2.3 Leyes algebraicas de Boole.

Si T es un conjunto fijado y $A,B \subseteq T$ dos subconjuntos de T tenemos que $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ y $T \setminus A$ son subconjuntos de T .

Si $A,B \in \wp(T)$ entonces $A \cup B, A \cap B, T \setminus A \in \wp(T)$

Podemos ver la unión y la intersección como operaciones en $\wp(T)$.

Definición: Dados un subconjunto A de T , definimos el "complementario" de A en T como $T \setminus A$. Se denota por $\setminus A$.

Observación: en algunos libros se denota por A^c o por $\overline{A}$

Teorema: Dados $A,B,C \subseteq T$ tenemos

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	Asociativa	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
$A \cup B = B \cup A$	Conmutativa	$A \cap B = B \cap A$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Distributiva	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$\setminus (A \cup B) = (\setminus A) \cap (\setminus B)$	De Morgan	$\setminus (A \cap B) = (\setminus A) \cup (\setminus B)$
$A \cup A = A$	Idempotencia	$A \cap A = A$
$\setminus \setminus A = A$	Doble complementación	
$A \cup (B \cap A)$	Absorción	$A \cap (B \cup A)$
$A \cup \varnothing = A$		$A \cap \varnothing = \varnothing$
$A \cup T = T$		$A \cap T = A$
$A \cup (\setminus A) = T$	Complementación	$A \cap (\setminus A) = \varnothing$

Demostración: Para demostrar que $E=F$ hay que probar que

$x \in E \Rightarrow x \in F$ (es decir que $E \subseteq F$)

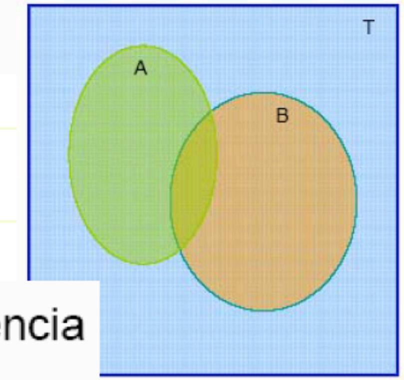
$x \in F \Rightarrow x \in E$ (es decir que $F \subseteq E$)

Demostración de que $\setminus(A \cup B)=(\setminus A) \cap(\setminus B)$:

$$x \in \setminus(A \cup B) \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A \text{ y } x \notin B \Rightarrow x \in(\setminus A) \text{ y } x \in(\setminus B) \Rightarrow x \in(\setminus A) \cap(\setminus B)$$

$$x \in(\setminus A) \cap(\setminus B) \Rightarrow x \in(\setminus A) \text{ y } x \in(\setminus B) \Rightarrow x \notin A \text{ y } x \notin B \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \in \setminus(A \cup B)$$

Observación: Intuitivamente podemos ver si una propiedad es verdad en los diagramas de Venn, pero no dan una demostración



Se puede ver (aunque no demostrar) que

$\setminus(A \cup B)$ coincide con $(\setminus A) \cap(\setminus B)$

Otra manera de demostrarlo es usando una tabla de pertenencia

Consideramos en una tabla todos los posibles casos de elementos de T en función de si pertenecen o no a los conjuntos A, B y C.

Ejemplo: ¿ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$?

Codificamos con: $0 = \notin$, $1 = \in$

A	B	C	A	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

Mirando las columnas de $A\cap(B\cup C)$ y $(A\cap B)\cup(A\cap C)$ comprobamos que los elementos que pertenecen a $A\cap(B\cup C)$ son los mismos que los que pertenecen a $(A\cap B)\cup(A\cap C)$. Por tanto $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

¿$(A\cup C)\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)$? Hacemos una tabla de pertenencia

A	B	C	$A\cup C$	$B\cup C$	$(A\cup C)\setminus(B\cup C)$	$A\setminus B$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	0	0

A	B	C	$A\cup C$	$B\cup C$	$(A\cup C)\setminus(B\cup C)$	$A\setminus B$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	0	0

Como las columnas de $(A\cup C)\setminus(B\cup C)$ y $A\setminus B$ no coinciden tenemos que

$(A\cup C)\setminus(B\cup C)\neq(A\setminus B)$.

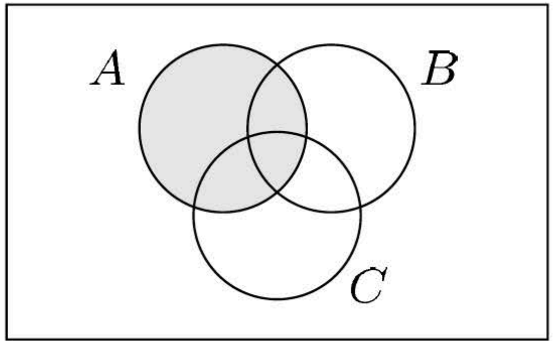
Pero sí es verdad que siempre que un elemento pertenece a $(A\cup C)\setminus(B\cup C)$ entonces también pertenece a $A\setminus B$. Por tanto $(A\cup C)\setminus(B\cup C)\subseteq(A\setminus B)$.

