2.4 Relaciones

Las matemáticas aparecen como la ciencia que estudia las relaciones entre ciertos objetos abstractos.

Emile Borel

Relación

Sean los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Una relación $\mathscr{R}$ sobre $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ es cualquier subconjunto de este producto cartesiano, es decir,

$$\mathscr{R} \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$$

Si $\mathscr{R} = \emptyset$, llamaremos a $\mathscr{R}$, la relación vacía.

Si $\mathscr{R} = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, llamaremos a $\mathscr{R}$ la relación universal.

Si $A_i = A, \ \forall i = 1, 2, \ldots, n$, entonces $\mathscr{R}$ es una relación n-aria sobre A.

Si $n = 2$, diremos que $\mathscr{R}$ es una relación binaria y si $n = 3$, una relación ternaria.

Igualdad de Relaciones

Sean $\mathscr{R}_1$ una relación n-aria sobre $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ y $\mathscr{R}_2$ una relación n-aria sobre $B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_m$. Entonces $\mathscr{R}_1 = \mathscr{R}_2$ si, y sólo si $n = m$ y $A_i = B_i, \ \forall i = 1, 2, \ldots, n$ y $\mathscr{R}_1$ y $\mathscr{R}_2$ son conjuntos de n-tuplas ordenadas iguales.

Relaciones Binarias

Ejemplo: la relación "Alfredo es profesor de Óscar" se puede representar como un par ordenado $(\text{Alfredo}, \text{Óscar})$ del producto cartesiano

$$\{\text{profesores CES}\} \times \{\text{alumnos CES}\}.$$

Esto es un ejemplo de relación binaria (entre elementos de dos conjuntos).

Definición: dados A, B conjuntos, una "relación binaria" entre A y B es un conjunto $R \subseteq A \times B$.

Si $a \in A$ y $b \in B$ están "relacionados", es decir si $(a,b) \in R$ escribimos aRb.

Ejemplo 1: $A = B = \{2,3,4,6\}$ ("relación binaria sobre A").

$$xRy \Leftrightarrow x \mid y$$

$$R = \{(2,2),(2,4),(2,6),(3,3),(3,6),(4,4),(6,6)\}$$

Ejemplo 2: relación binaria sobre $\mathbb{N}$ (relación de orden)

$$xRy \Leftrightarrow x < y$$

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x < y\} = \{(0,1),(0,2),\ldots(1,2),(1,3),(1,4),\ldots\}$$

$$a \equiv_m b$$

1) $a \text{ mód } m = b \text{ mód } m$
2) $m \mid b - a$
3) $\exists k \in \mathbb{Z} : b = a + k \cdot m$

Ejemplo 3: congruencia módulo 5

$$x, y \in \mathbb{Z} \quad xRy \Leftrightarrow x \equiv_5 y$$

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x - y \text{ múltiplo de } 5 \right\} = \left\{ (0,0), (0,5), \ldots (1,1), (1,6), (1,11), \ldots \right\}$$

Definición: Si $R \subseteq A \times B$ es una relación binaria

$$dom(R) = \{ a \in A \mid aRb \text{ para algún } b \in B \}$$ ("dominio de R")

$$ran(R) = \{ b \in B \mid aRb \text{ para algún a} \in A \}$$ ("rango de R")

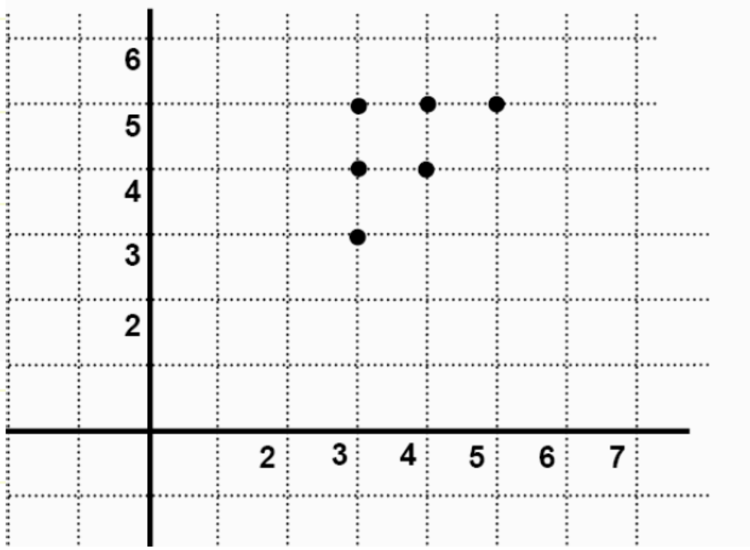
Observación: $dom(R) \subseteq A$, $ran(R) \subseteq B$

Ejemplo: $A = \{3, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$

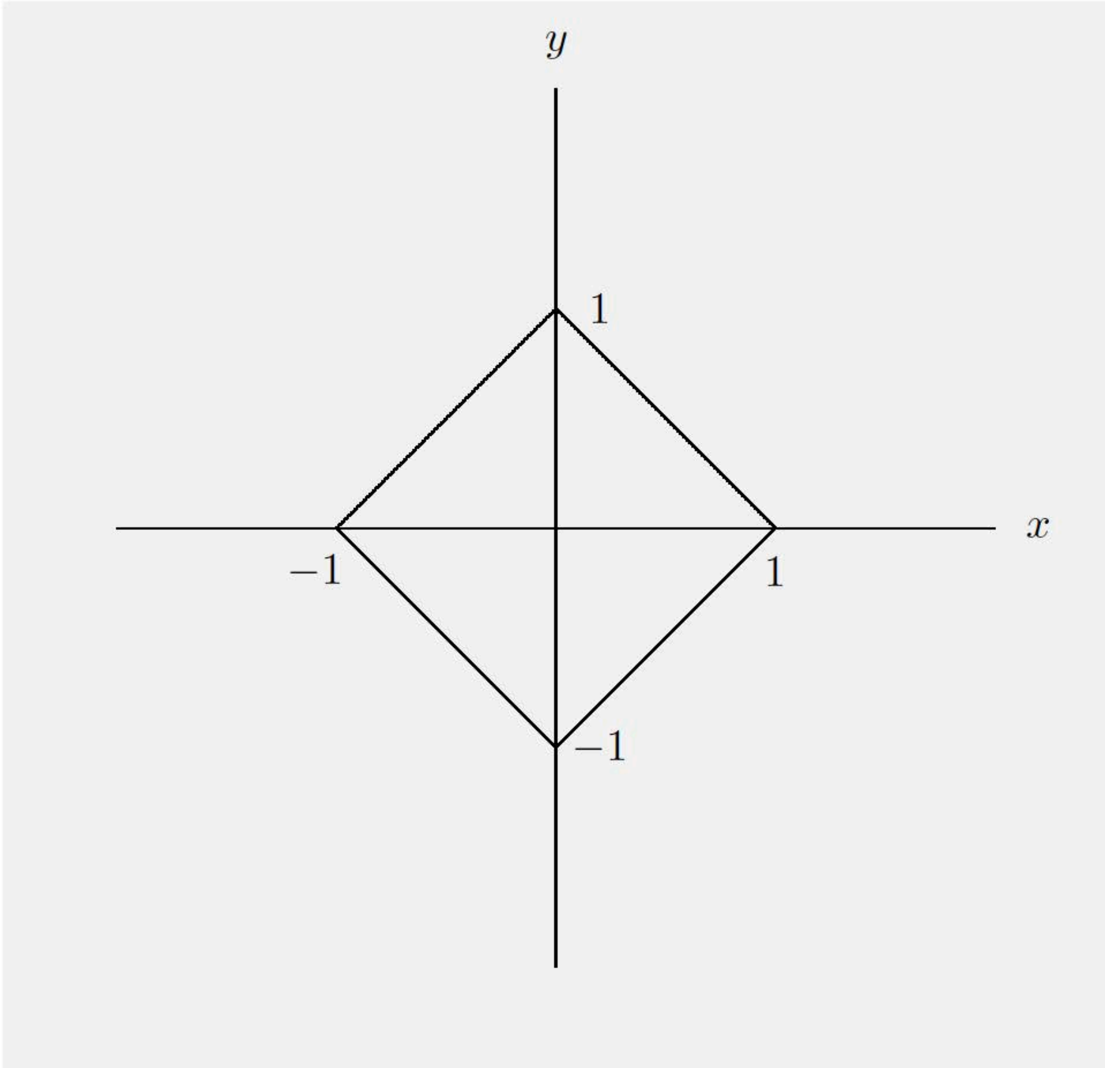
$$aRb \Leftrightarrow a \leq b$$

$dom(R) = \{3, 4, 5\}$ (proyección de R sobre A)

