Facultad de Ciencias MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

Facultad de Informática

Ejercicios de Repaso de la Asignatura (Parte 2)
Enunciados

Rafael del Vado Vírseda

Matemática Discreta y Lógica Matemática I

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Curso 2020-2021

Sea f una función definida de la siguiente forma: $f(1) = 1$, $f(n) = 2f(n-1) + 1$ para $n \geq 2$. Deduce una expresión explícita que devuelva el valor de $f(n)$ para cualquier $n \geq 1$.

[**1.5 puntos**] Dada la siguiente sucesión recurrente:

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ a_{n/2}a_{n/2} & \text{si } n > 0 \quad n \text{ par} \\ 2a_{n-1} & \text{si } n > 0 \quad n \text{ impar} \end{cases}$$

Demuestra por inducción que para todo $n \geq 0$ se cumple $a_n = 2^n$. Indica el tipo de inducción que utilizas.

$a)$ Sea $k \in \mathbb{Z}^+$. Demuestra que si $mcd(a,b) = d$ entonces $mcd(ka, kb) = kd$

$b)$ Demuestra que si $mcd(a,b) = d$ entonces $mcd(a/d, b/d) = 1$

Sean $a, b \in \mathbb{Z}^+$ tales que $mcd(a,b) = 1$ y sea $c \in \mathbb{Z}$ divisor de $a+b$. Demuestra que $mcd(c,a) = mcd(c,b) = 1$

Dados cuatro conjuntos A, B, C y D, demuestra:

a) $C \neq \emptyset$ y $A \times C \subseteq B \times C \Longrightarrow A \subseteq B$

b) $C \neq \emptyset$ y $C \times A \subseteq C \times B \Longrightarrow A \subseteq B$

c) $(A \times B) \setminus (C \times D) = ((A \setminus C) \times B) \cup (A \times (B \setminus D))$

La *diferencia simétrica* entre dos conjuntos A y B se define como

$$A \oplus B \overset{\text{def}}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Demuestra que esta operación es conmutativa y asociativa; es decir, las igualdades

$$A \oplus B = B \oplus A \qquad\qquad A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$$

son siempre válidas.

Estudia si la diferencia simétrica cumple o no las propiedades que siguen. En cada caso, da una demostración o un contraejemplo.

a) $A \oplus (B \cap C) = (A \oplus B) \cap (A \oplus C)$

b) $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$

c) $A \oplus (A \oplus A) = A$

d) $A \subseteq B \implies A \oplus C \subseteq B \oplus C$

Sea $\mathcal{F} = \{\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{N} \mid X\ finito\}$. Sea $f : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(A) =$ suma de los elementos pares de A.

a) ¿Es f inyectiva? ¿Es f suprayectiva? ¿Es f biyectiva?

b) Calcula el conjunto $f^{-1}(6)$. ¿Cuántos elementos tiene?

Sea $\mathcal{F} = \{\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{N} \mid X\ finito\}$. Sea $f : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida como $f(A) = max(A) + min(A)$.

a) ¿Es f suprayectiva? ¿Es f inyectiva ? ¿Es f biyectiva?

b) Calcula el conjunto $f^{-1}(5)$ ¿Cuántos elementos tiene?

c) Para todo $n \in \mathbb{N}$, ¿Qué tamaño tiene el conjunto $f^{-1}(n)$? ¿Por qué?

Sea $\mathcal{F} = \{\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{N} \mid X\ finito\}$. Sea $F : \mathcal{F} \to \mathbb{N}$ definida por $F(A) =$ suma de los elementos impares de A.

a) Calcula $F(A_n)$, siendo $n \geq 1$ y $A_n = \{0, 1, 2, \ldots, 2 * n - 1\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 2 * n\}$.

b) Demuestra que el rango de F es $\mathbb{N} \setminus \{2\}$.

c) Demuestra que F no es inyectiva.

d) Calcula el conjunto $F^{-1}(8)$ ¿cuántos elementos tiene?

Demuestra que los siguientes conjuntos son numerables. Indica si alguno de ellos es finito.

$$
\begin{array}{lcl}
\mathcal{F}_n & = & \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid \; \mid X \mid \; = n\} \qquad \text{(siendo } n \in \mathbb{N}, \text{ fijo)} \\
\mathcal{F} & = & \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid X \text{ es finito}\} \\
\mathcal{CF} & = & \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid \mathbb{N} \setminus X \text{ es finito}\}
\end{array}
$$

Usando la técnica de diagonalización de Cantor, demuestra:

a) $(\mathbb{N} \to \mathbb{N})$ no es numerable.

b) $(\mathbb{N} \to A)$ no es numerable, siempre que A tenga dos o más elementos.

Demuestra que el conjunto formado por todos los polinomios con coeficientes enteros y una indeterminada x es infinito numerable.

En el conjunto $\mathbb{R}^2$ considera la relación binaria $\sim$ definida por

$$(x, y) \sim (z, w) \iff x^2 + y^2 = z^2 + w^2.$$

(a) Demuestra que $\sim$ es una relación de equivalencia.

(b) En el conjunto cociente $\mathbb{R}^2/\sim$ se define la relación

$$[(x, y)] \sqsubseteq [(z, w)] \iff x^2 + y^2 \leq z^2 + w^2.$$

Demuestra que está bien definida, es decir, que es independiente de los representantes elegidos.

(c) Demuestra que $\sqsubseteq$ es una relación de orden.

Sea $A = \{0, 1, 2\} \times \{2, 5, 8\}$. Sea $R \subseteq (A \times A)$ definida por $(a, b)R(c, d)$ sii $(a + b)|(c + d)$. Considera el conjunto $B = \{n \in \mathbb{N} \mid 2 \leq n \leq 12\}$. Sea $S \subseteq (B \times B)$ definida por aSb sii $(a \mid b)$ o bien (a es primo y $a < b$).

a) Demuestra que las dos relaciones son ordenes parciales.

b) Dibuja para cada relación su diagrama de Hasse.

c) ¿Tienen elementos minimales y maximales? ¿Máximo y mínimo?

Ejercicios de Repaso de la Asignatura (Parte 2)
Soluciones

Rafael del Vado Vírseda

Matemática Discreta y Lógica Matemática I

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Curso 2020-2021

Sea f una función definida de la siguiente forma: $f(1) = 1$, $f(n) = 2f(n-1) + 1$ para $n \geq 2$. Deduce una expresión explícita que devuelva el valor de $f(n)$ para cualquier $n \geq 1$.

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$\begin{cases} f(1) = 1 & (CB) \\ f(n) = 2f(n-1) + 1 \ \underline{\text{si}}\ n \geq 2 & (CR) \end{cases}$$

$$f(1) \stackrel{CB}{=} 1 = 2^1 - 1$$

$$f(2) \stackrel{CR}{=} 2 \cdot f(1) + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3 = 2^2 - 1$$

$$f(3) \stackrel{CR}{=} 2 \cdot f(2) + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7 = 2^3 - 1$$

$$f(4) \stackrel{CR}{=} 2 \cdot f(3) + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = 15 = 2^4 - 1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f(n) = 2^n - 1, \text{ para todo } n \geq 1$$

Sea f una función definida de la siguiente forma: $f(1) = 1$, $f(n) = 2f(n-1) + 1$ para $n \geq 2$. Deduce una expresión explícita que devuelva el valor de $f(n)$ para cualquier $n \geq 1$.