Para cada uno de los dos apartados siguientes se pide estudiar si la igualdad $L = R$ que se indica (siendo L y R expresiones construidas por medio de operaciones entre tres conjuntos A, B y C) es válida siempre, cualquiera que sean los conjuntos A, B y C. En caso afirmativo, se pide demostrarlo. En caso negativo se pide construir un contraejemplo y razonar si alguna de las dos inclusiones $L \subseteq R$ o $L \supseteq R$ es válida siempre.

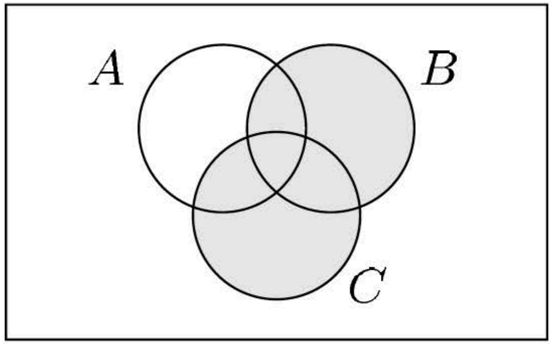
a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$

b) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$

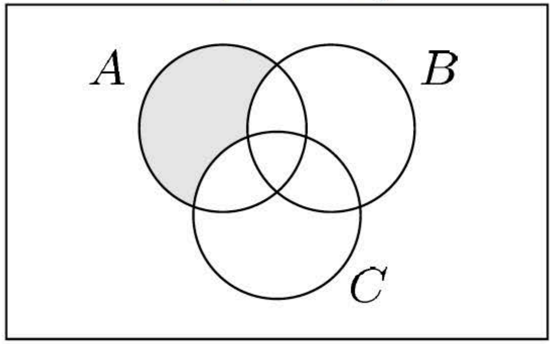
A



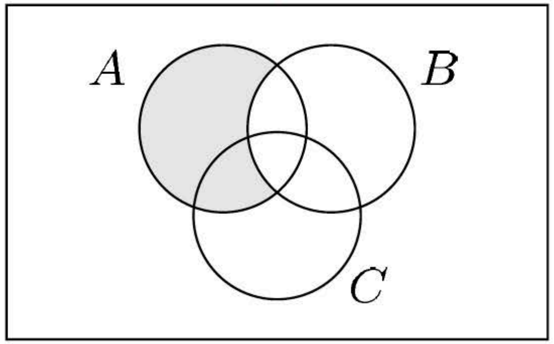
$B \cup C$



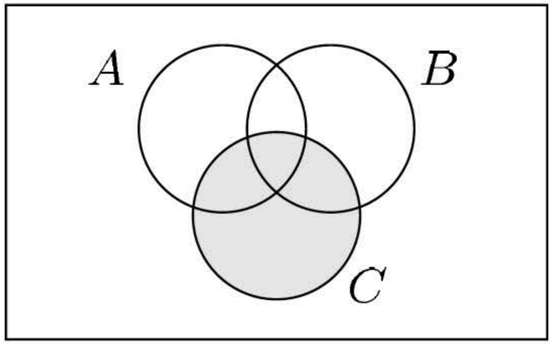
$A \setminus (B \cup C)$



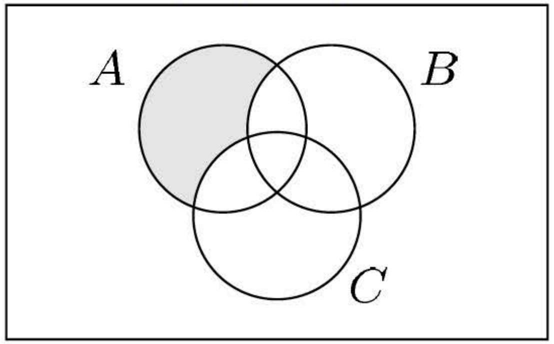
$A \setminus B$



C



$(A \setminus B) \setminus C$



se ve que la igualdad de conjuntos $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$ es válida, como demuestra la siguiente cadena de equivalencias:

$$\begin{aligned} x \in A \setminus (B \cup C) &\iff x \in A \text{ y } x \notin B \cup C \\ &\iff x \in A \text{ y } x \notin B \text{ y } x \notin C \\ &\iff x \in (A \setminus B) \text{ y } x \notin C \\ &\iff x \in (A \setminus B) \setminus C. \end{aligned}$$

Otra posible demostración es mediante una tabla de pertenencias, como la siguiente, donde 1 indica que el elemento pertenece al conjunto correspondiente y 0 que no.

