ = restricción de f a S como:

$$f \mid S(x) = f(x) \text{ para todo } x \in S$$

Ejemplo: $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $f(x) = |x|$, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} = dom(f)$

$$f \mid \mathbb{N}(x) = x \text{ para todo } x \in \mathbb{N} \text{ con lo que } f \mid \mathbb{N} = id_{\mathbb{N}}$$

Dadas dos funciones f y g tenemos $f \circ g$ (i.e $x(f \circ g)z \Leftrightarrow xfy,\ ygz$)

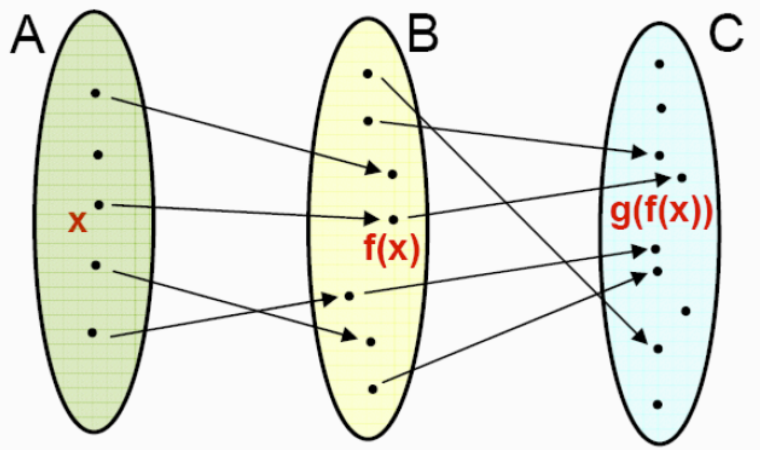
Observación:

$dom(f \circ g) = \{x \in dom(f) \mid f(x) \in dom(g)\}$

$x \in dom(f \circ g) \Rightarrow (f \circ g)(x) = g(f(x))$

Normalmente

$f : A \to B$, $g : B \to C$ y por tanto $f \circ g : A \to C$



Observación: distinta notación que en Cálculo!

En Matemática Discreta:

$f \circ g$ se lee "f compuesto con g" y tenemos $(f \circ g)(x) = g(f(x))$

En Cálculo:

$f \circ g$ se lee "g compuesto con f" y tenemos $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

Teorema: dadas las funciones $f : A \to B$, $g : B \to C$ y $h : C \to D$ tenemos

(a) $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

(b) $id_A \circ f = f \circ id_B = f$

- **Función inversa**

Dada una función $f : A \to B$ la relación f^{-1} **NO** es en general una función.

Ejemplo: $f(x) = x^2$ función.

Tenemos $4 f^{-1} 2$ y $4 f^{-1} - 2$

por tanto f^{-1} no es una función.

Definición: si f^{-1} es una función, decimos que f es "inyectiva".

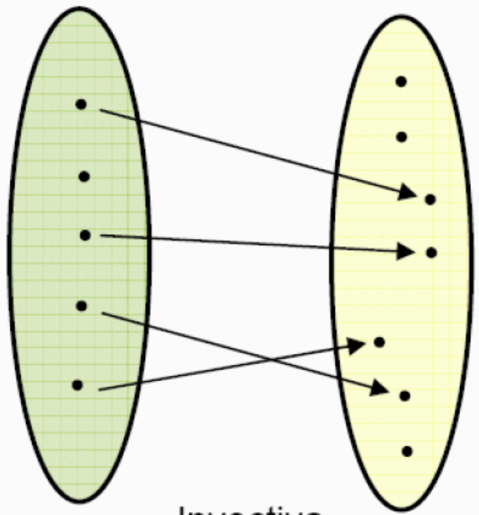
Observación: f es inyectiva si

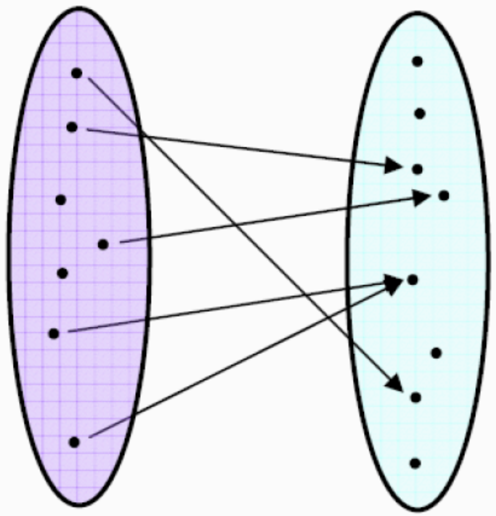
$$x_1, x_2 \in dom(f), x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

o equivalentemente si

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Es decir, que dos elementos del conjunto origen no se transformen en el mismo elemento del conjunto de llegada.


Inyectiva


No inyectiva

Ejemplo:

Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$.

