MATEMATICA DISCRETA Y LOGICA MATEMATICA   DG II - CMAT

Primer Examen Parcial   Enero 2019

(1) Ninguno de los anteriores

$$(\emptyset \cup \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}, \emptyset\}\}) \cap (\{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\})$$

$$\{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}, \emptyset\}\} \cap \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{\{\emptyset\}\}$$

única coincidencia

$$\{\{\emptyset\}\} \neq \emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

(2) 4

Como $[a]$, $[b]$ y $[c]$ tienen cardinales diferentes, ha de tratarse de tres clases disjuntas de la partición generada por R, y por tanto $[a] \cup [b] \cup [c]$ contiene 9 de los 10 elementos de A, por lo que existe un sólo $d \in A$ con $|[d]| = 1$, de modo que $A/R = \{[a], [b], [c], [d]\}$.

(3) $f(n) = n \text{ mod. } 3$

Comprobado vía inducción completa

$\forall\, n < 3 \quad f(n) = n = n \bmod 3$

$n \geq 3 \quad f(n) = f(n-3) \underset{\text{HIC}}{=} (n-3) \bmod 3 = n \bmod 3$

$n = 3\cdot(c+1) + (n-3) \bmod 3 \Longleftarrow \quad \exists\, c \quad n-3 = 3\cdot c + (n-3) \bmod 3 \in \{0,1,2\}$

(4) mcd (a,b) no puede ser 13

Pues en caso contrario $3a - 5b \in \dot{13}$, pero $27 \notin \dot{13}$

No puede tampoco ser 14, pues $27 \notin \dot{14}$

Sí puede ser 27, tomando $a = 2\cdot 27$, $b = 27$.

(5) No es ni relación de orden ni de equivalencia

No es de orden : no es antisimétrica $1 R 2,\ 2 R 1,\ 1 \neq 2$.

No es de equivalencia : no es transitiva $1 R 2,\ 2 R 3,\ 1 \not R 3$

(En realidad la no transitividad vale para ambos casos)

---

(6) El tercero es el único numerable

Sabemos que siempre $|A| < |\mathcal{P}(A)| \Rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ no lo es

En general, $\mathcal{P}(A) \sim \{ A \to \{0,1\} \}$, pues los elementos del conjunto de la drcha. son las funciones características de los elementos de $\mathcal{P}(A)$.

$\mathbb{Q}$ es numerable, $\{0,1\}$ también $\Rightarrow \mathbb{Q} \times \{0,1\}$ lo es.

---

(7) Por inducción completa, pues para razonar sobre $f(n)$ con $n \geq 2$ necesitamos tanto $f(n-1)$ como $f(n-2)$.

- Los dos casos bases $n \ngeq 2$:
  - $f(0) = 1 = \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{3^0}{2}(0^2 - 0 + 2)$
  - $f(1) = 3 = \frac{3}{2} \cdot 2 = \frac{3^1}{2}(1^2 - 1 + 2)$
- Paso inductivo : $n' \geq 2 \Leftrightarrow n' = n+1 \wedge n \geq 1$
  - Lo supondremos $\forall k < n+1$, en particular $k = n, n-1$
  - $f(n+1) = 6 \cdot f(n) - 9 f(n-1) + 3^n$

HIC

$$\underbrace{\underbrace{6 \cdot \frac{3^n}{2}}_{3^{n+1}} (n^2 - n + 2) - \underbrace{9 \cdot \frac{3^{n-1}}{2}((n-1)^2 - (n-1) + 2)}_{3^{n-1}/2 \cdot (n^2 - 3n + 4)}}_{\frac{3^{n+1}}{2}(n^2+n)} + 3^n$$

$$+ \frac{3^{n+1}}{2} \cdot 2 = \frac{3^{n+1}}{2}\left((n+1)^2 - (n+1) + 2\right) \quad (*)$$

(*)

$(n+1)^2 - (n+1) =$

$(n+1)[(n+1) - 1] =$

$n^2 + n$

(8) $c \mid a \wedge c \mid b \iff c \mid \mathrm{mcd}(a,b)$

$\boxed{\Rightarrow}$ Aplicando Bezout: $\mathrm{mcd}(a,b) = ma + nb \quad m,n \in \mathbb{Z}$

Combinación lineal: $c \mid a \wedge c \mid b \Rightarrow c \mid (ma+nb)$

$\boxed{\Leftarrow}$ Trivial: $\mathrm{mcd}(a,b) \mid a, b$ y transitividad de $\mid$.

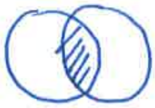
---

(9) Si se quiere se puede pintar y/o calcular las correspondientes tablas viendo que difieren. Por ejemplo:

$A \oplus B =$ 

$(A \oplus B) \setminus B =$ 

$(= A \setminus B)$

$B \setminus (A \oplus B) =$  $(= A \cap B)$

Pero de aquí no podemos concluir que **nunca** serán iguales, aunque efectivamente no podrán serlo en cuanto uno cualquiera de ellos no sea vacío, ya que $(A \cap B) \cap (A \setminus B) = \emptyset$.

O sea la desigualdad se tiene si y solo si $A \neq \emptyset$.

Valdría entonces como contraejemplo cualquier par con $A \neq \emptyset$.