A	B	C	$B \cup C$	$A \setminus (B \cup C)$	$A \setminus B$	$(A \setminus B) \setminus C$
1	1	1	1	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

Como todos los valores en la quinta y la séptima columna coinciden fila a fila, se tiene la igualdad deseada.

Para cada uno de los dos apartados siguientes se pide estudiar si la igualdad $L = R$ que se indica (siendo L y R expresiones construidas por medio de operaciones entre tres conjuntos A, B y C) es válida siempre, cualquiera que sean los conjuntos A, B y C. En caso afirmativo, se pide demostrarlo. En caso negativo se pide construir un contraejemplo y razonar si alguna de las dos inclusiones $L \subseteq R$ o $L \supseteq R$ es válida siempre.

a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$

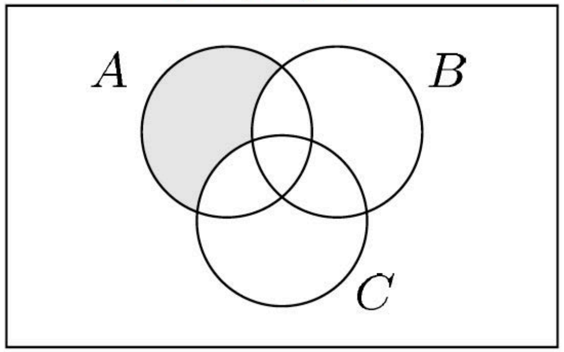
b) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$

b) Dibujando los correspondientes diagramas de Venn,

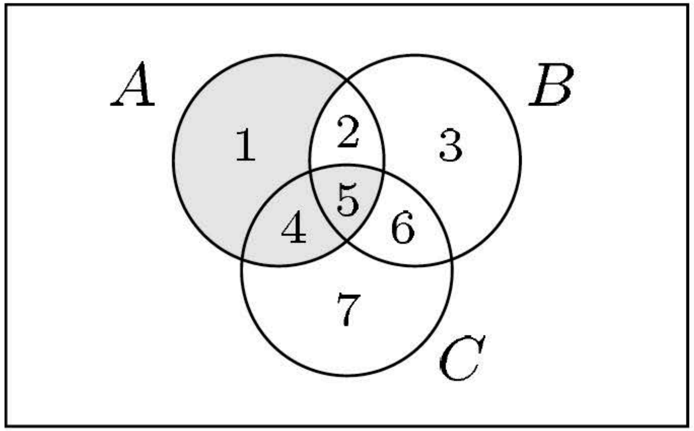
se ve que la igualdad de conjuntos $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$ *no* es válida.

A partir del diagrama construimos fácilmente un contraejemplo, asignando un número a cada una de las 7 regiones como sigue:

$(A \setminus B) \setminus C$



$A \setminus (B \setminus C)$



$$\begin{aligned}
A &= \{1,2,4,5\} \\
B &= \{2,3,5,6\} \\
C &= \{4,5,6,7\} \\
A \setminus B &= \{1,4\} \\
B \setminus C &= \{2,3\} \\
(A \setminus B) \setminus C &= \{1\} \\
A \setminus (B \setminus C) &= \{1,4,5\}.
\end{aligned}$$

Si hacemos una tabla de pertenencias para este caso obtenemos la siguiente:

A	B	C	$B \setminus C$	$A \setminus (B \setminus C)$	$A \setminus B$	$(A \setminus B) \setminus C$
1	1	1	0	1	0	0
1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

en la que podemos observar que la quinta y la séptima columna no coinciden en la primera y tercera filas.

$$\begin{aligned}
x \in (A \setminus B) \setminus C \quad & \Longleftrightarrow \quad x \in A \setminus B \ \text{ y } \ x \notin C \\
& \Longleftrightarrow \quad x \in A \ \text{ y } \ x \notin B \ \text{ y } \ x \notin C \\
& \Longrightarrow \quad x \in A \ \text{ y } \ x \notin B \\
& \Longrightarrow \quad x \in A \ \text{ y } \ x \notin B \setminus C \\
& \Longleftrightarrow \quad x \in A \setminus (B \setminus C)
\end{aligned}$$

Para cada uno de los dos apartados siguientes se pide estudiar si la igualdad $L = R$ que se indica (siendo L y R expresiones construidas por medio de operaciones entre tres conjuntos A, B y C) es válida siempre, cualquiera que sean los conjuntos A, B y C. En caso afirmativo, se pide demostrarlo. En caso negativo se pide construir un contraejemplo y razonar si alguna de las dos inclusiones $L \subseteq R$ o $L \supseteq R$ es válida siempre.