$ran(R) = \{3, 4, 5\}$ (proyección de R sobre B)



$$\mathscr{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |x| + |y| = 1\}$$



$$|x| + |y| = 1$$

Ejemplo: $M = \{\text{madrileños}\}$, $aRb \Leftrightarrow a$ es tío de b

$dom(R) =$ los madrileños que son tíos de madrileños

$ran(R) =$ los madrileños que son sobrinos de madrileños

Definición: Sean $R \subseteq A \times B$ y $S \subseteq A \times B$ dos relaciones binarias.

$R \cup S \subseteq A \times B$ ("unión")

$R \cap S \subseteq A \times B$ ("intersección")

$\setminus R = (A \times B) \setminus R$ ("complemento")

Ejemplo: sea R = "ser primo de", S = "ser vecino de"

$R \cup S$ = ser primo o vecino de: $x(R \cup S)y \Leftrightarrow x$ es primo o vecino de y

$R \cap S$ = ser primo y vecino de: $x(R \cap S)y \Leftrightarrow x$ es primo y vecino de y

$\setminus R$ = NO ser primo de: $x(\setminus R)y \Leftrightarrow x$ NO es primo de y

$\setminus S$ = NO ser vecino de: $x(\setminus S)y \Leftrightarrow x$ NO es vecino de y

Definición: si $R \subseteq A \times B$ es una relación se define la "inversa" de R como

$R^{-1} = \{(y,x) \in B \times A \mid (x,y) \in R\}$.

Tenemos $yR^{-1}x \Leftrightarrow xRy$.

Si $R \subseteq A \times B$ y $S \subseteq B \times C$ son dos relaciones, se define la "composición" o "producto" de R y S como

$$R \cdot S = \{(a,c) \in A \times C \mid \text{existe } b \in B \text{ tal que } (a,b) \in R, (b,c) \in S\}.$$

Tenemos $a(R \cdot S)c \Leftrightarrow \exists b \in B \text{ t.q. } aRb, bSc$

Se define la "identidad" sobre X como $id_X = \{(x,x) \in X \times X \mid x \in X\}$

Ejemplo 6: si tenemos relaciones R y S dadas por:

$xRy \Leftrightarrow$ x es hermano de y

$xSy \Leftrightarrow$ x es padre o madre de y

$x(R \cdot S)y \Leftrightarrow \exists z \text{ t.q. } xRz, zSy \Leftrightarrow x \text{ hermano de } z, \text{ z padre o madre de y} \Leftrightarrow x \text{ tío de y}$

$xS^{-1}y \Leftrightarrow ySx \Leftrightarrow y \text{ padre o madre de x} \Leftrightarrow x \text{ hijo o hija de y}$

Proposición: sean $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ y $T \subseteq C \times D$ tres relaciones. Entonces

(a) $R^{-1} \subseteq B \times A,\ R \cdot S \subseteq A \times C$

(b) $(R \cdot S) \cdot T = R \cdot (S \cdot T)$

(c) $id_A \cdot R = R \cdot id_B$

(d) $(R \cdot S)^{-1} = S^{-1} \cdot R^{-1}$

Demostración:

(d) $x(R \cdot S)^{-1} y \Leftrightarrow y(R \cdot S)s \Leftrightarrow= yRz, zSx \Leftrightarrow \cdots$

$$\cdots \Leftrightarrow zR^{-1}y, xS^{-1}z \Leftrightarrow xS^{-1}z, zR^{-1}y \Leftrightarrow x\left(S^{-1} \cdot R^{-1}\right)y$$

Definición: si, $R \subseteq A_1 \times \cdots \times A_n$ definimos que es una relación "n-aria"

Ejemplo: relación ternaria en $\mathbb{Z}$:

$$(x, y, z) \in R \Leftrightarrow z = mcd(x, y)$$

$$R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

Ejemplo: la información

número de vuelo + aeropuerto de partida + hora de salida

es un elemento de una relación ternaria.

Es un ejemplo de base de datos relacional.

Matriz de una Relación

Dados dos conjuntos finitos, no vacíos,

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\} \text{ y } B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$$

y una relación $\mathscr{R}$ cualquiera de A a B, llamaremos matriz de $\mathscr{R}$ a la matriz booleana siguiente:

$$M_{\mathscr{R}} = \left(r_{ij}\right) : r_{ij} = \begin{cases} 1, & si\ (a_i, b_j) \in \mathscr{R} \\ 0, & si\ (a_i, b_j) \notin \mathscr{R} \end{cases}$$

donde $i = 1, 2, \ldots\ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots\ldots, n.$

Ejemplo 6.6 Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y definimos la relación

$$a\mathscr{R}b \iff b \text{ es múltiplo de } a,\ \forall a, b \in A$$

Calcularemos la matriz de la relación $\mathscr{R}$.

<u>Solución</u>

La relación vendrá dada por el conjunto

$$\mathscr{R} = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,4), (3,3), (4,4)\}$$