$f(n) = 2^n - 1$, para todo $n \geq 1$

Lo demostramos por <u>inducción simple</u> sobre $n \geq 1$:

<u>CASO BASE</u>: $n = 1$

$f(1) = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$ ✓

<u>PASO INDUCTIVO</u>: $n > 1$

(HI) $f(k) = 2^k - 1$ para todo $k \geq 1$

¿ $f(k+1) = 2^{k+1} - 1$ para todo $k \geq 1$?

$$f(k+1) \underset{k+1 \geq 2 \text{ para } k \geq 1}{\overset{CR}{=}} 2 \cdot f(k) + 1 \underset{k \geq 1}{\overset{HI}{=}} 2 \cdot (2^k - 1) + 1 =$$

$$2^{k+1} - 2 + 1 = 2^{k+1} - 1 \checkmark$$

$$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$\begin{cases} f(1) = 1 & (CB) \\ f(n) = 2f(n-1)+1 \ \underline{\text{si}}\ n \geq 2 & (CR) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
f(n) &\overset{CR}{=} 2f(n-1)+1 \\
&\overset{CR}{=} 2(2f(n-2)+1)+1 \\
&= 2^2 \cdot f(n-2)+2+1 \\
&\overset{CR}{=} 2^2 \cdot (2f(n-3)+1)+2+1 \\
&= 2^3 \cdot f(n-3)+2^2+2+1 \\
&\ \vdots \\
&\overset{CR}{=} 2^k \cdot f(n-k) + \sum_{i=0}^{k-1} 2^i \\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

$$n-k=1 \longrightarrow \overset{CR}{=} 2^{n-1} \cdot f(1) + \sum_{i=0}^{n-2} 2^i$$

$$\Downarrow$$

$$k = n-1 \qquad \overset{CB}{=} 2^{n-1} \cdot 1 + \frac{2^{n-2} \cdot 2 - 1}{2-1}$$

$$= 2^{n-1} + 2^{n-1} - 1 = 2 \cdot 2^{n-1} - 1 =$$

$2^n - 1$, para todo $n \geq 1$.

[1.5 puntos] Dada la siguiente sucesión recurrente:

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ a_{n/2}a_{n/2} & \text{si } n > 0 \quad n \text{ par} \\ 2a_{n-1} & \text{si } n > 0 \quad n \text{ impar} \end{cases}$$

Demuestra por inducción que para todo $n \geq 0$ se cumple $a_n = 2^n$. Indica el tipo de inducción que utilizas.

Demostramos por <u>INDUCCIÓN COMPLETA</u> sobre $n \geq 0$ que $a_n = 2^n$:

<u>CASO BASE</u>: $n = 0$

$$a_0 \overset{CB}{=} 1 = 2^0 \quad \checkmark$$

<u>PASO INDUCTIVO</u>: $n > 0$

(HIC) Para todo $k > 0$:

$$a_\ell = 2^\ell, \text{ para todo } 0 \leq \ell < k$$

¿ $a_k = 2^k$, para todo $k > 0$?

[1.5 puntos] Dada la siguiente sucesión recurrente:

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ a_{n/2}a_{n/2} & \text{si } n > 0 \quad n \text{ par} \\ 2a_{n-1} & \text{si } n > 0 \quad n \text{ impar} \end{cases}$$

Demuestra por inducción que para todo $n \geq 0$ se cumple $a_n = 2^n$. Indica el tipo de inducción que utilizas.

¿ $a_k = 2^k$, para todo $k > 0$?

Distinguimos dos casos para $k > 0$:

CASO I : $k > 0$ y k es par

$$a_k \underset{\substack{\uparrow \\ k>0 \text{ y } k \text{ par}}}{\overset{CR1}{=}} a_{k/2} \cdot a_{k/2} \underset{\substack{\uparrow \\ 0 \leq k/2 < k \iff \\ 0 \leq k < 2k \text{ pues } k>0}}{\overset{HIC(\ell = k/2)}{=\!=\!=}} 2^{k/2} \cdot 2^{k/2} = 2^{k/2 + k/2} = 2^{2 \cdot k/2} = 2^k \quad \checkmark$$

CASO II : $k > 0$ y k es impar

$$a_k \underset{\substack{\uparrow \\ k>0 \text{ y } k \text{ impar}}}{\overset{CR2}{=}} 2a_{k-1} \underset{\substack{\uparrow \\ 0 \leq k-1 < k \text{ pues } k>0}}{\overset{HIC(\ell = k-1)}{=\!=\!=}} 2 \cdot 2^{k-1} = 2^{\cancel{1}+k-\cancel{1}} = 2^k \quad \checkmark$$

Facultad de Informática

Facultad de Ciencias MATEMÁTICAS

$a)$ Sea $k \in \mathbb{Z}^+$. Demuestra que si $mcd(a,b) = d$ entonces $mcd(ka, kb) = kd$

$b)$ Demuestra que si $mcd(a,b) = d$ entonces $mcd(a/d, b/d) = 1$

a) Como $mcd(a,b) = d$, se verifica que $d|a \xRightarrow{\text{propiedades}} k\cdot d | k\cdot a$ y $d|b \xRightarrow{\text{propiedades}} k\cdot d | k\cdot b$.

Luego $k\cdot d$ es un divisor común de ka y kb. Veamos que es el mayor:

Sea $c|k\cdot a$ y $c|k\cdot b$. Veamos que $c|k\cdot d$:

Como $c|k\cdot a$ se tiene que $k\cdot a = c\cdot\beta$ para algún $\beta \in \mathbb{Z}$.

Como $c|k\cdot b$ se tiene que $k\cdot b = c\cdot\beta'$ para algún $\beta' \in \mathbb{Z}$.

Como $mcd(a,b) = d$, aplicando el teorema de Bézout: $d = m\cdot a + n\cdot b$ para algunos $m, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow k\cdot d = m\cdot k\cdot a + n\cdot k\cdot b$. Sustituyendo:

$k\cdot d = m\cdot(k\cdot a) + n\cdot(k\cdot b) = m\cdot(c\beta) + n\cdot(c\cdot\beta') = c\cdot(m\cdot\beta + n\cdot\beta')$

Luego $c|k\cdot d$.

Por tanto: $mcd(k\cdot a, k\cdot b) = k\cdot d$.