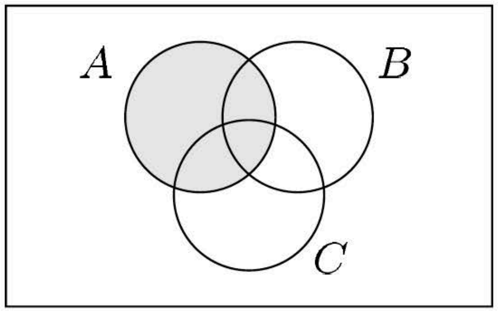
a) $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$

b) $A \cup (B \oplus C) = (A \cup B) \oplus (A \cup C)$

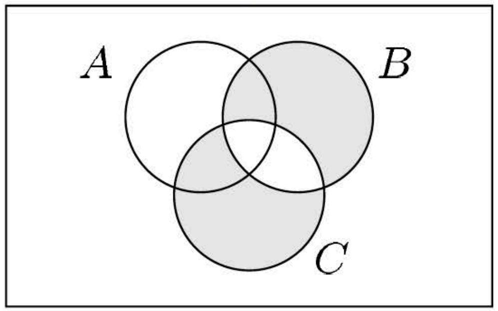
Solución:

a) Dibujamos primero los correspondientes diagramas de Venn:

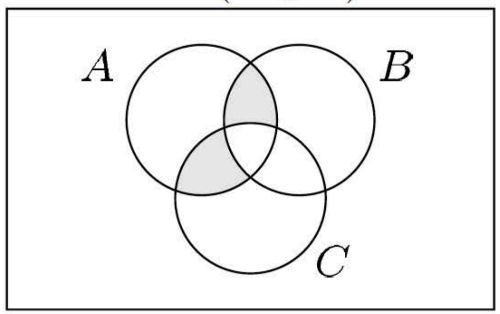
A



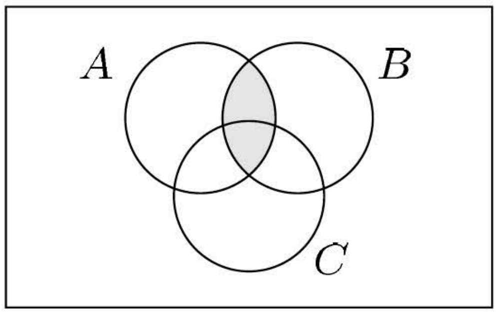
$B \oplus C$



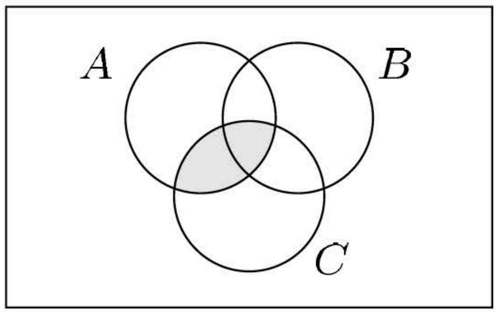
$A \cap (B \oplus C)$



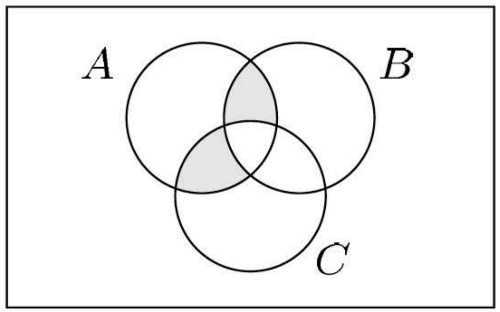
$A \cap B$



$A \cap C$



$(A \cap B) \oplus (A \cap C)$



Así vemos que la igualdad de conjuntos $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$ es válida, como demuestra la siguiente cadena de equivalencias:

$$
\begin{aligned}
x \in A \cap (B \oplus C) &\iff x \in A \text{ y } x \in B \oplus C \\
&\iff x \in A \text{ y } ((x \in B \text{ y } x \notin C) \text{ o } (x \notin B \text{ y } x \in C)) \\
&\iff (x \in A \text{ y } x \in B \text{ y } x \notin C) \text{ o } (x \in A \text{ y } x \notin B \text{ y } x \in C) \\
&\iff (x \in A \cap B \text{ y } x \notin C) \text{ o } (x \in A \cap C \text{ y } x \notin B) \\
&\iff (x \in A \cap B \text{ y } x \notin A \cap C) \text{ o } (x \in A \cap C \text{ y } x \notin A \cap B) \\
&\iff x \in (A \cap B) \oplus (A \cap C)
\end{aligned}
$$

Otra posible demostración es mediante una tabla de pertenencias, como la siguiente, donde 1 indica que el elemento pertenece al conjunto correspondiente y 0 que no.