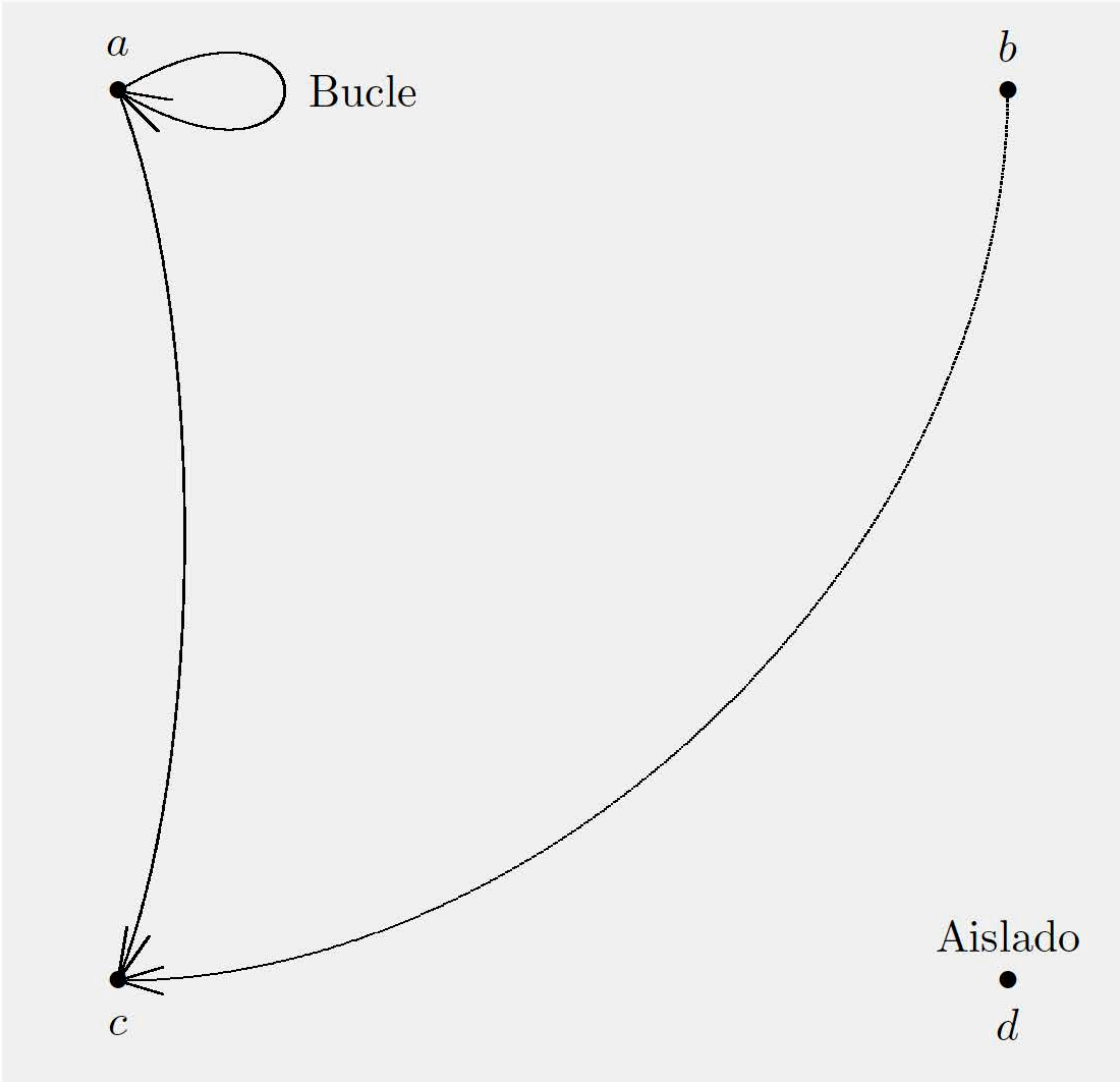
y la matriz será, por tanto,

$$M_{\mathscr{R}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\text{Dom}(\mathscr{R}) = \{1, 2, 3, 4\}$ e $\text{Img}(\mathscr{R}) = \{1, 2, 3, 4\}$

Grafo Dirigido de una Relación

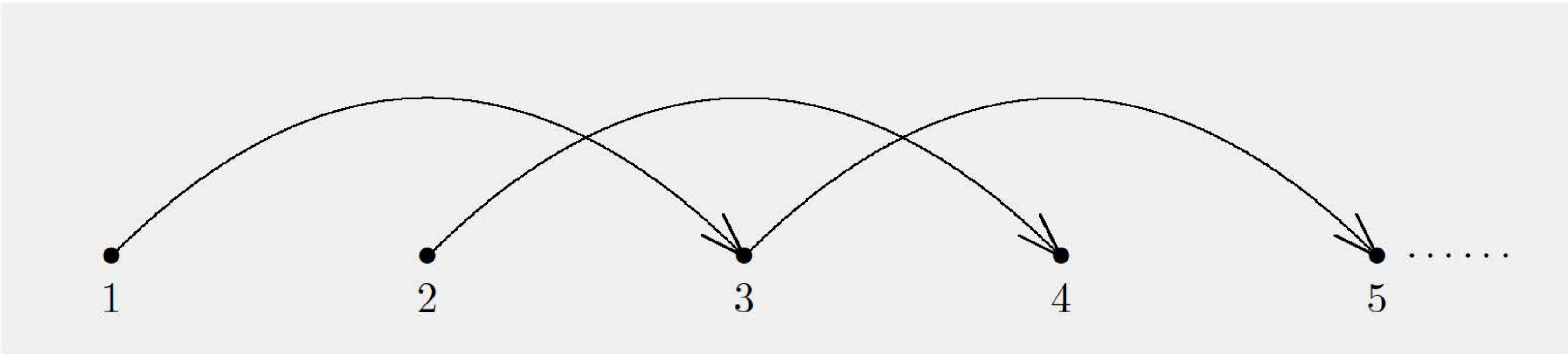
Ejemplo 6.7 En la figura mostramos una representación gráfica del digrafo $D = (A, \mathscr{R})$, siendo A el conjunto $\{a, b, c, d\}$ y $\mathscr{R} = \{(a, a), (a, c), (b, c)\}$.



Ejemplo 6.8 Representar gráficamente el digrafo $D = (\mathbb{Z}^+, \mathscr{R})$, donde $\mathscr{R}$ es la relación definida sobre el conjunto de los números naturales consistente en todos los pares de números de la forma $(x, x+2)$.

<u>Solución</u>

$$\mathscr{R} = \left\{(x, x+2) : x \in \mathbb{Z}^+\right\}$$



Ejemplo 6.8

Como $\mathbb{Z}^+$ es un conjunto infinito, en la figura hemos hecho un diagrama que, necesariamente, es incompleto.

Algunas propiedades destacables que pueden cumplir las relaciones binarias sobre un conjunto A

Def:

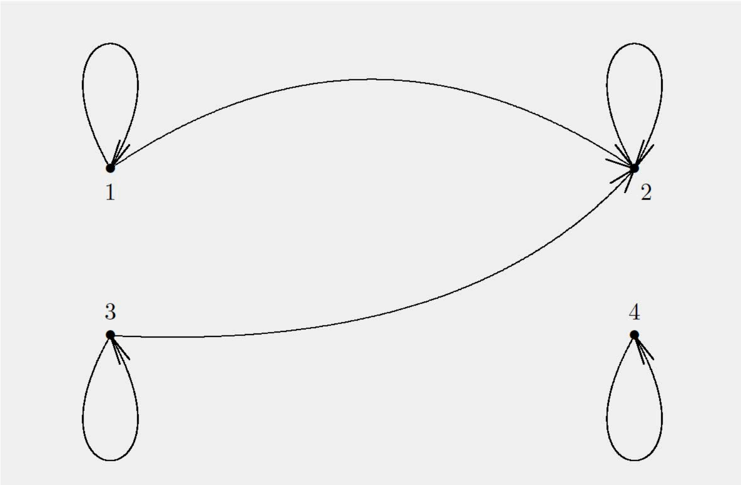
Sea $\mathcal{R} \subseteq A \times A$; decimos que $\mathcal{R}$ es

- **reflexiva** *sii* $\forall x \in A \quad x\mathcal{R}x$
- **antirreflexiva** *sii* $\nexists x \in A \quad x\mathcal{R}x$
- **simétrica** *sii* $\forall x, y \in A \quad x\mathcal{R}y \rightarrow y\mathcal{R}x$
- **antisimétrica** *sii* $\forall x, y \in A \quad (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \rightarrow x = y)$
- **transitiva** *sii* $\forall x, y, z \in A \quad (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \rightarrow x\mathcal{R}z)$
- **conexa** *sii* $\forall x, y \in A, \ \ x \neq y$, *se cumple* $(x\mathcal{R}y) \vee (y\mathcal{R}x)$

Reflexividad

$\mathscr{R}$ es reflexiva $\iff \forall a\,(a \in A \implies a\mathscr{R}a)$

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $\mathscr{R} = \{(1,1), (1,2), (2,2), (3,3), (3,2), (4,4)\}$

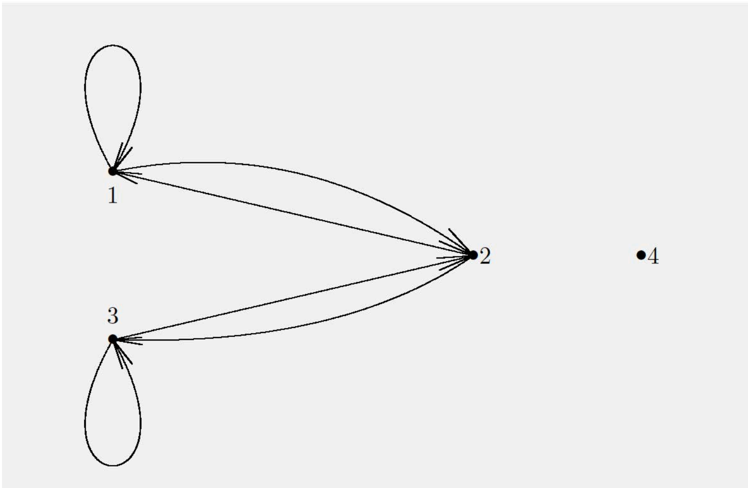


$$M_{\mathscr{R}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Simetría

$\mathscr{R}$ es simétrica $\iff \forall a, b \in A\,(a\mathscr{R}b \implies b\mathscr{R}a)$

Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $\mathscr{R} = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,3), (3,2), (3,3)\}$



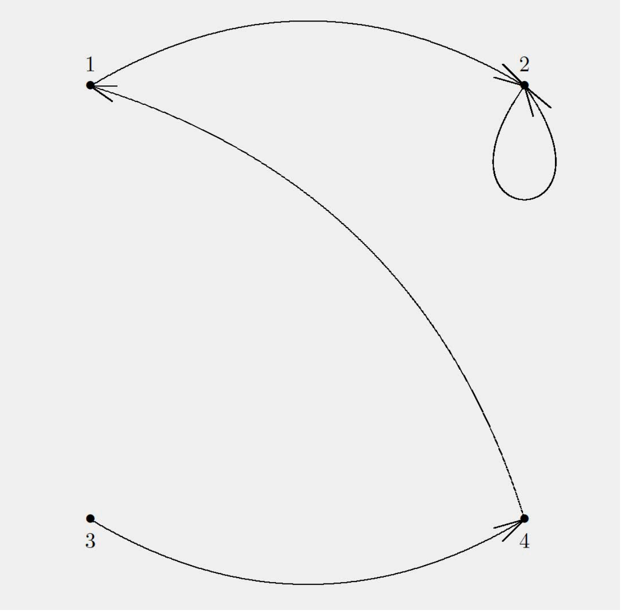
$$M_{\mathscr{R}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Antisimetría

$$\mathscr{R} \text{ es antisimétrica} \iff \forall a, b \in A(a\mathscr{R}b \;\wedge\; b\mathscr{R}a \implies a = b)$$

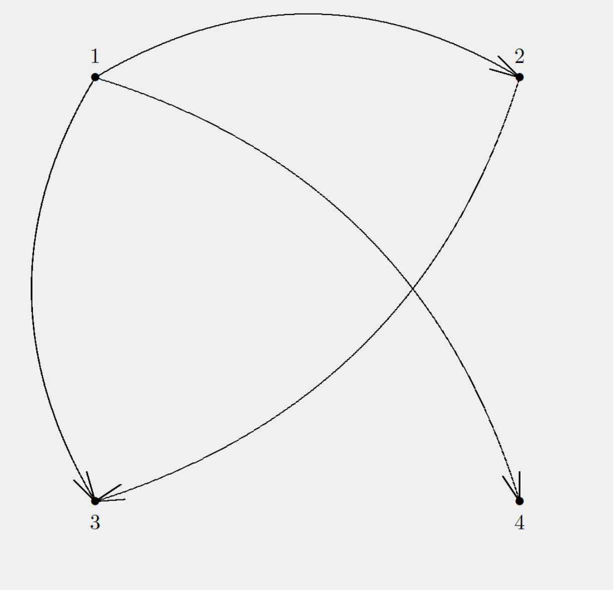
Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y sea $\mathscr{R} = \{(1, 2), (2, 2), (3, 4), (4, 1)\}$

$$M_{\mathscr{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Transitividad

$$\mathscr{R} \text{ es transitiva} \iff \forall a, b, c \in A\,(a\mathscr{R}b \;\wedge\; b\mathscr{R}c \implies a\mathscr{R}c)$$



Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $\mathscr{R} = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3)\}$

$$M_{\mathscr{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

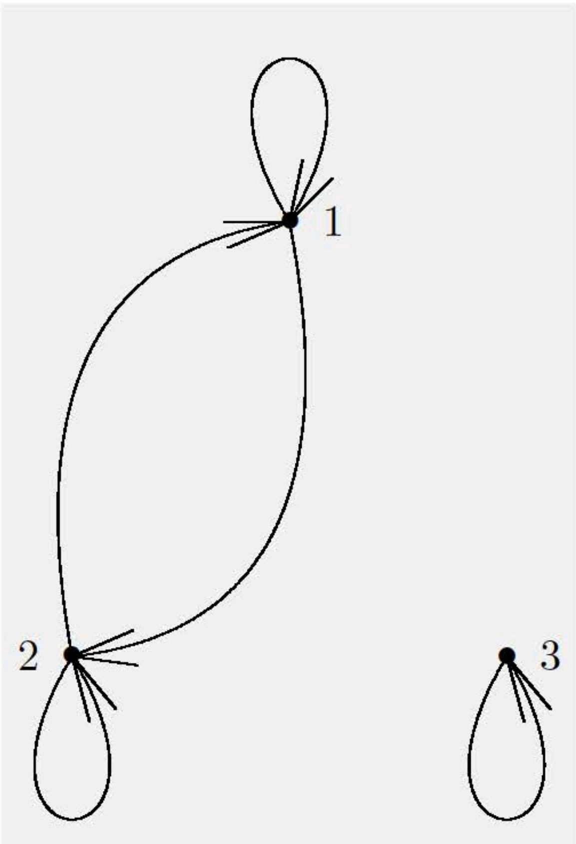
Ejemplo 6.22 Dibujar el digrafo de las relaciones siguientes:

(a) La relación $\mathscr{R} = \{(1,2),(2,1),(3,3),(1,1),(2,2)\}$ definida en el conjunto $A = \{1,2,3\}$.

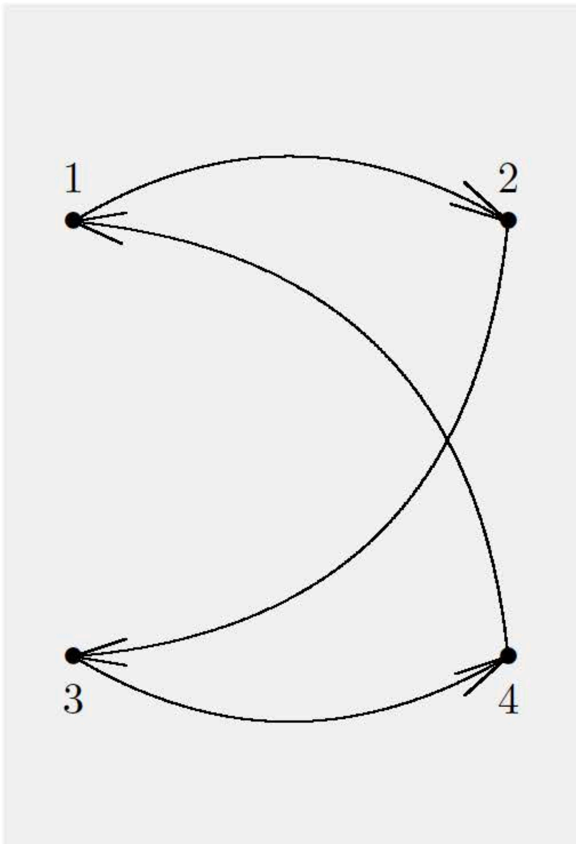
(b) La relación $\mathscr{R} = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,1)\}$ definida en $A = \{1,2,3,4\}$.

(c) La relación $\mathscr{R}$ sobre el conjunto $A = \{1,2,3,4\}$ definida por $x^2 \geqslant y$.

