MATEMATICA DISCRETA Y LOGICA MATEMATICA I Examen Enero 2020

1) La respuesta correcta es la a) : si $a$ no tiene divisores comunes con $b$, menos los tendrá con $d$, que tiene a lo sumo los mismos divisores.

2) La respuesta correcta es la c) :

$$\mathcal{P}(A \cap B) = \{X \mid X \subseteq A \wedge X \subseteq B\} = \{X \mid X \subseteq A\} \cap \{X \mid X \subseteq B\}$$
$$= \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B).$$

Basta tomar $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, para que $A \cup B = \{1,2\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$ pero $\{1,2\} \not\subseteq A \wedge \{1,2\} \not\subseteq B \Rightarrow \{1,2\} \notin \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

3) La respuesta correcta es la c) :

$2 \in \{1,2,\{\}\} \in A$, y $2 \neq \{1\}, \{1,2,\{\}\}, 1 \Rightarrow 2 \notin A$

- $A$ tiene los <u>tres</u> elementos indicados arriba
- $1 \in A \Rightarrow \{1\} \subseteq A$, pero $\{\{1\},1\} \neq \{1\}, \{1,2,\{\}\}, 1$
  $\Rightarrow \{\{1\},1\} \notin A$.

4) La respuesta correcta es la b) :

$X \setminus Y = X \Leftrightarrow X \cap Y = \emptyset \Leftrightarrow Y \setminus X = Y$

- No es reflexiva : $\{1\} \setminus \{1\} = \emptyset \neq \{1\}$.
- No es antirreflexiva : $\emptyset \setminus \emptyset = \emptyset \Rightarrow \emptyset R \emptyset$.
- No es transitiva : $\{1\} R \{2\} R \{1\}$, pero $\{1\} \not R \{1\}$

5) La respuesta correcta es la b) :

$f$ es sobreyectiva $\begin{cases} \text{Para } n \in \mathbb{N} & f(n,n) = |n \cap n| = |n| = n \quad (n = \{0,\dots,n-1\}) \\ & f(\mathbb{N},\mathbb{N}) = |\mathbb{N}| = \aleph_0 . \end{cases}$

$f$ no es inyectiva : $f(\{1\},\{1,2\}) = |\{1\}| = 1 = f(\{1\},\{1\})$

6) La respuesta correcta es la c)

$B$ numerable, $A \setminus B$ numerable $\Rightarrow B \cup (A \setminus B) = A$ numerable

Sólo las familias numerables de numerables tienen garantizada unión numerable. Por ejemplo: $\mathcal{F} = \{\{r\} \mid r \in \mathbb{R}\}$ tiene $\bigcup \mathcal{F} = \mathbb{R}$, y cada $\{r\}$ es finito, y por tanto numerable.

7) a) Caso base : $a_1 = 20$, $10 \mid 20$.

Paso inductivo : $a_n = 5 \cdot 4^n - a_{n-1}$ $(n \geq 2)$

$$= \underbrace{5 \cdot 4}_{20} \cdot 4^{n-1} - a_{n-1}$$

$$\left.\begin{array}{l} 10 \mid (20 * 4^{n-1}), \text{ pues } 10 \mid 20 \\ 10 \mid a_{n-1}, \text{ por h.i.} \end{array}\right\} 10 \mid a_n .$$

b) Caso base: $a_1 = 20$

$$4^{1+1} + 4 * (-1)^0 = 16 + 4 = 20$$

Paso inductivo : $a_n = 5 \cdot 4^n - a_{n-1} \underset{\text{h.i.}}{=}$

$$= 5 \cdot 4^n - \left(4^{(n-1)+1} + 4 \cdot (-1)^{(n-1)-1}\right)$$

$$(4 \cdot 4^n + 4^n) - (4^n + 4(-1)^n), \text{ ya que } (-1)^2 = 1$$

$$= 4^{n+1} + 4(-1)^{n+1}, \text{ ya que } (-1) \cdot 4 \cdot (-1)^n = 4 \cdot (-1)^{n+1}$$

$$= 4^{n+1} + 4(-1)^{n-1}, \text{ ya que } (-1)^2 = 1$$

c) Inmediato : por a) $a_n$ cumple $10 \mid a_n$

y por b) $a_n = 4^{n+1} + 4(-1)^{n-1}$.

8) a) Se puede hacer de múltiples formas :

I) Tma. Fundamental :

$a \mid c$ : $c$ contiene todos los factores primos de $a$ con (al menos) sus exponentes.

$b \mid c$ : también contiene los de $c$

Los factores de $a \cdot b$ son los de $a$ y los de $b$ con sus exponentes sumados

$\text{mcd}(a, b) = 1 \Rightarrow$ No hay factores primos comunes a "a" y "b".

$\Downarrow$

$c$ contiene todos los factores de $a \cdot b$ con (al menos) sus exponentes $\Rightarrow (a \cdot b) \mid c$ .

II) Propiedades de mcm y mcd.

$$\underset{\substack{\| \\ 1}}{\text{mcd}(a,b)} \cdot \text{mcm}(a,b) = a \cdot b \quad \Rightarrow \text{mcm}(a,b) = a \cdot b$$

Luego ya sabríamos que $c \geq a \cdot b$

Pero si $c \nmid a \cdot b$, entonces la división entera de $c$ entre $a \cdot b$ nos dará cociente $q \in \mathbb{Z}$ y resto $r$ $\begin{cases} r > 0 \\ r < a \cdot b \end{cases}$.

$c = (a \cdot b) \cdot q + r$

$\left.\begin{array}{l} a \mid c \ , \ a \mid (a \cdot b \cdot q) \Rightarrow a \mid r \\ b \mid c \ , \ b \mid (a \cdot b \cdot q) \Rightarrow b \mid r \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} r \text{ es multiplo de } a \text{ y } b \\ r > 0 \ , \ r < \text{mcm}(a,b) \end{array}\right\}$

¡contradicción!