A	B	C	$B \oplus C$	$A \cap (B \oplus C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \oplus (A \cap C)$
1	1	1	0	0	1	1	0
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

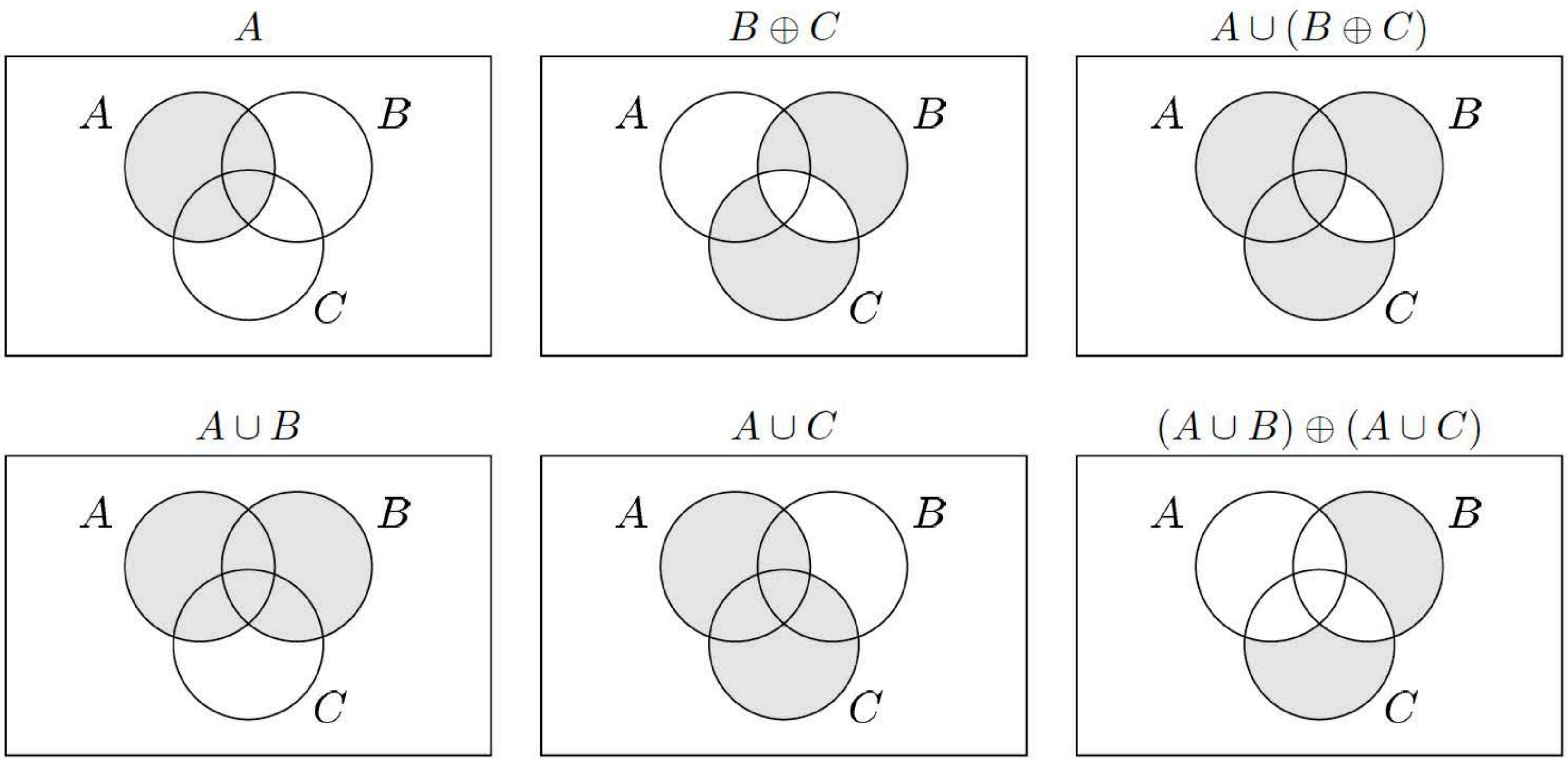
Como todos los valores en la quinta y la octava columna coinciden fila a fila, se ha demostrado la igualdad deseada.

Para cada uno de los dos apartados siguientes se pide estudiar si la igualdad $L = R$ que se indica (siendo L y R expresiones construidas por medio de operaciones entre tres conjuntos A, B y C) es válida siempre, cualquiera que sean los conjuntos A, B y C. En caso afirmativo, se pide demostrarlo. En caso negativo se pide construir un contraejemplo y razonar si alguna de las dos inclusiones $L \subseteq R$ o $L \supseteq R$ es válida siempre.