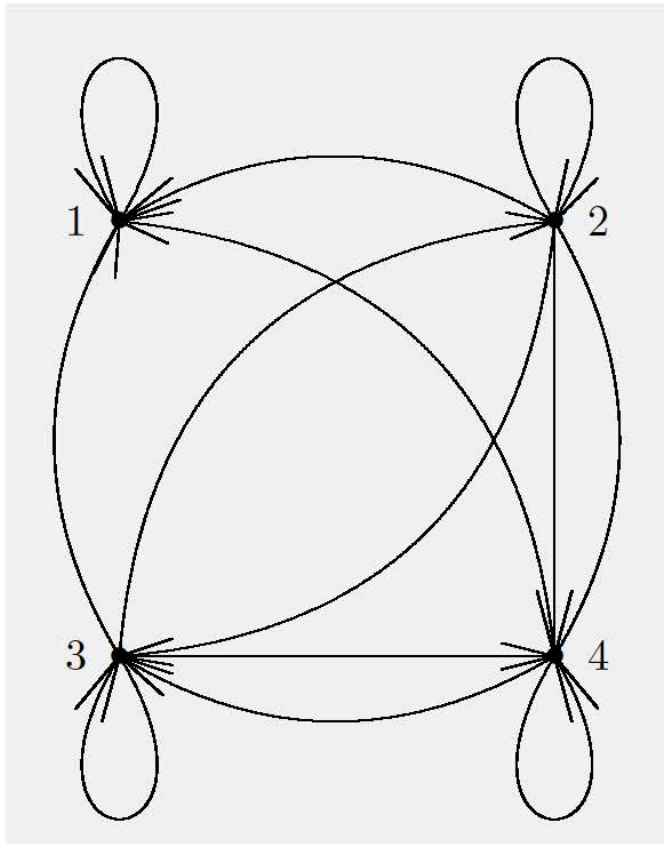
<u>Solución</u>



(a)

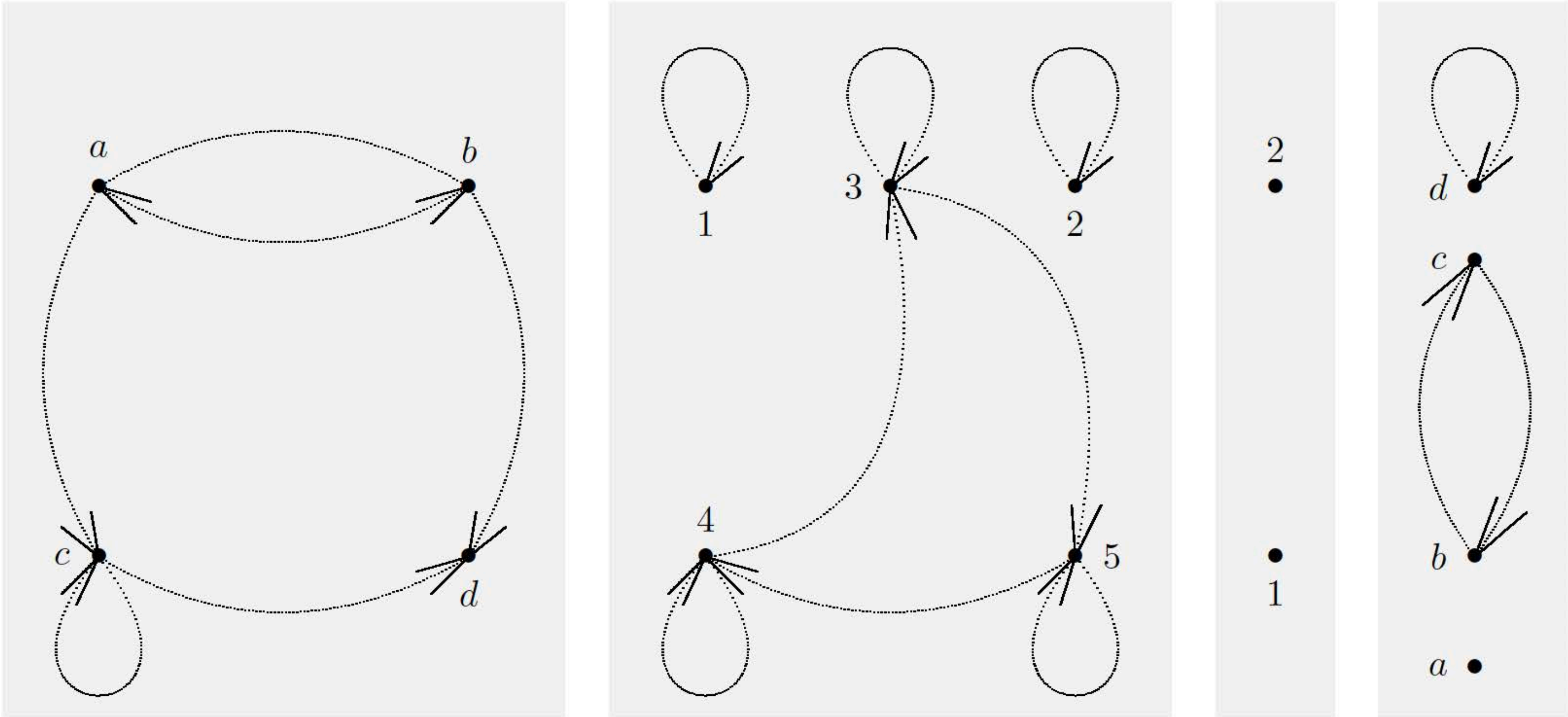


(b)



(c)

Ejemplo 6.24 Escribir la relación cuyos digrafos son los de la figura siguiente, como conjunto de pares ordenados.



(a) (b) (c) (d)

Solución

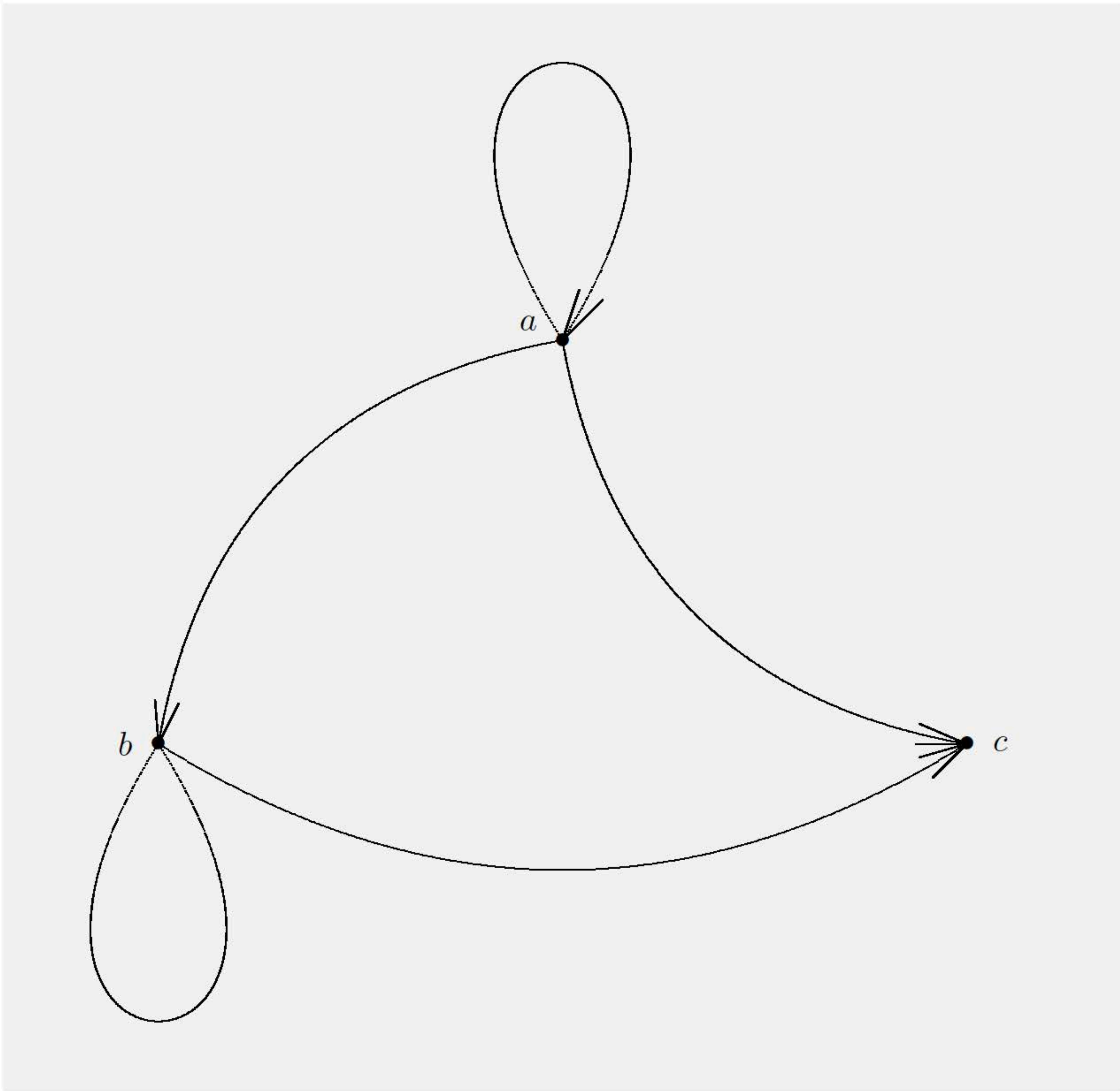
(a) $\mathscr{R} = \{(a,b),(a,c),(b,d),(b,a),(c,d),(c,c)\}$