Por ejemplo, $A = \{1\}$, $B = \emptyset$, que nos daría $\{1\} \neq \emptyset$.

Evidentemente, éste o muchos otros, podrían "intuirse" directamente, y comprobarse de inmediato, a partir del hecho de que $X \setminus B$ y B son disjuntos, mientras $B \setminus Y \subseteq B$.

---

(10) a) En realidad no hay mucho donde elegir, pero sí lo suficiente: Las relaciones de equivalencia sobre cualquier conjunto A sabemos que se corresponden (exactamente) con las particiones posibles de A. Las dos que nos excluyen en el enunciado son las más "extremales":

$\mathrm{Id}_A = \{\{1\},\{2\},\{3\}\}$ y $\mathrm{Total}_A = \{\{1,2,3\}\}$.

Hay otras tres particiones posibles, todas ellas con dos clases de equivalencia: una de cardinal uno y otra de cardinal dos. Si denotamos $\{x, y, z\} = \{0, 1, 2\}$, con lo que las tres variables tendrían exactamente los tres valores posibles. $P_x = \{\{x\}, \{y, z\}\}$ nos genera entonces la partición no trivial que deja aislado a x y juntos a y y z. Extensionalmente, $P_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (2,3), (3,2)\}$ y $P_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,3), (3,1)\}$ nos sirven para contestar a la pregunta (y también $\{P_1, P_3\}$ y $\{P_2, P_3\}$, pero ya no hay más formas de hacerlo).

IMPORTANTE: La relación es el correspondiente conjunto de pares, y no la forma en que la definamos. Por ejemplo: $x R y \Leftrightarrow x + y \leq 6$, no es más que una forma de "definir" $Total_A$. Del mismo modo, $x R y \Leftrightarrow (x \bmod 2 = y \bmod 2)$ sería una forma (implícita) de definir P_2, y $x S y \Leftrightarrow ((x \leq 1 \wedge y \leq 1) \vee (x > 1 \wedge y > 1))$, una forma de definir P_1. Pero cuando $|A|$ es pequeño es mucho más sencillo y cómodo limitarnos a presentar extensionalmente cada relación, como hemos hecho arriba.

b) El ejercicio está puesto para que uniendo las dos relaciones con las que se contestó al apartado a), se obtenga seguro un contraejemplo: Por ejemplo, $P_1 \uplus P_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (2,3), (3,2), (1,3), (3,1)\}$, con lo que $2 \, (P_1 \cup P_2) \, 3$ y $3 \, (P_1 \cup P_2) \, 1$, pero $\cancel{2 \, (P_1 \cup P_2) \, 1}$, así que $P_1 \cup P_2$ no es transitiva, y por tanto no es relación de equivalencia.

(11) Sí es inyectiva: $x \neq 0 \Rightarrow \frac{2}{x} \in \mathbb{R}$, a partir de lo cual, $f(x) = f(y) \Rightarrow 6 + \frac{2}{x} = 6 + \frac{2}{y} \Rightarrow$
$\frac{2}{x} = \frac{2}{y} \Rightarrow 2x = 2y \Rightarrow x = y$.

No es sobreyectiva. Si lo fuera se podría invertir, y la inversa se definiría "despejando" x en función de $f(x)$:
$f(x) = 6 + \frac{2}{x} \iff f(x) - 6 = \frac{2}{x} \iff x = \frac{2}{f(x)-6}$. Pero, evidentemente no podemos "poner aquí" $f(x) = 6$, pues $\frac{2}{0}$ no está definido.

Alternativamente, podríamos directamente "adivinar" que 6 no puede ser imagen de ningún x, pues $x \neq 0 \Rightarrow \frac{2}{x} \neq 0 \Rightarrow$ $6 + \frac{2}{x} \neq 6$.

---

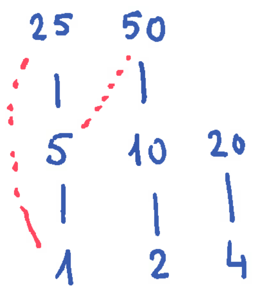
(12) a1) Reflexiva: Tomando $k = 0$ $5^0 \cdot x = 1 \cdot x = x \Rightarrow xRx$

a2) Antisimétrica $(5^k \cdot x = y \wedge 5^{k'} \cdot y = x) \Rightarrow$
$5^k \cdot 5^{k'} \cdot x = x \Rightarrow 5^{k+k'} = 1 \Rightarrow k + k' = 0$, y como $k, k' \in \mathbb{N}$, obtenemos $k = k' = 0 \Rightarrow x = y$.

a3) Transitiva $(5^k x = y \wedge 5^{k'} y = z) \Rightarrow 5^{k+k'} x = z \Rightarrow xRz$

IMPORTANTE: Hay que utilizar k y k' (no vale "asumir" que $k' = k$) pues "el k que existe en cada caso" no tiene porqué ser el mismo.

b)



···· es sólo para señalar que estas flechas no aparecen: $1 R 25$ se "sigue" por transitividad; $5 \not R 50$ pues $10 \in \dot{5}$ pero no es potencia de 5.

c) Maximales "arriba" en el diagrama: $\{25, 50, 20\}$
Minimales "abajo": $\{1, 2, 4\}$
No hay mínimo ni máximo, pues hay varios minimales y maximales.