$a)$ Sea $k \in \mathbb{Z}^+$. Demuestra que si $mcd(a,b) = d$ entonces $mcd(ka, kb) = kd$

$b)$ Demuestra que si $mcd(a,b) = d$ entonces $mcd(a/d, b/d) = 1$

b) Como $mcd(a,b) = d$ y $d \in \mathbb{Z}^+$, aplicamos a) para $k = \frac{1}{d}$:

$mcd(a \cdot 1/d, b \cdot 1/d) = \frac{1}{d} \cdot d \Rightarrow mcd(a/d, b/d) = 1$

Sean $a, b \in \mathbb{Z}^+$ tales que $mcd(a, b) = 1$ y sea $c \in \mathbb{Z}$ divisor de $a+b$. Demuestra que $mcd(c, a) = mcd(c, b) = 1$

- Sea $x|c$ y $x|a$. Veamos que $x|b$:

$$\left.\begin{array}{l} x|c \Leftrightarrow c = x\cdot\alpha \text{ con } \alpha \in \mathbb{Z} \\ x|a \Leftrightarrow a = x\cdot\beta \text{ con } \beta \in \mathbb{Z} \\ c|(a+b) \Leftrightarrow a+b = ck \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} \Rightarrow b = c\cdot k - a = x\cdot\alpha\cdot k - x\cdot\beta = x\cdot(\alpha k - \beta) \Rightarrow x|b$$

Sea $x|c$ y $x|b$. Veamos que $x|a$:

$$\left.\begin{array}{l} x|c \Leftrightarrow c = x\cdot\alpha \text{ con } \alpha \in \mathbb{Z} \\ x|b \Leftrightarrow b = x\cdot\beta \text{ con } \beta \in \mathbb{Z} \\ c|(a+b) \Leftrightarrow a+b = c\cdot k \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} \Rightarrow a = c\cdot k - b = x\cdot\alpha\cdot k - x\cdot\beta = x\cdot(\alpha k - \beta) \Rightarrow x|a$$

Luego:

$$\{x \in \mathbb{Z} \mid x|c \wedge x|a\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x|c \wedge x|b\} \Rightarrow mcd(c,a) = mcd(c,b)$$

Sean $a, b \in \mathbb{Z}^+$ tales que $mcd(a, b) = 1$ y sea $c \in \mathbb{Z}$ divisor de $a+b$. Demuestra que $mcd(c, a) = mcd(c, b) = 1$

Veamos que $mcd(c,a) = 1$:

$$x \mid c \text{ y } x \mid a \Rightarrow x \mid a \text{ y } x \mid b \underset{mcd(a,b)=1}{\Rightarrow} x \mid 1 \overset{a,b \in \mathbb{Z}^+}{\Rightarrow} x = 1 \Rightarrow \{x \in \mathbb{Z} \mid x \mid c \wedge x \mid a\} = \{1\}$$

Luego $mcd(c,a) = 1$.

Análogamente, $mcd(c,b) = 1$:

$$x \mid c \text{ y } x \mid b \Rightarrow x \mid a \text{ y } x \mid b \underset{mcd(a,b)=1}{\Rightarrow} x \mid 1 \overset{a,b \in \mathbb{Z}^+}{\Rightarrow} x = 1 \Rightarrow \{x \in \mathbb{Z} \mid x \mid c \wedge x \mid b\} = \{1\}$$

Luego $mcd(c,b) = 1$.

Por tanto: $mcd(c,a) = mcd(c,b) = 1$.

Facultad de Informática

Facultad de Ciencias MATEMÁTICAS

Dados cuatro conjuntos A, B, C y D, demuestra:

a) $C \neq \emptyset$ y $A \times C \subseteq B \times C \Longrightarrow A \subseteq B$

b) $C \neq \emptyset$ y $C \times A \subseteq C \times B \Longrightarrow A \subseteq B$

c) $(A \times B) \setminus (C \times D) = ((A \setminus C) \times B) \cup (A \times (B \setminus D))$

(a) $\left.\begin{array}{l} C \neq \phi \\ A \times C \subseteq B \times C \end{array}\right\} \Rightarrow A \subseteq B$: CIERTO

$C \neq \phi$ ($\exists y \in C$)

$x \in A \Rightarrow (x, y) \in A \times C$ para $y \in C$

$\xRightarrow{A \times C \subseteq B \times C} (x, y) \in B \times C$ para $y \in C$

$\Rightarrow x \in B$ ||

Dados cuatro conjuntos A, B, C y D, demuestra:

$a)$ $C \neq \emptyset$ y $A \times C \subseteq B \times C \Longrightarrow A \subseteq B$

$b)$ $C \neq \emptyset$ y $C \times A \subseteq C \times B \Longrightarrow A \subseteq B$

$c)$ $(A \times B) \setminus (C \times D) = ((A \setminus C) \times B) \cup (A \times (B \setminus D))$

(b) $\left.\begin{array}{l} C \neq \phi \\ \\ C \times A \subseteq C \times B \end{array}\right\} \Rightarrow A \subseteq B$: CIERTO

$C \neq \phi$ (ex. $y \in C$)

$x \in A \Rightarrow (y, x) \in C \times A$ para $y \in C$

$C \times A \subseteq C \times B$ $\Rightarrow (y, x) \in C \times B$ para $y \in C$

$\Rightarrow x \in B$ //

Facultad de Informática

Facultad de Ciencias MATEMÁTICAS

(c) $(A\times B)\setminus(C\times D) = ((A\setminus C)\times B)\cup(A\times(B\setminus D))$: CIERTO

$(x,y)\in(A\times B)\setminus(C\times D) \Leftrightarrow (x,y)\in A\times B$ y $(x,y)\notin C\times D$

$\Leftrightarrow x\in A$ y $y\in B$ y $(x\notin C$ ó $y\notin D)$

$(x,y)\in((A\setminus C)\times B)\cup(A\times(B\setminus D)) \Leftrightarrow (x,y)\in(A\setminus C)\times B$ ó $(x,y)\in A\times(B\setminus D)$

$\Leftrightarrow (x\in A\setminus C$ y $y\in B)$ ó $(x\in A$ y $y\in B\setminus D)$

$\Leftrightarrow (\underline{x\in A}$ y $x\notin C$ y $\underline{y\in B})$ ó $(\underline{x\in A}$ y $\underline{y\in B}$ y $y\notin D)$

$\Leftrightarrow x\in A$ y $y\in B$ y $(x\notin C$ ó $y\notin D)$

La *diferencia simétrica* entre dos conjuntos A y B se define como

$$A \oplus B \stackrel{\text{def}}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Demuestra que esta operación es conmutativa y asociativa; es decir, las igualdades

$$A \oplus B = B \oplus A \qquad\qquad A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$$

son siempre válidas.

(a) $A \oplus B = B \oplus A$:

$x \in A \oplus B \Leftrightarrow x \in ((A \setminus B) \cup (B \setminus A))$

$\Leftrightarrow x \in A \setminus B$ ó $x \in B \setminus A$

$\Leftrightarrow x \in A$ y $x \notin B$
ó
$x \in B$ y $x \notin A$

$\Leftrightarrow x \in B$ y $x \notin A$
ó
$x \in A$ y $x \notin B$

$\Leftrightarrow x \in B \setminus A$ ó $x \in A \setminus B$

$\Leftrightarrow x \in ((B \setminus A) \cup (A \setminus B))$

$\Leftrightarrow x \in B \oplus A$ //

Facultad de Informática

Facultad de Ciencias MATEMÁTICAS

$$\boxed{A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)}$$

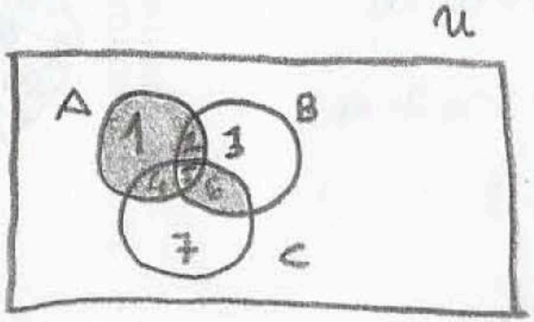
A	B	$A \setminus B$	$B \setminus A$	$\overbrace{(A \setminus B) \cup (B \setminus A)}^{\boxed{A \oplus B}}$	$\overbrace{(B \setminus A) \cup (A \setminus B)}^{\boxed{B \oplus A}}$
1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0