(b) $\mathscr{R} = \{(1,1),(2,2),(3,3),(3,5),(4,3),(4,4),(5,4)(5,5)\}$

(c) $\mathscr{R} = \emptyset$

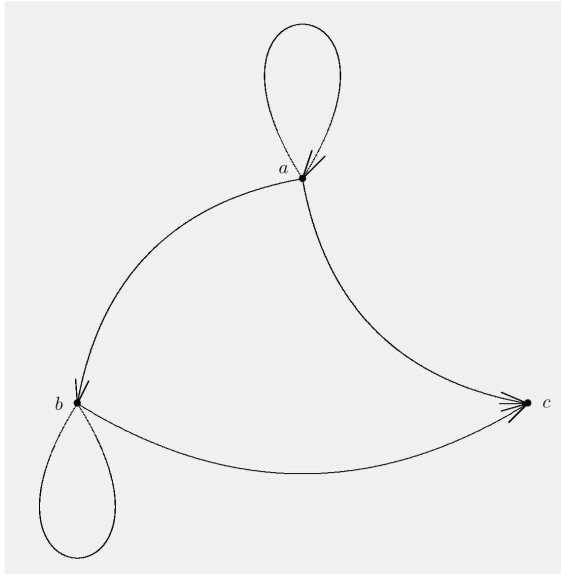
(d) $\mathscr{R} = \{(b,c),(c,b),(d,d)\}$

Ejemplo 6.20 Sea $\mathscr{R} = \{(a,b),(a,c),(b,c),(a,a),(b,b)\}$ una relación definida en $A = \{a,b,c\}$. Decir que propiedades tiene, dibujar un digrafo de la misma y escribir su matriz.



$$M_{\mathscr{R}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathscr{R} = \{(a,b),(a,c),(b,c),(a,a),(b,b)\}$ una relación definida en $A = \{a,b,c\}$



Solución

- No es reflexiva, ya que $(c,c) \notin \mathscr{R}$
- No es simétrica, ya que por ejemplo $(a,b) \in \mathscr{R}$ y, sin embargo $(b,a) \notin \mathscr{R}$.
- Es antisimétrica. En efecto,

  $$a \neq b \text{ y } b \not\mathscr{R}\, a$$

  $$a \neq c \text{ y } a \not\mathscr{R}\, b$$

  $$b \neq c \text{ y } c \not\mathscr{R}\, b$$

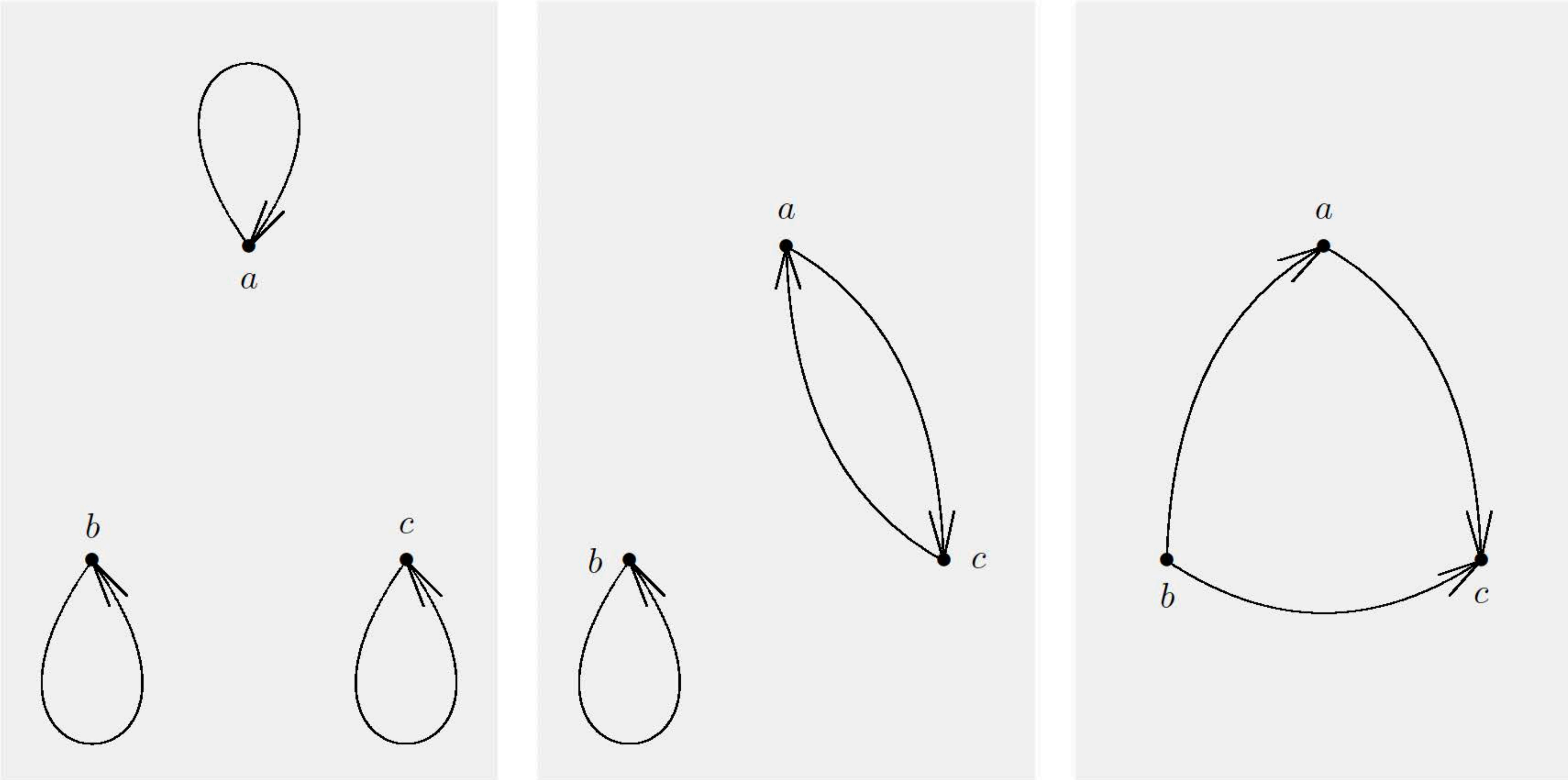
  luego,

  $$\forall x,y \in A\,(x \neq y \Longrightarrow x \not\mathscr{R}\, y \;\vee\; y \not\mathscr{R}\, x)$$

  y, por tanto, $\mathscr{R}$ es antisimétrica.
- Es transitiva, ya que

  $$\forall x,y,z \in A(x\mathscr{R}y \;\wedge\; y\mathscr{R}z \Longrightarrow x\mathscr{R}z)$$

Ejemplo 6.17 Estudiar las propiedades de las relaciones definidas en el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ cuyos digrafos son los de la figura siguiente.