a) $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$

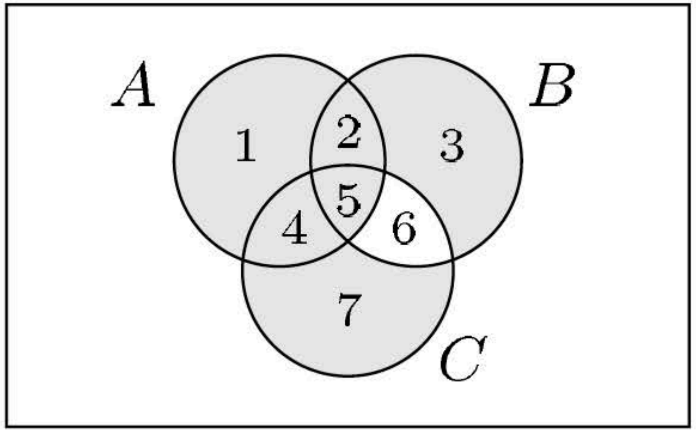
b) $A \cup (B \oplus C) = (A \cup B) \oplus (A \cup C)$

b) Dibujando los correspondientes diagramas de Venn,



se ve que la igualdad de conjuntos $A \cup (B \oplus C) = (A \cup B) \oplus (A \cup C)$ *no* es válida.

A partir del diagrama construimos fácilmente un contraejemplo, asignando un número a cada una de las 7 regiones como sigue:



$$
\begin{aligned}
A &= \{1,2,4,5\} \\
B &= \{2,3,5,6\} \\
C &= \{4,5,6,7\} \\
B \oplus C &= \{2,3,4,7\} \\
A \cup B &= \{1,2,3,4,5,6\} \\
A \cup C &= \{1,2,4,5,6,7\} \\
A \cup (B \oplus C) &= \{1,2,3,4,5,7\} \\
(A \cup B) \oplus (A \cup C) &= \{3,7\}.
\end{aligned}
$$

La correspondiente tabla de pertenencias es la siguiente:

A	B	C	$B \oplus C$	$A \cup (B \oplus C)$	$A \cup B$	$A \cup C$	$(A \cup B) \oplus (A \cup C)$
1	1	1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	1	1	1	0
1	0	1	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	1	1	0
0	1	0	1	1	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0

Obviamente la quinta y la octava columna no coinciden en las filas primera a cuarta.

A partir del diagrama de Venn (porque las dos regiones sombreadas en el diagrama para el lado derecho de la igualdad propuesta también están sombreadas en el diagrama para el lado izquierdo de esa igualdad) o de la tabla de pertenencias (porque cada 1 en la octava columna también corresponde a un 1 en la misma fila de la quinta columna), se puede observar que el lado derecho $(A \cup B) \oplus (A \cup C)$ está incluido en la izquierdo $A \cup (B \oplus C)$. En efecto,

$$\begin{aligned}
x \in (A \cup B) \oplus (A \cup C) \quad &\Longleftrightarrow \quad (x \in A \cup B \ \text{ y } \ x \notin A \cup C) \ \text{ o } \ (x \notin A \cup B \ \text{ y } \ x \in A \cup C) \\
&\Longleftrightarrow \quad (x \in B \ \text{ y } \ x \notin A \ \text{ y } \ x \notin C) \ \text{ o } \ (x \in C \ \text{ y } \ x \notin A \ \text{ y } \ x \notin B) \\
&\Longleftrightarrow \quad x \notin A \ \text{ y } \ ((x \in B \ \text{ y } \ x \notin C) \ \text{ o } \ (x \in C \ \text{ y } \ x \notin B)) \\
&\Longleftrightarrow \quad x \notin A \ \text{ y } \ x \in B \oplus C \\
&\Longrightarrow \quad x \in B \oplus C \\
&\Longrightarrow \quad x \in A \ \text{ o } \ x \in B \oplus C \\
&\Longleftrightarrow \quad x \in A \cup (B \oplus C)
\end{aligned}$$

Notemos que no todos los pasos son equivalencias, sino que hay algunas implicaciones, de forma que se justifica una inclusión de conjuntos pero no una igualdad. En este ejercicio la inclusión estricta que hemos obtenido es $(A \cup B) \oplus (A \cup C) \subset A \cup (B \oplus C)$.

Usa las leyes de Boole para demostrar las igualdades que siguen:

a) $\backslash(A \cup (B \cap C)) = (\backslash C \cup \backslash B) \cap \backslash A$

b) $\backslash(\backslash(A \cup B) \cap C) = (\backslash C \cup B) \cup A$

c) $(\backslash A \cup B) \cap A = A \cap B$

d) $\backslash(\backslash A \cup B) \cup B = A \cup B$

e) $\backslash(\backslash A \cup B) \cup A = A.$

Solución:

$$\begin{array}{lcll}
a)\ \backslash(A \cup (B \cap C)) & = & \backslash A \cap \backslash(B \cap C) & \text{De Morgan} \\
 & = & (\backslash B \cup \backslash C) \cap \backslash A & \text{De Morgan y Conmutativa} \\
 & = & (\backslash C \cup \backslash B) \cap \backslash A & \text{Conmutativa.}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcll}
b)\ \backslash(\backslash(A \cup B) \cap C) & = & \backslash\backslash(A \cup B) \cup \backslash C & \text{De Morgan} \\
 & = & (A \cup B) \cup \backslash C & \text{Doble Complementación} \\
 & = & (\backslash C \cup B) \cup A & \text{Asociativa y Conmutativa.}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcll}
c)\ (\backslash A \cup B) \cap A & = & (\backslash A \cap A) \cup (B \cap A) & \text{Distributiva y Conmutativa} \\
 & = & \emptyset \cup (B \cap A) & \text{Complementación y Conmutativa} \\
 & = & A \cap B & \text{Conjunto vacío y Conmutativa.}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcll}
d)\ \backslash(\backslash A \cup B) \cup B & = & (A \cap \backslash B) \cup B & \text{De Morgan y Doble Complementación} \\
 & = & (A \cup B) \cap (\backslash B \cup B) & \text{Distributiva y Conmutativa} \\
 & = & (A \cup B) \cap \mathcal{U} & \text{Conmutativa y Complementación} \\
 & = & A \cup B & \mathcal{U}\ \text{(leyes del universal).}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcll}
e)\ \backslash(\backslash A \cup B) \cup A & = & (A \cap \backslash B) \cup A & \text{De Morgan y Doble Complementación} \\
 & = & A & \text{Absorción y Conmutativa.}
\end{array}$$

Dados un conjunto A y una familia no vacía $\mathcal{C}$ de conjuntos, demuestra:

$a)$ $A \setminus (\bigcup \mathcal{C}) = \bigcap \{A \setminus C \mid C \in \mathcal{C}\}$ $b)$ $(\bigcup \mathcal{C}) \setminus A = \bigcup \{C \setminus A \mid C \in \mathcal{C}\}$
$c)$ $A \setminus (\bigcap \mathcal{C}) = \bigcup \{A \setminus C \mid C \in \mathcal{C}\}$ $d)$ $(\bigcap \mathcal{C}) \setminus A = \bigcap \{C \setminus A \mid C \in \mathcal{C}\}$.

Solución:

$$
\begin{aligned}
a)\ x \in A \setminus (\textstyle\bigcup \mathcal{C}) \quad &\Longleftrightarrow \quad x \in A,\ x \notin \textstyle\bigcup \mathcal{C} \\
&\Longleftrightarrow \quad x \in A,\ x \notin C \text{ para todo } C \in \mathcal{C} \\
&\Longleftrightarrow \quad x \in A \setminus C \text{ para todo } C \in \mathcal{C} \\
&\Longleftrightarrow \quad x \in \textstyle\bigcap \{A \setminus C | C \in \mathcal{C}\}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b)\ x \in (\textstyle\bigcup \mathcal{C}) \setminus A \quad &\Longleftrightarrow \quad x \in \textstyle\bigcup \mathcal{C},\ x \notin A \\
&\Longleftrightarrow \quad x \in C, \text{ para algún } C \in \mathcal{C},\ x \notin A \\
&\Longleftrightarrow \quad x \in C \setminus A \text{ para algún } C \in \mathcal{C} \\
&\Longleftrightarrow \quad x \in \textstyle\bigcup \{C \setminus A | C \in \mathcal{C}\}.
\end{aligned}
$$

Dados un conjunto A y una familia no vacía $\mathcal{C}$ de conjuntos, demuestra:

$a)$ $A \setminus (\bigcup \mathcal{C}) = \bigcap \{A \setminus C \mid C \in \mathcal{C}\}$ $\qquad$ $b)$ $(\bigcup \mathcal{C}) \setminus A = \bigcup \{C \setminus A \mid C \in \mathcal{C}\}$

$c)$ $A \setminus (\bigcap \mathcal{C}) = \bigcup \{A \setminus C \mid C \in \mathcal{C}\}$ $\qquad$ $d)$ $(\bigcap \mathcal{C}) \setminus A = \bigcap \{C \setminus A \mid C \in \mathcal{C}\}$.