A	B	C	B ⊕ C	$\boxed{A \oplus (B \oplus C)}$	A ⊕ B	$\boxed{(A \oplus B) \oplus C}$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	1	0	1	0

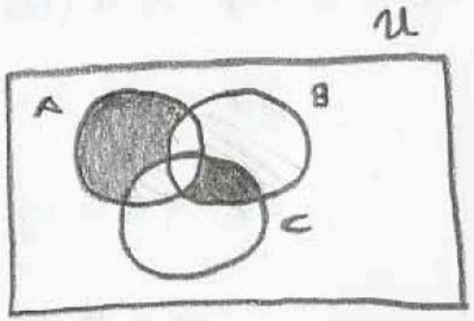
Estudia si la diferencia simétrica cumple o no las propiedades que siguen. En cada caso, da una demostración o un contraejemplo.

a) $A \oplus (B \cap C) = (A \oplus B) \cap (A \oplus C)$

(a) $A \oplus (B \cap C) = (A \oplus B) \cap (A \oplus C)$: FALSO



$\neq$



$A \oplus (B \cap C) = (A \setminus (B \cap C)) \cup ((B \cap C) \setminus A)$

$(A \oplus B) \cap (A \oplus C) = [(A \setminus B) \cup (B \setminus A)] \cap [(A \setminus C) \cup (C \setminus A)]$

CONTRAEJEMPLO:

$A = \{1,2,4,5\}$, $B = \{2,3,5,6\}$, $C = \{4,5,6,7\}$

$A \oplus (B \cap C) = \{1,2,4,5,6\}$

$\neq$

$(A \oplus B) \cap (A \oplus C) = \{1,6\}$

Estudia si la diferencia simétrica cumple o no las propiedades que siguen. En cada caso, da una demostración o un contraejemplo.

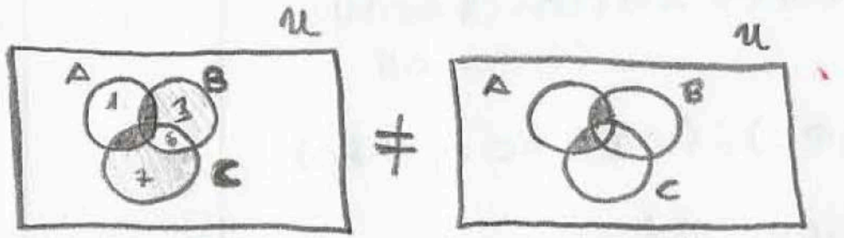
a) $A \oplus (B \cap C) = (A \oplus B) \cap (A \oplus C)$

b) $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$

c) $A \oplus (A \oplus A) = A$

d) $A \subseteq B \implies A \oplus C \subseteq B \oplus C$

(b) $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$: FALSA



$A \cap (B \oplus C) = A \cap ((B \setminus C) \cup (C \setminus B))$

$(A \cap B) \oplus (A \cap C) = ((A \cap B) \setminus (A \cap C)) \cup ((A \cap C) \setminus (A \cap B))$

CONTROEJEMPLO:

$A = \{1,2,4,5\}$, $B = \{2,3,5,6\}$, $C = \{4,5,6,7\}$

$A \cap (B \oplus C) = \{2,4,5\}$

$\neq$

$(A \cap B) \oplus (A \cap C) = \{2,4\}$

Estudia si la diferencia simétrica cumple o no las propiedades que siguen. En cada caso, da una demostración o un contraejemplo.

a) $A \oplus (B \cap C) = (A \oplus B) \cap (A \oplus C)$

b) $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$

c) $A \oplus (A \oplus A) = A$

d) $A \subseteq B \implies A \oplus C \subseteq B \oplus C$

(c) $A \oplus (A \oplus A) = A$: VERDADERA

$$A \oplus (A \oplus A) = (A \setminus (A \oplus A)) \cup ((A \oplus A) \setminus A)$$

$$= [A \setminus \overbrace{((\underbrace{A \setminus A}_{\phi}) \cup (\underbrace{A \setminus A}_{\phi}))}^{\phi}] \cup [\overbrace{((\underbrace{A \setminus A}_{\phi}) \cup (\underbrace{A \setminus A}_{\phi}))}^{\phi} \setminus A] =$$

$$= \underbrace{(A \setminus \phi)}_{A} \cup \underbrace{(\phi \setminus A)}_{\phi} = A \cup \phi = A \ //$$

Estudia si la diferencia simétrica cumple o no las propiedades que siguen. En cada caso, da una demostración o un contraejemplo.

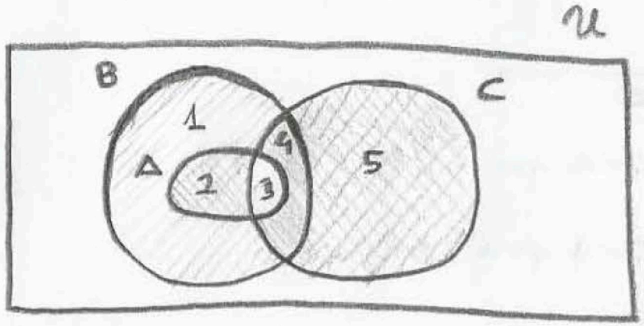
a) $A \oplus (B \cap C) = (A \oplus B) \cap (A \oplus C)$

b) $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$

c) $A \oplus (A \oplus A) = A$

d) $A \subseteq B \implies A \oplus C \subseteq B \oplus C$

(d) $A \subseteq B \Rightarrow A \oplus C \subseteq B \oplus C$: FALSA



$A \oplus C = (A \setminus C) \cup (C \setminus A)$

$B \oplus C = (B \setminus C) \cup (C \setminus B)$

CONTRAEJEMPLO

$A = \{2,3\}$, $B = \{1,2,3,4\}$, $C = \{3,4,5\}$

- $A \subseteq B$
- $A \oplus C = \{2,4,5\}$
- $B \oplus C = \{1,2,5\}$

$4 \in A \oplus C$ pero $4 \notin B \oplus C$, luego: $A \oplus C \nsubseteq B \oplus C$ //

Sea $\mathcal{F} = \{\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{N} \mid X \; finito\}$. Sea $f : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(A) =$ suma de los elementos pares de A.

a) ¿Es f inyectiva? ¿Es f suprayectiva? ¿Es f biyectiva?

b) Calcula el conjunto $f^{-1}(6)$. ¿Cuántos elementos tiene?

$\mathcal{F} = \{\phi \neq X \subseteq \mathbb{N} \mid X \text{ finito}\}$

$$\begin{cases} f : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{N} \\ f(A) = \text{suma de los elementos pares de } A \end{cases}$$

<u>Ejemplo</u>:

$f(\{1,2,3,4,5\}) = 2+4 = 6$

(b) $f^{-1}(6) = \{ \{6\}, \{2,4\}, \{0,6\}, \{0,2,4\}, \{6, \overbrace{1,3,5,7,\dots}^{\text{impares}}\}, \dots \}$

tiene infinitos elementos.

Sea $\mathcal{F} = \{\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{N} \mid X \ finito\}$. Sea $f : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(A) =$ suma de los elementos pares de A.

a) ¿Es f inyectiva? ¿Es f suprayectiva? ¿Es f biyectiva?

b) Calcula el conjunto $f^{-1}(6)$. ¿Cuántos elementos tiene?