$\mathscr{R}_1$ $\qquad$ $\mathscr{R}_2$ $\qquad$ $\mathscr{R}_3$

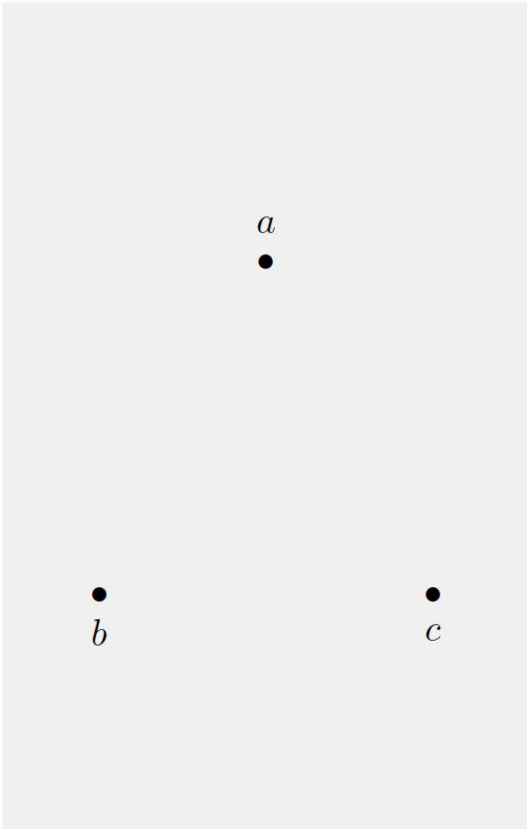
<u>Solución</u>

(a) $\mathscr{R}_1$ es la relación de igualdad sobre A. Es reflexiva, simétrica, antisimétrica y transitiva.

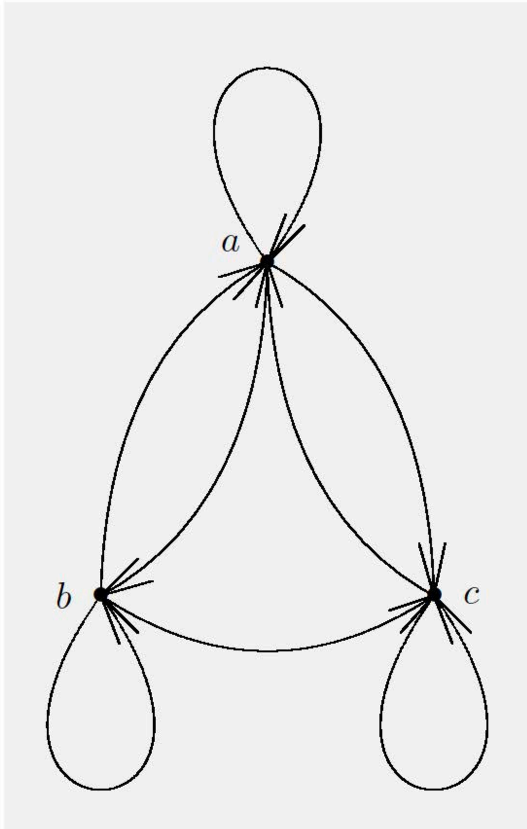
(b) $\mathscr{R}_2$ es simétrica. No es reflexiva, ni antisimétrica, ni transitiva.

(c) La relación $\mathscr{R}_3$ es antisimétrica y transitiva. No es reflexiva, ni simétrica.

Ejemplo 6.17 Estudiar las propiedades de las relaciones definidas en el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ cuyos digrafos son los de la figura siguiente.



$\mathscr{R}_4$



$\mathscr{R}_5$

(d) La relación $\mathscr{R}_4$ es la relación vacía. Es simétrica, antisimétrica, y transitiva, pero no es reflexiva.

(e) $\mathscr{R}_5$ es la relación universal. Es reflexiva, simétrica y transitiva, pero no es antisimétrica.

Sea $A = \{a, b, c\}$ y $R = \{(c, c), (a, b), (b, c), (a, c), (c, b), (b, b)\}$. ¿ Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

(a) R es reflexiva (b) R es simétrica (c) R es transitiva

Solución:

a) Falsa. Contraejemplo: $(a, a) \notin R$.

b) Falsa. Contraejemplo: se cumple $(a, b) \in R$ pero $(b, a) \notin R$.

c) Cierta. Todo los pares de la forma $(x, y) \in R$, $(y, z) \in R$ verifican $(x, z) \in R$. Para comprobarlo vamos a ver cules son estos pares:

- $(c, c) \in R$, $(c, c) \in R$ y se cumple $(c, c) \in R$.
- $(a, b) \in R$, $(b, c) \in R$ y se cumple $(a, c) \in R$.
- $(a, b) \in R$, $(b, b) \in R$ y se cumple $(a, b) \in R$.
- $(b, c) \in R$, $(c, c) \in R$ y se cumple $(b, c) \in R$.
- $(b, c) \in R$, $(c, b) \in R$ y se cumple $(b, b) \in R$.
- $(a, c) \in R$, $(c, c) \in R$ y se cumple $(a, c) \in R$.
- $(a, c) \in R$, $(c, b) \in R$ y se cumple $(a, b) \in R$.
- $(c, b) \in R$, $(b, c) \in R$ y se cumple $(c, c) \in R$.
- $(c, b) \in R$, $(b, b) \in R$ y se cumple $(c, b) \in R$.

En el conjunto $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ de los números naturales positivos definimos la relación

$$xRy \iff_{def} mcd(x, y) = 1$$

¿ Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

(a) R es reflexiva (b) R es simétrica (c) R es transitiva

Solución:

Según la definición de R, dos números naturales positivos están relacionados si y solo si son *primos entre sí.*

a) Falsa. Esta relación no es reflexiva pues $mcd(x, x) = 1$ si y solo si $x = 1$. Contraejemplo: $mcd(42, 42) = 42 \neq 1$.

b) Cierta. Sí que es simétrica porque por definición la operación del máximo común divisor es conmutativa, es decir , $mcd(x, y) = mcd(y, x)$ y por tanto $mcd(x, y) = 1 \iff mcd(y, x) = 1$. Esto justifica que la respuesta correcta es (b).

c) Falsa. Tampoco es transitiva, pues $xRy, yRz \not\Rightarrow xRz$. Contraejemplo, $mcd(4, 7) = 1$ y $mcd(7, 2) = 1$, pero $mcd(4, 2) = 2 \neq 1$.

Definimos una relación $F = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 2 * x + y = 16\}$. ¿ Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

(a) $dom(F) = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 16\}$
(b) $ran(F) = \{n \in \mathbb{N} \mid 0 \leq n \leq 28\}$
(c) $F \circ F = \{(4, 0), (5, 4), (6, 8), (7, 12), (8, 16)\}$

Solución:

La relación F es de hecho una *función parcial* de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ que podemos definir mediante la fórmula $F(x) = 16 - 2 * x$, obtenida al despejar y en la expresión del enunciado.

No es una función total porque la expresión $16 - 2 * x$ da un número negativo cuando $x > 8$. De aquí, $dom(F) = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 8\}$ y podemos descartar la respuesta (a).

Por otra parte, el rango de F está formado por los 9 valores obtenidos al sustituir los valores de 0 a 8 en lugar de x en la expresión $16 - 2 * x$, como se describe en la parte de la izquierda del siguiente diagrama. Por esta razón descartamos la respuesta (b), según la cual $ran(F)$ tendría 29 valores.

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \longrightarrow & 16 & & \\
1 & \longrightarrow & 14 & & \\
2 & \longrightarrow & 12 & & \\
3 & \longrightarrow & 10 & & \\
4 & \longrightarrow & 8 & \longrightarrow & 0 \\
5 & \longrightarrow & 6 & \longrightarrow & 4 \\
6 & \longrightarrow & 4 & \longrightarrow & 8 \\
7 & \longrightarrow & 2 & \longrightarrow & 12 \\
8 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 16
\end{array}$$

Finalmente, el diagrama anterior completo ilustra la composición de F consigo misma, obteniendo que $F \circ F$ es una función parcial de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ cuyo dominio son los números del 4 al 8 y cuyos pares están dados por $\{(4, 0), (5, 4), (6, 8), (7, 12), (8, 16)\}$. Esto justifica que (c) es la respuesta correcta.