III) Bezout

$\text{mcd}(a,b) = 1 \Rightarrow \exists k, l \in \mathbb{Z} \quad 1 = ka + lb \Rightarrow c = kac + lbc$

$\left.\begin{array}{l} a \mid c \wedge a \mid (kac) \Rightarrow a \mid lbc \underset{\text{Euclides}}{\Rightarrow} a \mid lc \Rightarrow a \cdot b \mid lbc \\ \text{Análogamente, } b \mid c \wedge b \mid kac \Rightarrow b \mid kc \Rightarrow a \cdot b \mid kac \end{array}\right\}$

$\Rightarrow a \cdot b \mid (kac + lbc) \Rightarrow (a \cdot b) \mid c$

b) Basta tomar $1 < a = b = c$. Obviamente $a^2 > a \Rightarrow (a \cdot b) \nmid c$

9) a) Reflexiva: $xRx \quad x^2 - x^2 = 0 = x - x$

Simétrica: $xRy \quad (x^2 - y^2 = x - y) \Rightarrow (y^2 - x^2 = y - x)$
$\Rightarrow yRx$

Transitiva: $xRy \quad x^2 - y^2 = x - y$
$yRz \quad y^2 - z^2 = y - z$
$\overline{\quad x^2 - z^2 = x - z \quad} \Rightarrow xRz$

b) $0Ry \quad 0 - y^2 = 0 - y \Rightarrow y^2 = y \Rightarrow y = 1 \vee y = 0$
$[0] = \{0, 1\}$

$-1Ry \quad 1 - y^2 = -1 - y \quad y^2 - y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2 \vee y = -1$
$[-1] = \{-1, 2\}$

$3Ry \quad 9 - y^2 = 3 - y \quad y^2 - y - 6 = 0 \Rightarrow y = 3 \vee y = -2$

c) A partir de los ejemplos anteriores se puede intuir que $\forall z \geq 1 \quad [z] = \{z, 1-z\}$, lo que ya cubriría todas las clases de $\mathbb{Z}/R$, ya que $\{1-z \mid z \geq 1\} = \{0\} \cup \mathbb{Z}_-\}$, y $\{z \mid z \geq 1\} = \mathbb{Z}_+$.

Podemos ratificar que $\forall z \geq 1 \quad [z] = \{z, 1-z\}$ resolviendo, como en los ejemplos, la ecuación

$y^2 - y = (z^2 - z)$

Otra opción sería darse cuenta de que $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$, por lo que $x R y \wedge y \neq x$ supone en efecto $x + y = 1$, o sea $y = 1 - x$.

10) a) Si $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2) \wedge (f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$, tendríamos $f(x_1, y_1) = (a, b) = f(x_2, y_2)$, para ciertos $a, b \in \mathbb{Z}$, con lo que

$$\left.\begin{cases} x_1 - 2y_1 = a \Rightarrow -2x_1 + 4y_1 = -2a \\ 2x_1 + y_1 = b \end{cases}\right\}$$

$$\Rightarrow 5y_1 = b - 2a \Rightarrow y_1 = \frac{b-2a}{5} \Rightarrow x_1 = a + 2y_1 =$$

$$= \frac{5a + 2b - 4a}{5} = \frac{2b + a}{5}$$

Pero evidentemente podríamos obtener exactamente lo mismo para $(x_2, y_2)$, con lo que llegaríamos a la contradicción $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$

Otra opción: Directamente escribimos $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$, lo que nos da el sistema $\begin{cases} x_1 - 2y_1 = x_2 - 2y_2 \\ 2x_1 + y_1 = 2x_2 + y_2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} -2x_1 + 4y_1 = -2x_2 + 4y_2 \\ 2x_1 + y_1 = 2x_2 + y_2 \end{cases}\right\} \Rightarrow 5y_1 = 5y_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_1 = y_2 \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$$

b) No es sobreyectiva. Por ejemplo, no podemos tener $f(x, y) = (1, 1)$, ya que arriba obtuvimos $y = \frac{2+1}{5} \notin \mathbb{Z}$.

11) a) Reflexiva: $x R_f x$, ya que $f(x) \sqsubseteq_B f(x)$.

Antisimétrica: $\left.\begin{cases} x R_f y \Rightarrow f(x) \sqsubseteq_B f(y) \\ y R_f x \Rightarrow f(y) \sqsubseteq_B f(x) \end{cases}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x) = f(y) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ es inyectiva}}}{\Longrightarrow} x = y.$$

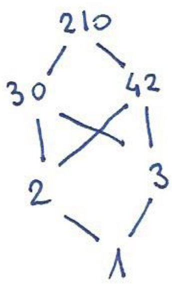
Transitiva: $\left.\begin{cases} x R_f y \Rightarrow f(x) \sqsubseteq_B f(y) \\ y R_f z \Rightarrow f(y) \sqsubseteq_B f(x) \end{cases}\right\} f(x) \sqsubseteq_B f(z)$

$$\Downarrow$$

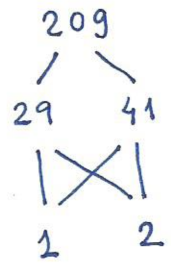
$$x R_f z$$

b) $1 \mid b \quad \forall b \in B$; $2 \mid 30, 42, 210$; $3 \mid 30, 42, 210$;

$30 \mid 210$; $42 \mid 210$:




Al aplicar $f$ a $A$ llegamos a




Minimales $= \{1, 2\} \Rightarrow$ No hay mínimo

Máximo: $209 \Rightarrow$ Maximales $= \{209\}$