(a) • <u>f no es inyectiva</u>:

$$\left.\begin{array}{l} X_1 = \{2,4\} \\ \neq \\ X_2 = \{1,2,3,4\} \end{array}\right\} \Rightarrow f(X_1) = f(X_2) = 2+4 = 6$$

• <u>f no es suprayectiva</u>:

Para $n = 7$ <u>no existe</u> $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{N}$ finito tal que $f(X) = 7$.

• <u>f no es biyectiva</u>:

f no es inyectiva ni suprayectiva.

Sea $\mathcal{F} = \{\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{N} \mid X \ finito\}$. Sea $f : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida como $f(A) = max(A) + min(A)$.

a) ¿Es f suprayectiva? ¿Es f inyectiva ? ¿Es f biyectiva?

b) Calcula el conjunto $f^{-1}(5)$ ¿Cuántos elementos tiene?

c) Para todo $n \in \mathbb{N}$, ¿Qué tamaño tiene el conjunto $f^{-1}(n)$? ¿Por qué?

$\mathcal{F} = \{\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{N} \mid X \text{ finito}\}$

$$\begin{cases} f : \mathcal{F} \to \mathbb{N} \\ f(A) = max(A) + min(A) \end{cases}$$

Ejemplo:

$f(\{1,2,3,4,5\}) = 5 + 1 = 6$

(a) • f no es inyectiva:

$$\left.\begin{array}{l} X_1 = \{1,5\} \\ \neq \\ X_2 = \{1,2,3,4,5\} \end{array}\right\} \Rightarrow f(X_1) = f(X_2) = 1+5 = 6$$

Sea $\mathcal{F} = \{\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{N} \mid X \ finito\}$. Sea $f : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida como $f(A) = max(A) + min(A)$.

a) ¿Es f suprayectiva? ¿Es f inyectiva ? ¿Es f biyectiva?

b) Calcula el conjunto $f^{-1}(5)$ ¿Cuántos elementos tiene?

c) Para todo $n \in \mathbb{N}$, ¿Qué tamaño tiene el conjunto $f^{-1}(n)$? ¿Por qué?

- f sí es suprayectiva:

Para cada $m \in \mathbb{N}$, podemos escribir $m = 0 + m = \overbrace{mín(\{0,m\})}^{0} + \overbrace{máx(\{0,m\})}^{m}$,

luego:

existe $A = \{0,m\} \in \mathcal{F}$ tal que $f(A) = m$, para cada $m \in \mathbb{N}$.

- f no es biyectiva:

f no es inyectiva.

Sea $\mathcal{F} = \{\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{N} \mid X \ finito\}$. Sea $f : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida como $f(A) = max(A) + min(A)$.

a) ¿Es f suprayectiva? ¿Es f inyectiva ? ¿Es f biyectiva?

b) Calcula el conjunto $f^{-1}(5)$ ¿Cuántos elementos tiene?

c) Para todo $n \in \mathbb{N}$, ¿Qué tamaño tiene el conjunto $f^{-1}(n)$? ¿Por qué?

(b) $f^{-1}(5) = \{\{0,5\}, \{0,1,5\}, \{0,1,2,5\}, \{0,1,2,3,5\}, \{0,1,2,3,4,5\}, \{0,1,4,5\},$
$\{1,4\}, \{1,2,4\}, \{1,2,3,4\}, \{1,3,4\}, \{0,3,4,5\}, \{0,1,3,5\},$
$\{2,3\},$
$\{0,2,5\}, \{0,2,3,5\}, \{0,2,3,4,5\}, \{0,2,4,5\},$
$\{0,3,5\}, \{0,1,3,4,5\}, \{0,1,2,4,5\},$
$\{0,4,5\}\}$ 21 elementos

1 1

$1 \quad 1$ x

$1 + 2 + 1$ 4

$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$ x

$1 + 4 + 6 + 4 + 1$ 16

n

21

(c)

$$|f^{-1}(n)| = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=0}^{n-j} \binom{n-j}{i}$$

impar

Sea $\mathcal{F} = \{\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{N} \mid X \ finito\}$. Sea $F : \mathcal{F} \to \mathbb{N}$ definida por $F(A) =$ suma de los elementos impares de A.

a) Calcula $F(A_n)$, siendo $n \geq 1$ y $A_n = \{0, 1, 2, \ldots, 2*n-1\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 2*n\}$.

b) Demuestra que el rango de F es $\mathbb{N} \setminus \{2\}$.

c) Demuestra que F no es inyectiva.

d) Calcula el conjunto $F^{-1}(8)$ ¿cuántos elementos tiene?

$$\mathcal{F} = \{\phi \neq X \subseteq \mathbb{N} \mid X \text{ finito}\}$$

$$\begin{cases} f : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{N} \\ f(A) = \text{suma de los elementos impares de } A. \end{cases}$$

(a) $f(A_m)$ con $A_m = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 2m\}$ siendo $m \geq 1$:

$$f(A_m) = f(\{0,1,2,\ldots,2m-1\}) = \sum_{i=1}^{m}(2i-1) \overset{(1.17)}{=} m^2, \text{ siendo } m \geq 1 \ //$$

Sea $\mathcal{F} = \{\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{N} \mid X \ finito\}$. Sea $F : \mathcal{F} \to \mathbb{N}$ definida por $F(A)$ = suma de los elementos impares de A.

a) Calcula $F(A_n)$, siendo $n \geq 1$ y $A_n = \{0, 1, 2, \ldots, 2*n-1\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 2*n\}$.

b) Demuestra que el rango de F es $\mathbb{N} \setminus \{2\}$.

c) Demuestra que F no es inyectiva.

d) Calcula el conjunto $F^{-1}(8)$ ¿cuántos elementos tiene?

(b) $\text{ran}(f) = \mathbb{N} \setminus \{2\}$:

- Si m es impar: $A = \overbrace{\{m\}}^{\in \mathcal{F}} \Rightarrow f(A) = m$.
- Si m es 0: $A = \underbrace{\{2\}}_{\in \mathcal{F}} \Rightarrow f(A) = 0$.
- Si m es par: $A = \underbrace{\{1, \overbrace{m-1}^{\text{impar}}\}}_{\in \mathcal{F}} \Rightarrow f(A) = 1 + m - 1 = m$, sólo si $\overbrace{m-1 \neq 1}^{m-1>1}$, es decir, si $m>2$ par.

Luego:

$\text{ran}(f) = \mathbb{N} \setminus \{2\}$. ||

Sea $\mathcal{F} = \{\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{N} \mid X \ finito\}$. Sea $F : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $F(A) =$ suma de los elementos impares de A.

a) Calcula $F(A_n)$, siendo $n \geq 1$ y $A_n = \{0, 1, 2, \ldots, 2 * n - 1\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 2 * n\}$.

b) Demuestra que el rango de F es $\mathbb{N} \setminus \{2\}$.

c) Demuestra que F no es inyectiva.

d) Calcula el conjunto $F^{-1}(8)$ ¿cuántos elementos tiene?