Sea R una relación definida sobre $\mathbb{N}_1$ como:

$$xRy \Longleftrightarrow_{def} x \mid y$$

Estudia en cada caso qué propiedades cumple la relación, considerando reflexividad, simetría y transitividad.

Solución:

- *Reflexiva.* Sí.

  Para todo $x \in \mathbb{N}_1$ se cumple $x = 1 * x$, por lo que $x \mid x$ y por tanto $x\,R\,x$.

- *Simétrica.* No.

  Contraejemplo: se cumple $2\,R\,6$ porque $2 \mid 6$ pero no $6\,R\,2$ porque 6 no divide a 2.

- *Transitiva.* Sí.

  Tenemos que comprobar que si $a, b, c \in \mathbb{N}_1$ verifican $a \mid b$ y $b \mid c$, entonces $a \mid c$.

  De $a \mid b$ tenemos $b = k_1 * a$ para algún $k_1 \in \mathbb{Z}$, de $b \mid c$ que $c = k_2 * b$ para algún $k_2 \in \mathbb{Z}$, y sustituyendo b por $(k_1 * a)$ en ésta última: $c = k_2 * (k_1 * a) = (k_2 * k_1) * a$, lo que prueba $a \mid c$.

Sea R una relación definida sobre $\mathbb{N}_1$ como:

$$x\,R\,y \Longleftrightarrow_{def} x \mid y,\ x \neq y$$

Estudia qué propiedades cumple la relación, considerando reflexividad, simetría y transitividad.

Solución:

- *Reflexiva.* No.
  Contraejemplo: No se cumple $1\,R\,1$ porque no es cierto que $1 \neq 1$.
- *Simétrica.* No.
  Contraejemplo: se cumple $2\,R\,6$ porque $2 \mid 6, 2 \neq 6$, pero no se cumple $6\,R\,2$ porque 6 no divide a 2.
- *Transitiva.* Sí.
  Sean a, b, $c \in \mathbb{N}_1$ tales que $a \mid b$ con $a \neq b$, $b\,R\,c$ con $b \neq c$. Hay que probar que entonces $a \mid c$ con $a \neq c$.

  Ya hemos visto en el apartado anterior que de $a \mid b$, $b \mid c$ se tiene $a \mid c$. Falta por comprobar que de $a \neq b$, $b \neq c$ se tiene $a \neq c$. Lo hacemos por *reducción al absurdo*, viendo que $a = c$ lleva a una contradicción con las hipótesis. En efecto, si $a = c$, como sabemos que $a \mid b$ tenemos $c \mid b$, y de $c \mid b$ junto con la hipótesis $b \mid c$ llegamos a $b = c$, pero esto es una contradicción con la hipótesis $b \neq c$, por lo que debe ser $a \neq c$.

Sea R una relación definida sobre $\mathbb{N}_1$ como:

$$x\,R\,y \Longleftrightarrow_{def} x \neq y$$

Estudia qué propiedades cumple la relación, considerando reflexividad, simetría y transitividad.

Solución:

- *Reflexiva.* No.
  Contraejemplo. No se cumple $1\,R\,1$ porque no se tiene $1 \neq 1$.
- *Simétrica.* Sí.
  Si $x\,R\,y$ debe ser $x \neq y$, que es lo mismo que escribir $y \neq x$ es decir $y\,R\,x$.
- *Transitiva.* No.
  Contraejemplo: Se verifican $2\,R\,4$ y $4\,R\,2$, pero sin embargo no se cumple $2\,R\,2$.

Sea R definida sobre $\mathbb{N}_1$ como:

$$x\,R\,y \Longleftrightarrow_{def} x < y^2$$

Estudia qué propiedades cumple la relación, considerando reflexividad, simetría y transitividad.

Solución:

- *Reflexiva.* No.
  Contraejemplo: No se verifica que $1 < 1^2$ por lo que no se cumple $1\,R\,1$.
- *Simétrica.* No.
  Contraejemplo: Se cumple $1 < 2^2$ pero no $2 < 1^2$.
- *Transitiva.* No.
  Contraejemplo: Se verifica $8 < 3^2$ y $3 < 2^2$, pero no $8 < 2^2$.

Sea R definida sobre $\mathbb{N}_1$ como:

$$xRy \Longleftrightarrow_{def} y - x + 2 \text{ es un número primo}$$

Estudia qué propiedades cumple la relación, considerando reflexividad, simetría y transitividad.

Solución:

- *Reflexiva.* Sí.
  Para todo $x \in \mathbb{N}_1$ se tiene que $x - x + 2 = 2$, y 2 es un número primo.
- *Simétrica.* No.
  Contraejemplo: tomando $a = 3, b = 2$ tenemos que $a\,R\,b$ ($a - b + 2 = 3$, y 3 es un número primo), pero no se cumple $b\,R\,a$ porque $b - a + 2 = 1$ y 1 no es un número primo.
- *Transitiva.* No.
  Contraejemplo: tomando $a = 6, b = 5, c = 4$ tenemos $a\,R\,b$ porque $a - b + 2 = 3$, que $b\,R\,c$ porque $b - c + 2 = 3$, pero no $a\,R\,c$ porque $a - c + 2 = 4$ y 4 no es primo.

Sea R una relación definida sobre $\mathbb{N}_1$ como:

$$xRy \Longleftrightarrow_{def} |y-x|+2 \text{ es un número primo}$$

Estudia qué propiedades cumple la relación, considerando reflexividad, simetría y transitividad.

Solución:

- *Reflexiva.* Sí.
  Para todo $x \in \mathbb{N}_1$ se tiene que $\mid x-x \mid +2 = 2$, y 2 es un número primo.
- *Simétrica.* Sí.
  Sean a, b tales que aRb. Entonces $\mid a-b \mid +2$ es un número primo y por las propiedades del valor absoluto: $\mid a-b \mid \ +2 = \mid b-a \mid +2$ por lo que se cumple $b\,R\,a$.
- *Transitiva.* No.
  Contraejemplo: el mismo del apartado anterior.

Enumera el conjunto formado por todas las relaciones binarias sobre el conjunto $\{0,1\}$. Determina cuáles son reflexivas, cuáles son simétricas y cuáles son transitivas.

Solución:

Una relación binaria sobre $A = \{0,1\}$ es cualquier subconjunto $R \subseteq A \times A$, o dicho con otras palabras cualquier elemento de $R \in \mathcal{P}(A \times A)$. Se tiene que $A \times A$ tiene 4 elementos

$$A \times A = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$$

por lo que $\mathcal{P}(A)$ tendrá un total de $2^4 = 16$ elementos.

Vamos a ver en una tabla qué propiedades cumple cada una de estas 16 relaciones binarias:

	Reflexiva	Simétrica	Transitiva
$\emptyset$	No	Sí	Sí
$\{(0,0)\}$	No	Sí	Sí
$\{(0,1)\}$	No	No	Sí
$\{(1,0)\}$	No	No	Sí
$\{(1,1)\}$	No	Sí	Sí
$\{(0,0),(0,1)\}$	No	No	Sí
$\{(0,0),(1,0)\}$	No	No	Sí
$\{(0,0),(1,1)\}$	Sí	Sí	Sí
$\{(0,1),(1,0)\}$	No	Sí	No
$\{(0,1),(1,1)\}$	No	No	Sí
$\{(1,0),(1,1)\}$	No	No	Sí
$\{(0,0),(0,1),(1,0)\}$	No	Sí	No
$\{(0,0),(0,1),(1,1)\}$	Sí	No	Sí
$\{(0,0),(1,0),(1,1)\}$	Sí	No	Sí
$\{(0,1),(1,0),(1,1)\}$	No	Sí	No
$\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$	Sí	Sí	Sí

Por ejemplo el conjunto vacío es una relación binaria simétrica porque verifica que para todo par $a\,R\,b$ existe el simétrico $b\,R\,a$ por no existir $a\,R\,b$. Puede ayudar a entenderlo pensar que no es posible encontrar un contraejemplo.