Matemática Discreta y Lógica Matemática

Hoja 2 de ejercicios.

Facultad de Informática.

1. Sea $s_n = \sum_{i=1}^{n}(2i-1)$. Demuestra que para todo $n \geq 1$, $s_n = n^2$. *Pista:* usa la definición recursiva de s_n y razona por inducción sobre n.

2. Considera la definición recursiva de la sucesión de números de Fibonacci:

$$f_1 = 1,\ f_2 = 1, f_n = f_{n-2} + f_{n-1}(n \geq 3)$$

Demuestra que $f_n \leq n!$ para todo $n \geq 1$.

3. En los siguientes casos calcula, si es posible, los valores de s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, y si no es posible, explica por qué es incorrecta la definión recursiva de la sucesión s_n.

$$\begin{array}{llll} i) & s_0 = 1 & s_1 = 1 & s_n = s_{n-1} + 2s_{n-2}\ (n \geq 2) \\ ii) & s_0 = 1 & s_n = s_{n-1} + 2s_{n-2}\ (n \geq 1) & \\ iii) & s_0 = 0 & s_n = ns_{n-1}\ (n \geq 1) & \end{array}$$

4. Considera las funciones

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ f(n-1) + f(n-2) & \text{si } n > 1 \end{cases} \qquad g(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 3 & \text{si } n = 2 \\ g(n-1) + g(n-2) & \text{si } n > 2 \end{cases}$$

Usando inducción completa, demuestra que $g(n) = f(n) + f(n-2)$, para todo $n \geq 2$.

5. Considera la función $f : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ definida recursivamente como sigue:

$$f(1) = 3,\ f(2) = 5,\ f(n) = 3 * f(n-1) - 2 * f(n-2)\ (n \geq 3)$$

Razonando por inducción, demuestra que $f(n) = 2^n + 1$, para todo $n \geq 1$.

6. Demuestra por inducción, indicando qué tipo de inducción utilizas, que el cuadrado de un número impar es impar.

7. En los casos que siguen, encuentra una fórmula explícita que sirva para reemplazar la definición recursiva de s_n, y demuestra que es correcta.

$$i)\quad s_1 = 1, \qquad s_n = s_{n-1} + 3\ (n \geq 2) \qquad\qquad ii)\quad s_1 = 1, \qquad s_n = n^2 * s_{n-1}\ (n \geq 2)$$

8. Considera la funcion $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida recursivamente como sigue:

$$\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f(2n) = 4f(n),\ \text{para todo } n \geq 1 \\ f(2n+1) = 4f(n) + 4n + 1,\ \text{para todo } n \geq 0 \end{array}$$

Construye una tabla de valores de $f(n)$ para $n = 0, \ldots, 5$ y demuestra por inducción completa que $f(n) = n^2$ para todo n natural.

9. Considera la función $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida recursivamente por las dos ecuaciones siguientes: $f(0, m) = m$ y $f(n, m) = f(n-1, n * m)$. Supón m fijado arbitrariamente, y calcula razonadamente los valores para $f(0, m)$, $f(1, m)$, $f(2, m)$ y $f(3, m)$, de acuerdo con la definición de f.

10. En el problema anterior, conjetura una expresión explícita para el valor de $f(n, m)$ y demuéstrala por inducción sobre n. Observa en particular qué expresión obtienes para $f(n, 1)$. ¿Corresponde a alguna función conocida?