(c) f no es inyectiva:

$$\left.\begin{array}{l} X_1 = \{1, 3\} \\ \neq \\ X_2 = \{1, 2, 3\} \end{array}\right\} \Rightarrow f(X_1) = f(X_2) = 1 + 3 = 4 \ \|$$

$$\text{(d)} \quad f^{-1}(8) = \{\{3,5\}, \{0,2,3,5\}, \{0,2,3,4,5\}, \{0,2,3,4,5,\overbrace{6,8,10,\ldots}^{\text{pares}}\}, \ldots\}$$

tiene infinitos elementos. ||

Demuestra que los siguientes conjuntos son numerables. Indica si alguno de ellos es finito.

$$\begin{array}{lcll} \mathcal{F}_n & = & \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid \; \mid X \mid \; = n\} & \text{(siendo } n \in \mathbb{N}\text{, fijo)} \\ \mathcal{F} & = & \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid X \text{ es finito}\} & \\ \mathcal{CF} & = & \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid \mathbb{N} \setminus X \text{ es finito}\} & \end{array}$$

a) $\mathcal{F}_m = \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid |X| = m\}$ (siendo $m \in \mathbb{N}$ fijo)

$$\mathcal{F}_m = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \underbrace{\{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid |X| = m \wedge \forall x \in X : x \leq m\}}_{\text{CONJUNTOS FINITOS} \Rightarrow \text{NUMERABLES}}$$

unión numerable de conjuntos numerables $\Rightarrow \mathcal{F}_m$ es numerable.

b) $\mathcal{F} = \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid X \text{ es finito}\}$

$$\mathcal{F} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \underbrace{\mathcal{F}_m}_{\text{NUMERABLE}}$$

unión numerable de conjuntos numerables.

Demuestra que los siguientes conjuntos son numerables. Indica si alguno de ellos es finito.

$$\begin{array}{lcll}
\mathcal{F}_n & = & \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid \ \mid X \mid \ = n\} & \quad \text{(siendo } n \in \mathbb{N}, \text{ fijo)} \\
\mathcal{F} & = & \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid X \text{ es finito}\} & \\
\mathcal{CF} & = & \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid \mathbb{N} \setminus X \text{ es finito}\} &
\end{array}$$

c) $C = \{X \in P(\mathbb{N}) \mid \mathbb{N} \setminus X \text{ es finito}\}$

$f : C \longrightarrow F$

$f(X) = \mathbb{N} \setminus X = \overline{X}$

Como $X \in C$, el complementario $\overline{X} = \mathbb{N} \setminus X$ es finito, luego $f(X) = \overline{X} \in F$.

f es biyectiva pues tiene inversa:

$f^{-1} : F \longrightarrow C$

$f^{-1}(X) = \mathbb{N} \setminus \overline{X} = \overline{X}$

$(f \circ f^{-1})(X) = f^{-1}(f(X)) = f^{-1}(\overline{X}) = \overline{\overline{X}} = X$

$(f^{-1} \circ f)(X) = f(f^{-1}(X)) = f(\overline{X}) = \overline{\overline{X}} = X$

$f \circ f^{-1} = id_C$ y $f^{-1} \circ f = id_F$

Usando la técnica de diagonalización de Cantor, demuestra:

$a)$ $(\mathbb{N} \to \mathbb{N})$ no es numerable.

(a) $\{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$ no es numerable :

$\mathbb{N}$	$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 0	1	2	3	4	...
f_0	$f_0(0)$	$f_0(1)$	$f_0(2)$	$f_0(3)$	$f_0(4)$	...
f_1	$f_1(0)$	$f_1(1)$	$f_1(2)$	$f_1(3)$	$f_1(4)$	...
f_2	$f_2(0)$	$f_2(1)$	$f_2(2)$	$f_2(3)$	$f_2(4)$	...
f_3	$f_3(0)$	$f_3(1)$	$f_3(2)$	$f_3(3)$	$f_3(4)$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

DIAGONALIZACIÓN DE CANTOR

$$\begin{cases} g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ g(n) = f_n(n) + 1 \end{cases}$$

$$\underbrace{g(n) \neq f_n(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}}$$

$$\Downarrow$$

$$g \neq f_n \text{, para todo } n \in \mathbb{N}$$

$$\Downarrow$$

$\{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$ no es numerable //

Usando la técnica de diagonalización de Cantor, demuestra:

a) $(\mathbb{N} \to \mathbb{N})$ no es numerable.

b) $(\mathbb{N} \to A)$ no es numerable, siempre que A tenga dos o más elementos.

(b) $\{f \mid f : \mathbb{N} \to A\}$ con $|A| \geq 2$

no es numerable:

En este caso, para definir $g : \mathbb{N} \to A$ tal que $g(n) \neq f_n(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, necesitamos que A tenga al menos 2 valores. Así, si $f_n(n)$ toma uno de ellos, podemos definir $g(n)$ cogiendo el otro valor que sea distinto.

Con ello, es posible definir $g \neq f_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, con lo cual:

$\{f \mid f : \mathbb{N} \to A\}$ con $|A| \geq 2$ no es numerable. //

Facultad de Informática

Facultad de Ciencias MATEMÁTICAS

Demuestra que el conjunto formado por todos los polinomios con coeficientes enteros y una indeterminada x es infinito numerable.

$$p(x) = \underbrace{a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m}$$

$$\{(a_0, 0), (a_1, 1), (a_2, 2), \ldots, (a_m, m)\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$$

Ejemplo:

$$p(x) = 3x + 5x^2 \rightsquigarrow \{(3,1), (5,2)\} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$$

$$q(x) = 1 - 7x^3 \rightsquigarrow \{(1,0), (-7,3)\} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$$

$$\underbrace{|\{p(x) \mid p(x) \text{ polinomio con coeficientes enteros}\}|}_{\text{infinito}} \leq |\mathbb{Z} \times \mathbb{N}| = \underbrace{|\mathbb{N} \times \mathbb{N}|}_{\text{infinito numerable}}$$

Luego:

$\{p(x) \mid p(x)$ polinomio con coeficientes enteros$\}$ es infinito numerable. ||

En el conjunto $\mathbb{R}^2$ considera la relación binaria $\sim$ definida por

$$(x, y) \sim (z, w) \iff x^2 + y^2 = z^2 + w^2.$$

(a) Demuestra que $\sim$ es una relación de equivalencia.

(b) En el conjunto cociente $\mathbb{R}^2/\sim$ se define la relación

$$[(x, y)] \sqsubseteq [(z, w)] \iff x^2 + y^2 \leq z^2 + w^2.$$

Demuestra que está bien definida, es decir, que es independiente de los representantes elegidos.

(c) Demuestra que $\sqsubseteq$ es una relación de orden.

$\sim \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ tal que $(x,y) \sim (z,w) \Leftrightarrow_{def} x^2+y^2 = z^2+w^2$

a) $\sim$ es una relación de equivalencia $\Leftrightarrow \sim$ es reflexiva, simétrica y transitiva:

$\sim$ es reflexiva:

$(x,y) \sim (x,y) \Leftrightarrow x^2+y^2 = x^2+y^2$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$\sim$ es simétrica:

$(x,y) \sim (z,w) \Leftrightarrow x^2+y^2 = z^2+w^2 \Leftrightarrow z^2+w^2 = x^2+y^2 \Leftrightarrow (z,w) \sim (x,y)$

para todos $(x,y),(z,w) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$.