Solución:

$$
\begin{aligned}
c)\ x \in A\setminus(\textstyle\bigcap \mathcal{C}) \quad &\iff \quad x \in A,\ x \notin \textstyle\bigcap \mathcal{C} \\
&\iff \quad x \in A,\ x \notin C \text{ para algún } C \in \mathcal{C} \\
&\iff \quad x \in A\setminus C \text{ para algún } C \in \mathcal{C} \\
&\iff \quad x \in \textstyle\bigcup \{A\setminus C | C \in \mathcal{C}\}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d)\ x \in (\textstyle\bigcap \mathcal{C})\setminus A \quad &\iff \quad x \in \textstyle\bigcap \mathcal{C},\ x \notin A \\
&\iff \quad \text{para todo } C \in \mathcal{C},\ x \in C,\ x \notin A \\
&\iff \quad x \in C\setminus A \text{ para todo } C \in \mathcal{C} \\
&\iff \quad x \in \textstyle\bigcap \{C\setminus A | C \in \mathcal{C}\}.
\end{aligned}
$$

Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos familias no vacías de conjuntos. Demuestra las igualdades:

a) $(\bigcup \mathcal{C}) \cup (\bigcup \mathcal{D}) = \bigcup\{C \cup D \mid C \in \mathcal{C}, D \in \mathcal{D}\}$

b) $(\bigcup \mathcal{C}) \cap (\bigcup \mathcal{D}) = \bigcup\{C \cap D \mid C \in \mathcal{C}, D \in \mathcal{D}\}$

c) $(\bigcap \mathcal{C}) \cup (\bigcap \mathcal{D}) = \bigcap\{C \cup D \mid C \in \mathcal{C}, D \in \mathcal{D}\}$

d) $(\bigcap \mathcal{C}) \cap (\bigcap \mathcal{D}) = \bigcap\{C \cap D \mid C \in \mathcal{C}, D \in \mathcal{D}\}$.

Solución:

a) $\bigcup \mathcal{C} = \{x \mid x \in C \text{ para algún } C \in \mathcal{C}\}$,
$\bigcup \mathcal{D} = \{x \mid x \in D \text{ para algún } D \in \mathcal{D}\}$.

$$\begin{aligned}\bigcup \mathcal{C} \cup \bigcup \mathcal{D} \quad &= \{x \mid x \in C \text{ para algún } C \in \mathcal{C} \text{ ó } x \in D \text{ para algún } D \in \mathcal{D}\ \} \\ &= \bigcup\{C \cup D \mid C \in \mathcal{C},\ D \in \mathcal{D}\}.\end{aligned}$$

b) Probamos $x \in (\bigcup \mathcal{C}) \cap (\bigcup \mathcal{D}) \iff x \in \bigcap\{C \cup D \mid C \in \mathcal{C}, D \in \mathcal{D}\}$.

$$\begin{aligned}x \in (\bigcup \mathcal{C}) \cap (\bigcup \mathcal{D}) \quad &\iff \quad x \in \bigcup \mathcal{C},\ x \in \bigcup \mathcal{D} \\ &\iff \quad \text{existe algún } C \in \mathcal{C} \text{ tal que } x \in C \text{ y existe algún } D \in \mathcal{D} \\ & \quad \text{tal que } x \in D \\ &\iff \quad \text{existe algún } C \in \mathcal{C} \text{ y algún } D \in \mathcal{D} \text{ tales que } x \in C \cap D \\ &\iff \quad x \in \bigcup\{C \cap D \mid C \in \mathcal{C},\ D \in \mathcal{D}\}.\end{aligned}$$

Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos familias no vacías de conjuntos. Demuestra las igualdades:

a) $(\bigcup\mathcal{C}) \cup (\bigcup\mathcal{D}) = \bigcup\{C \cup D \mid C \in \mathcal{C}, D \in \mathcal{D}\}$

b) $(\bigcup\mathcal{C}) \cap (\bigcup\mathcal{D}) = \bigcup\{C \cap D \mid C \in \mathcal{C}, D \in \mathcal{D}\}$

c) $(\bigcap\mathcal{C}) \cup (\bigcap\mathcal{D}) = \bigcap\{C \cup D \mid C \in \mathcal{C}, D \in \mathcal{D}\}$

d) $(\bigcap\mathcal{C}) \cap (\bigcap\mathcal{D}) = \bigcap\{C \cap D \mid C \in \mathcal{C}, D \in \mathcal{D}\}$.

c) Probamos $x \notin (\bigcap\mathcal{C}) \cup (\bigcap\mathcal{D}) \iff x \notin \bigcap\{C \cup D \,|\, C \in \mathcal{C},\ D \in \mathcal{D}\}$.

$$
\begin{array}{rcl}
x \notin (\bigcap\mathcal{C}) \cup (\bigcap\mathcal{D}) & \iff & x \notin \bigcap\mathcal{C},\ x \notin \bigcap\mathcal{D} \\
& \iff & \text{existe algún } C \in \mathcal{C} \text{ tal que } x \notin C \text{ y existe algún } D \in \mathcal{D} \\
& & \text{tal que } x \notin D \\
& \iff & \text{existe algún } C \in \mathcal{C} \text{ y algún } D \in \mathcal{D} \text{ tales que } x \notin (C \cup D) \\
& \iff & x \notin \bigcap\{C \cup D \,|\, C \in \mathcal{C},\ D \in \mathcal{D}\}.
\end{array}
$$

d) Claro a partir de las definiciones, como en el apartado *a*).