2.6 Relaciones de Equivalencia

Definición: Una relación binaria $R \subseteq A \times A$ es una "relación de equivalencia" si

- aRa para todo $a \in A$ (Reflexiva)

(todos los elementos de A están relacionados consigo mismos)

- $aRb \Rightarrow bRa$ para todo $a, b \in A$ (Simétrica)

(Si a relacionado con b entonces b relacionado con a)

- $aRb, bRc \Rightarrow aRc$ para todo $a, b, c \in A$ (Transitiva)

(Si a está relacionado con b y b está relacionado con c entonces a está relacionado con c)

Ejemplo:

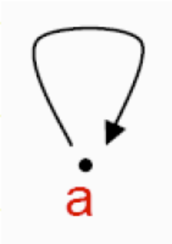
(a) $A = \{\text{coches matriculados en Europa}\}$

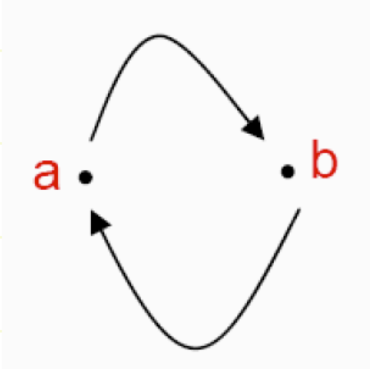
$xRy \Leftrightarrow x$ e y matriculados en el mismo pais

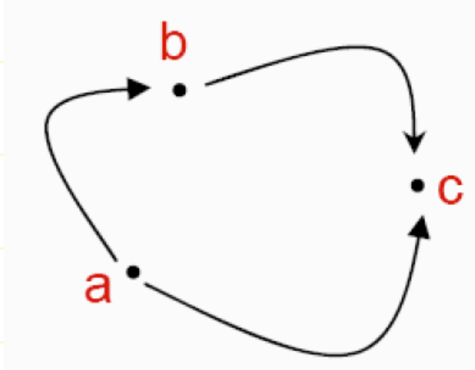
(b) $A = \mathbb{Z}$

$xRy \Leftrightarrow x \equiv_5 y$

Gráficamente:







Ejemplo:

(a) $A = \mathbb{N}, \ \ xRy \Leftrightarrow x \leq y$ RF, TR, no SM

(b) $A = \mathbb{N}, \ \ xRy \Leftrightarrow x < y$ No RF, no SM, sí TR

(c) $A = \{X \mid \varnothing \neq X \subseteq \mathbb{N}\}, \ \ XRY \Leftrightarrow X \cap Y = \varnothing$ RF, SM, no TR

(d) $A = \{\text{habitantes de Madrid}\}, \ \ xRy \Leftrightarrow x \text{ e } y$ viven en un mismo distrito

RF, SM y TR

Notación: si $R \subseteq A \times A$ utilizamos la notación $a \sim b$ para aRb

(normalmente si R es relación de equivalencia)

Definición: Sea $\sim$ relación de equivalencia en A y $a \in A$. Se define la "clase de equivalencia" de a como

$$[a] = \{b \in A \mid a \sim b\}$$

Ejemplo: Dada la relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$ dada por $\equiv_7$.

$$\{[0]_7, [1]_7, [2]_7, [3]_7, [4]_7, [5]_7, [6]_7\} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}\} = \mathbb{Z}(7)$$

Observación: en el ejemplo anterior las clases de equivalencia son subconjuntos de $\mathbb{Z}$ de modo que son disjuntos y cada $n \in \mathbb{Z}$ está en alguna de ellas (es decir, la unión de todas es igual a $\mathbb{Z}$).

Teorema 1: sea $\sim$ relación de equivalencia en A y $a,b \in A$. Entonces

(a) $a \in [a]$

(b) $a \sim b \Leftrightarrow [a]=[b]$ (o equivalentemente $a \not\sim b \Leftrightarrow [a] \neq [b]$)

(c) $a \not\sim b \Leftrightarrow [a] \cap [b] = \varnothing$

Demostración:

(a) Obvio por ser $\sim$ reflexiva.

(b) $\Rightarrow$: $a \sim b \Rightarrow [z \sim a \Leftrightarrow z \sim b] \Rightarrow [a]=[b]$

$\Leftarrow$: $a \in [a]=[b] \Rightarrow a \in [b] \Rightarrow a \sim b$

(c) $\Rightarrow$: si $c \in [a] \cap [b] \Rightarrow c \sim a$ y $c \sim b \Rightarrow a \sim b$!!!! $\Rightarrow [a] \cap [b] = \varnothing$

$\Leftarrow$: $a \in [a], [a] \cap [b] = \varnothing \Rightarrow a \notin [b] \Rightarrow a \not\sim b$

Definición: sea A conjunto y $\sim$ relación de equivalencia en A. Definimos el "conjunto cociente" como:

$$A/_{\sim} = \{[a] \mid a \in A\}$$

(familia de todas las clases de equivalencia)

Si $C \in A/_{\sim}$, tenemos $C = [x]$ para algún $x \in A$.

Decimos que x es un representante de C.

Ejemplo: Tenemos $\equiv_7$ relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z}/_{\equiv_7} = \{[0],[1],[2],[3],[4],[5],[6]\} = \mathbb{Z}(7)$$

Notación: escribimos $\mathbb{Z}/_{(m)}$ en lugar de $\mathbb{Z}/_{\equiv_m}$.

Los elementos de $\mathbb{Z}/_{(m)}$ se llaman "clases de congruencia"

En $\mathbb{Z}/_{(m)}$ tenemos definidas operaciones usando representantes.

En $\mathbb{Z}(7)=\{[0],[1],[2],[3],[4],[5],[6]\}$

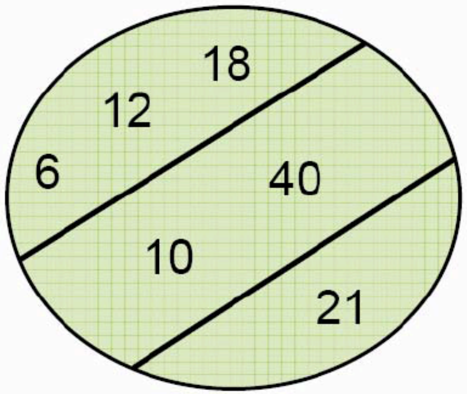
$$[2]_7+[3]_7=[5]_7$$

$$[3]_7\cdot[5]_7=[15]_7=[1]_7$$

Ejemplo: $A=\{6,10,12,18,21,40\}$, $x\sim y \Leftrightarrow x$ e y tienen los mismos divisores primos

Tenemos $6=2\cdot 3$, $10=2\cdot 5$, $12=2^2\cdot 3$, $18=2\cdot 3^2$, $21=3\cdot 7$ y $40=2^3\cdot 5$

Clases de equivalencia: $[6]=[12]=[18]$, $[10]=[40]$, $[21]$



Las clases de equivalencia "parten" el conjunto en subconjuntos disjuntos

Definición: sea $F \subseteq P(A)$ una familia de subconjuntos de A. Decimos que F es una "partición de A" si

(a) $\bigcup F = A$

(la unión de los subconjuntos es igual al total)

(b) $C, C' \in F, C \neq C' \Rightarrow C \cap C' = \varnothing$

(los subconjuntos son disjuntos)

Teorema: Si $\sim$ es una relación de equivalencia sobre A entonces $A/\sim$ es una partición de A.

Demostración: consecuencia de lo visto: $[a] \cap [b] = \varnothing$ si $a \not\sim b$ y $\bigcup_{a \in A} [a] = A$.