$\sim$ es transitiva:

$$\left.\begin{array}{l} (x,y) \sim (z,w) \Leftrightarrow x^2+y^2 = z^2+w^2 \\ (z,w) \sim (u,v) \Leftrightarrow z^2+w^2 = u^2+v^2 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2+y^2 = u^2+v^2 \Leftrightarrow (x,y) \sim (u,v)$$

para todos $(x,y),(z,w),(u,v) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$.

b) $\sqsubseteq \subseteq \mathbb{R}^2/\sim \times \mathbb{R}^2/\sim$ tal que $[(x,y)] \sqsubseteq [(z,w)] \Leftrightarrow_{def} x^2+y^2 \le z^2+w^2$

$\sqsubseteq$ es una relación de orden $\Leftrightarrow$ $\sqsubseteq$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva:

$\sqsubseteq$ es reflexiva:

$[(x,y)] \sqsubseteq [(x,y)] \Leftrightarrow x^2+y^2 \le x^2+y^2$ para todo $[(x,y)] \in \mathbb{R}^2/\sim$.

$\sqsubseteq$ es antisimétrica:

$$\left.\begin{array}{l} [(x,y)] \sqsubseteq [(z,w)] \Leftrightarrow x^2+y^2 \le z^2+w^2 \\ [(z,w)] \sqsubseteq [(x,y)] \Leftrightarrow z^2+w^2 \le x^2+y^2 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2+y^2 = z^2+w^2 \Leftrightarrow$$

$$(x,y) \sim (z,w) \Leftrightarrow [(x,y)] = [(z,w)]$$

para todos $[(x,y)], [(z,w)] \in \mathbb{R}^2/\sim$.

$\sqsubseteq$ es transitiva

$$\left.\begin{array}{l} [(x,y)] \sqsubseteq [(z,w)] \Leftrightarrow x^2+y^2 \le z^2+w^2 \\ [(z,w)] \sqsubseteq [(u,v)] \Leftrightarrow z^2+w^2 \le u^2+v^2 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2+y^2 \le u^2+v^2 \Leftrightarrow$$

$$[(x,y)] \le [(u,v)]$$

En el conjunto $\mathbb{R}^2$ considera la relación binaria $\sim$ definida por

$$(x, y) \sim (z, w) \iff x^2 + y^2 = z^2 + w^2.$$

(a) Demuestra que $\sim$ es una relación de equivalencia.

(b) En el conjunto cociente $\mathbb{R}^2/\sim$ se define la relación

$$[(x, y)] \sqsubseteq [(z, w)] \iff x^2 + y^2 \leq z^2 + w^2.$$

Demuestra que está bien definida, es decir, que es independiente de los representantes elegidos.

(c) Demuestra que $\sqsubseteq$ es una relación de orden.

La definición de $\sqsubseteq$ es correcta, pues su resultado es independiente de los representantes elegidos en cada clase:

$$[(x,y)] = [(x',y')] \Leftrightarrow (x,y) \sim (x',y') \Leftrightarrow x^2+y^2 = x'^2+y'^2$$

$$[(z,w)] = [(z',w')] \Leftrightarrow (z,w) \sim (z',w') \Leftrightarrow z^2+w^2 = z'^2+w'^2$$

$$[(x,y)] \sqsubseteq [(z,w)] \Leftrightarrow x^2+y^2 \leq z^2+w^2 \Leftrightarrow x'^2+y'^2 \leq z'^2+w'^2 \Leftrightarrow [(x',y')] \sqsubseteq [(z',w')]$$

Sea $A = \{0,1,2\} \times \{2,5,8\}$. Sea $R \subseteq (A \times A)$ definida por $(a,b)R(c,d)$ sii $(a+b)|(c+d)$. Considera el conjunto $B = \{n \in \mathbb{N} \mid 2 \leq n \leq 12\}$. Sea $S \subseteq (B \times B)$ definida por aSb sii $(a \mid b)$ o bien (a es primo y $a < b$).

a) Demuestra que las dos relaciones son ordenes parciales.

a) $A = \{0,1,2\} \times \{2,5,8\}$, $(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow_{def} (a+b)|(c+d)$.

$R \subseteq A \times A$ es un orden parcial $\Leftrightarrow$ R es reflexiva, antisimétrica y transitiva

• R es reflexiva:

$(a,b)R(a,b) \Leftrightarrow (a+b)|(a+b)$ se cumple para todo $(a,b) \in A$.

• R es antisimétrica:

No existen $(a,b),(c,d) \in A$, $(a,b) \neq (c,d)$, tales que $(a,b)R(c,d)$ y $(c,d)R(a,b)$, es decir, tales que $(a+b)|(c+d)$ y $(c+d)|(a+b)$:

$(a+b)|(c+d) \Leftrightarrow c+d = (a+b) \cdot K$, para algún $K \in \mathbb{N}$

$(c+d)|(a+b) \Leftrightarrow a+b = (c+d) \cdot K'$, para algún $K' \in \mathbb{N}$

$a+b = (c+d) \cdot K' = (a+b) \cdot K \cdot K' \Rightarrow 1 = K \cdot K' \Rightarrow K = K' = 1 \Rightarrow a+b = c+d \overset{(*)}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow a = c$ y $b = d \Rightarrow (a,b) = (c,d)$ ¡! $\quad a+b \neq 0$ pues $a \in \{0,1,2\}$ y $b \in \{2,5,8\}$

Sea $A = \{0,1,2\} \times \{2,5,8\}$. Sea $R \subseteq (A \times A)$ definida por $(a,b)R(c,d)$ sii $(a+b)|(c+d)$. Considera el conjunto $B = \{n \in \mathbb{N} \mid 2 \leq n \leq 12\}$. Sea $S \subseteq (B \times B)$ definida por aSb sii $(a \mid b)$ o bien (a es primo y $a < b$).

a) Demuestra que las dos relaciones son ordenes parciales.

b) Dibuja para cada relación su diagrama de Hasse.

c) ¿Tienen elementos minimales y maximales? ¿Máximo y mínimo?

$a+b$	$\overset{(*)}{=}$	$c+d$
$0+2=2$	$=$	$0+2=2$
$0+5=5$	$=$	$0+5=5$
$0+8=8$	$=$	$0+8=8$
$1+2=3$	$=$	$1+2=3$
$1+5=6$	$=$	$1+5=6$
$1+8=9$	$=$	$1+8=9$
$2+2=4$	$=$	$2+2=4$
$2+5=7$	$=$	$2+5=7$
$2+8=10$	$=$	$2+8=10$

• R es transitiva:

Para todo $(a,b), (c,d), (e,f) \in A$ se cumple:

Si $(a,b)R(c,d)$ y $(c,d)R(e,f)$ entonces $(a,b)R(e,f)$.

En efecto:

$(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow (a+b)|(c+d)$

$(c,d)R(e,f) \Leftrightarrow (c+d)|(e+f)$

Luego $(a+b)|(e+f) \Leftrightarrow (a,b)R(e,f)$.