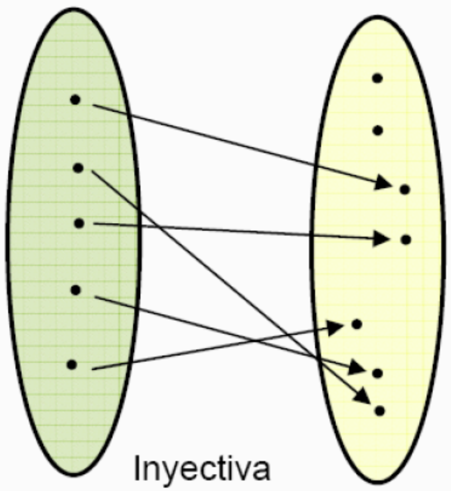
$$f(2) = f(-2) \Rightarrow f \text{ no inyectiva}$$

$$x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow g \text{ inyectiva}$$

Definición: decimos que la función f es "suprayectiva" si $ran(f) = B$.

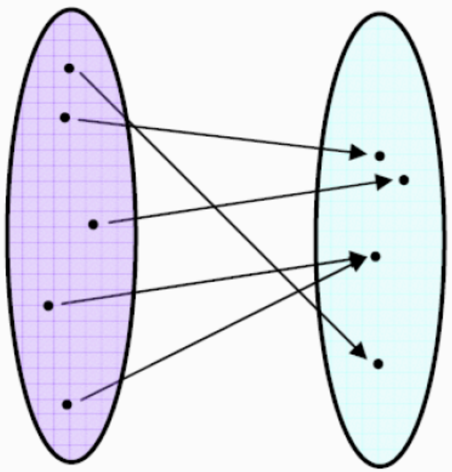
Es decir si $y \in B \Rightarrow \exists\, x \in A \text{ t.q. } f(x) = y$

Definición: Inyectiva + suprayectiva = biyectiva.



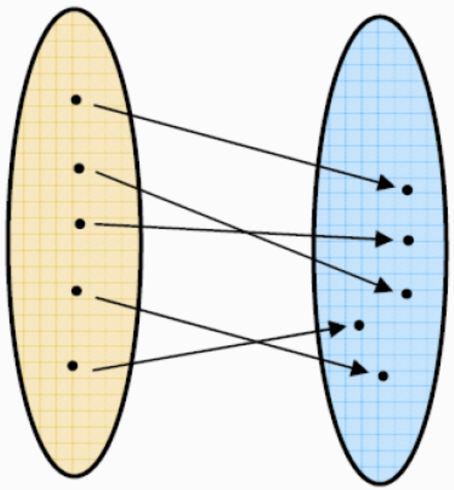
Inyectiva

NO suprayectiva



No inyectiva

suprayectiva



Inyectiva + suprayectiva = biyectiva

Ejemplo: sean las funciones $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ definidas por

$f_1(x) = x^2$, no inyectiva, no suprayectiva

$f_2(x) = |x|$, no inyectiva, sí suprayectiva

$$f_3(x): \begin{array}{ccccccccccc} 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & 4 & -4 & 5 & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \cdots \end{array}$$, biyectiva

Observación: f biyectiva $\Rightarrow$ f inyectiva $\Rightarrow$ $\exists f^{-1}$ función

Teorema: f biyectiva $\Rightarrow$ f^{-1} biyectiva

Teorema: dadas las funciones $f : A \to B$ y $g : B \to C$ tenemos

(a) f, g inyectivas $\Rightarrow$ $f \circ g$ inyectiva

(b) f, g suprayectivas $\Rightarrow$ $f \circ g$ suprayectiva

(c) f, g biyectivas $\Rightarrow$ $f \circ g$ biyectiva

Demostración: (b) Tenemos $f \circ g : A \to C$. Consideramos $c \in C$. Tenemos

$$c \in C \Rightarrow \exists\, b \in B \text{ t.q. } g(b) = c \underbrace{\Rightarrow}_{f \text{ supra}} \exists \text{ a} \in A \text{ t.q. } f(a) = b \Rightarrow (f \circ g)(a) = g(f(a)) = g(b) = c$$

Observación: si tenemos $f: A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \to B$ entonces $dom(f)$ es un conjunto de n-tuplas. Decimos que f es una "función n-ádica"

Ejemplo: $\begin{array}{rccc} +: & \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ & (n,m) & \mapsto & n+m \end{array}$ es una función binaria

$d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad d(x_1, y_1, x_2, y_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

- ## Ejemplos de funciones

Si I es un conjunto de índices y $s: I \to C$ una función entonces para cada $i \in I$ tenemos $s(i) = s_i \in C$. Esto se conoce como una "familia de elementos indexados" por I.

Si $s: \mathbb{N} \to C$ entonces escribimos $s(n) = s_n \in C$.

Esto es una "sucesión de elementos de C".

Es un caso particular de familia indexada.

Si $n=\{0,1,2,\ldots,n-1\}$ y $s:n\to C$ tenemos

$\langle s_0,s_1,s_2,\ldots,s_{n-1}\rangle$ "sucesión finita"

similar a una tupla $(s_0,s_1,s_2,\ldots,s_{n-1})$ (misma información).

- **Palabras sobre un alfabeto**

Sea A el alfabeto (cualquier conjunto) definimos

A^* = sucesiones finitas de elementos de A = "palabras" sobre el alfabeto A.

Una palabra $u\in A^*$ es una sucesión finita $u=\langle u_0,u_1,u_2,\ldots,u_{n-1}\rangle$.

Escribimos también $u=u_0u_1u_2\cdots u_{n-1}$

ε = "palabra vacía" (dada por la función $\varnothing:\varnothing\to A$)

$A^+=A^*\setminus\{\varepsilon\}$ = palabras no vacías.