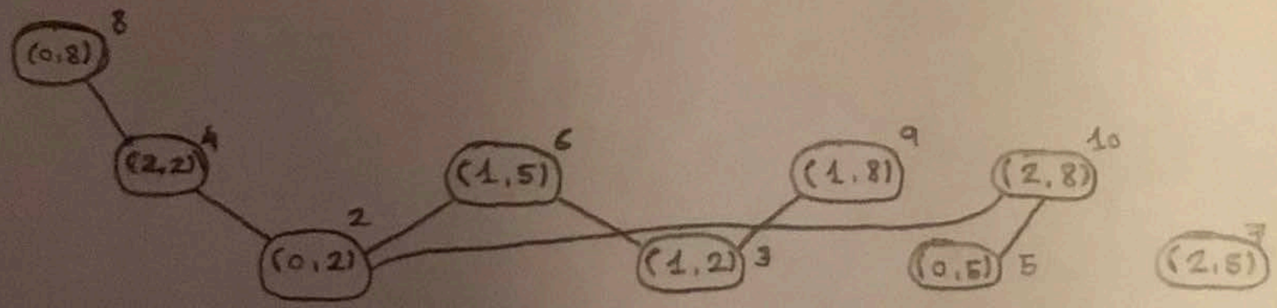
Sea $A = \{0,1,2\} \times \{2,5,8\}$. Sea $R \subseteq (A \times A)$ definida por $(a,b)R(c,d)$ sii $(a+b)|(c+d)$. Considera el conjunto $B = \{n \in \mathbb{N} \mid 2 \leq n \leq 12\}$. Sea $S \subseteq (B \times B)$ definida por aSb sii $(a \mid b)$ o bien (a es primo y $a < b$).

a) Demuestra que las dos relaciones son ordenes parciales.

b) Dibuja para cada relación su diagrama de Hasse.

c) ¿Tienen elementos minimales y maximales? ¿Máximo y mínimo?

b) Diagrama de Hasse para (A, R):



c) Elementos maximales de A: (0,8), (1,5), (1,8), (2,8), (2,5)

Elementos minimales de A: (0,2), (1,2), (0,5), (2,5)

Máximos de A: No hay

Mínimos de A: No hay

Sea $A = \{0,1,2\} \times \{2,5,8\}$. Sea $R \subseteq (A \times A)$ definida por $(a,b)R(c,d)$ sii $(a+b)|(c+d)$. Considera el conjunto $B = \{n \in \mathbb{N} \mid 2 \leq n \leq 12\}$. Sea $S \subseteq (B \times B)$ definida por aSb sii $(a \mid b)$ o bien (a es primo y $a < b$).

a) Demuestra que las dos relaciones son ordenes parciales.

b) Dibuja para cada relación su diagrama de Hasse.

c) ¿Tienen elementos minimales y maximales? ¿Máximo y mínimo?

a) $B = \{ m \in \mathbb{N} \mid 2 \leq m \leq 12 \}$, $aSb \Leftrightarrow_{def} (a|b) \vee (a \text{ primo} \wedge a < b)$.

$S \subseteq B \times B$ es un orden parcial $\Leftrightarrow$ S es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

- S es reflexiva:

  $aSa \Leftrightarrow a|a$ se cumple para todo $a \in B$.

- S es antisimétrica:

  No existen $a, b \in B$, $a \neq b$, tales que aSb y bSa, es decir, tales que $a|b$ o bien a es primo y $a<b$, y $b|a$ o bien b es primo y $b < a$.

Sea $A = \{0,1,2\} \times \{2,5,8\}$. Sea $R \subseteq (A \times A)$ definida por $(a,b)R(c,d)$ sii $(a+b)|(c+d)$. Considera el conjunto $B = \{n \in \mathbb{N} \mid 2 \leq n \leq 12\}$. Sea $S \subseteq (B \times B)$ definida por aSb sii $(a \mid b)$ o bien (a es primo y $a < b$).

a) Demuestra que las dos relaciones son ordenes parciales.

- S es antisimétrica:

No existen $a, b \in B$, $a \neq b$, tales que aSb y bSa, es decir, tales que $a|b$ o bien a es primo y $a<b$, y $b|a$ o bien b es primo y $b<a$.

Se pueden dar cuatro posibilidades, todas ellas imposibles en B:

- $a|b$ y $b|a$: imposible si $a \neq b$.
- $a|b$ y b primo y $b<a$: $a=1$ o $a=b$, lo que es imposible en B si $a\neq b$ y además $b<a$.
- a primo y $a<b$ y $b|a$: $b=1$ o $b=a$, lo que es imposible en B si $a \neq b$ y además $a<b$
- a primo y $a<b$ y b primo y $b<a$: imposible que $a<b$ y $b<a$.

Sea $A = \{0, 1, 2\} \times \{2, 5, 8\}$. Sea $R \subseteq (A \times A)$ definida por $(a, b)R(c, d)$ sii $(a + b)|(c + d)$. Considera el conjunto $B = \{n \in \mathbb{N} \mid 2 \leq n \leq 12\}$. Sea $S \subseteq (B \times B)$ definida por aSb sii $(a \mid b)$ o bien (a es primo y $a < b$).

a) Demuestra que las dos relaciones son ordenes parciales.

b) Dibuja para cada relación su diagrama de Hasse.

c) ¿Tienen elementos minimales y maximales? ¿Máximo y mínimo?

- **S es transitiva:**

Para todos $a, b, c \in B$ se cumple: Si aRb y bRc entonces aRc. Analizamos cada posibilidad:

- $a|b$ y $b|c$: $a|c$.
- $a|b$ y b primo y $b<c$: $a=b$ y $b<c$ con b primo $\Rightarrow$ a primo y $a<c$.
- a primo y $a<b$ y $b|c$: a primo y $a<b$ y $b \leq c$ $\Rightarrow$ a primo y $a<c$
- a, b primos y $a<b$ y $b<c$: a primo y $a<c$.

Luego $a|c$ o bien a es primo y $a<c$. Por tanto: aRc.

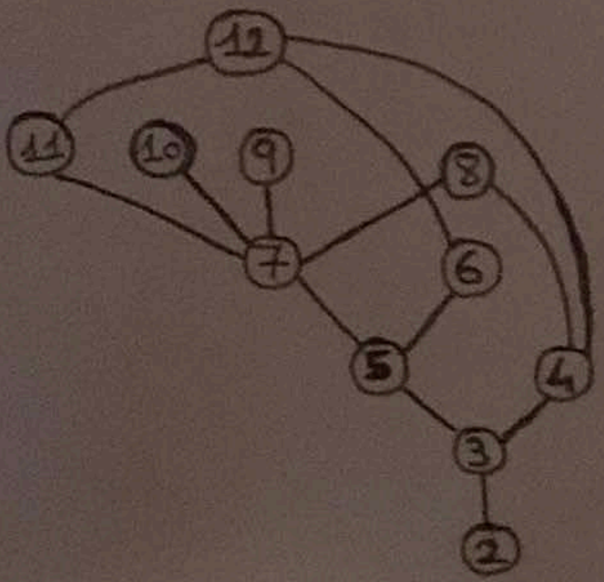
Sea $A = \{0, 1, 2\} \times \{2, 5, 8\}$. Sea $R \subseteq (A \times A)$ definida por $(a, b)R(c, d)$ sii $(a + b)|(c + d)$. Considera el conjunto $B = \{n \in \mathbb{N} \mid 2 \leq n \leq 12\}$. Sea $S \subseteq (B \times B)$ definida por aSb sii $(a \mid b)$ o bien (a es primo y $a < b$).

a) Demuestra que las dos relaciones son ordenes parciales.

b) Dibuja para cada relación su diagrama de Hasse.

c) ¿Tienen elementos minimales y maximales? ¿Máximo y mínimo?

b) Diagrama de Hasse para (B, S):



c) Elementos maximales de B : 8, 9, 10, 12

Elementos minimales de B : 2

Máximos de B : No hay

Mínimos de B : 2