2. CONJUNTOS, RELACIONES Y FUNCIONES

2.1 Conjuntos, elementos y subconjuntos.

Un conjunto es la reunión en un todo de objetos de nuestra intuición o de nuestro pensar, bien determinados y diferenciables los unos de los otros.

Georg Cantor (1845-1918)

Todas las Matemáticas se basan en la teoría de conjuntos

Definición: Un "conjunto" es una colección de objetos de manera que podemos decidir si un objeto está o no en la colección.

A los objetos que pertenecen a un conjunto se les denomina "elementos" del conjunto $a \in A$ $\neg(a \in A)$, se escribe $a \notin A$

Ejemplo:

$A = \{0,1\}$, $0 \in A$, $1 \in A$, $2 \notin A$

$B = \{\text{alumnos de la clase}\}$

$C = \{\text{coches en Madrid}\}$

$D = \{\{0,1\}, 1, \{1,2\}\}$

$\{0,1\} \in D$, $1 \in D$, $0 \notin D$, $2 \notin D$, $\{1,2\} \in D$

Conjunto universal, $\mathcal{U}$

Conjunto vacio, ϕ, $\{\}$

No siempre pueden definirse los conjuntos por enumerarión de sus elementos: $\mathbb{R}$.

Principio de extensionalidad:

$(A = B) \sim \forall x \ (x \in A \leftrightarrow x \in B)$

$$A = B \Leftrightarrow [x \in A \Leftrightarrow x \in B]$$

$(A \neq B) \sim \neg(A = B)$

Ejemplo: $\{3,5,7\} = \{7,5,3\} = \{3,5,5,7\}$

No importa el orden, no contamos repeticiones

A veces definimos un conjunto mediante una propiedad

Principio de comprehensión

Si X es un conjunto y P una propiedad entonces $S = \{x \in X \mid P(x)\}$ es un conjunto bien definido.

Ejemplo: $\{x \in \mathbb{R} / x^2 = -1\} = \{x \in \mathbb{N} / x = x + 1\} = \phi$

$$S = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ es un cuadrado perfecto}\}$$

$$S_0 = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ es un cuadrado perfecto menor que } 20\}$$

$$\begin{aligned} A &= \{n \in \mathbb{N} / n \text{ es par menor que } 12\} \\ &= \{n \in \mathbb{N} / (\exists m \in \mathbb{Z} : n = 2m) \wedge (n < 12)\} \\ &= \{0, 2, 4, 6, 8, 10\} \end{aligned}$$

$$S = \{0, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots\}$$

$$S_0 = \{0, 4, 9, 16\}$$

Tenemos $x \in S_0 \Rightarrow x \in S$. Todo elemento de S_0 es un elemento de S.

Definición: Dados dos conjuntos A y B, decimos que A es un subconjunto de B (y escribimos "$A \subseteq B$") si $x \in A \Rightarrow x \in B$.

Si $A \subseteq B$ y $A \neq B$ decimos que A está estrictamente contenido en B y escribimos $A \subset B$.

Ejemplo: $\{n \in \mathbb{N} / n \text{ es par menor que } 12\} \subseteq \{0, 2, 4, 6, 8, 10\} \subset \{n \in \mathbb{N} / n \text{ es par }\} \subset \mathbb{N}$

$$\{\text{nacidos en la provincia de Madrid}\} \subseteq \{\text{nacidos en España}\}$$

$$\{\text{nacidos en la provincia de Madrid}\} \subset \{\text{nacidos en España}\}$$

$$(A \subseteq B) \sim \forall x \ (x \in A \to x \in B)$$

$$(A \subset B) \sim ((A \subseteq B) \wedge \neg(A = B))$$

$$(A \not\subseteq B) \sim \neg(A \subseteq B)$$

$$(A \not\subset B) \sim \neg(A \subset B)$$

Los conjuntos $A = \{a, b\}$ y $B = \{b, \{a, b\}, c\}$ cumplen:

(a) $A \in B$, $A \subseteq B$ (b) $A \in B$, $A \not\subseteq B$ (c) $A \notin B$

Solución:

El conjunto $\{a, b\}$ (que es igual a A) es un elemento de B, por lo que se cumple $A \in B$, y (c) es falsa.

Por otra parte, el elemento a está en A pero no está en B, por lo que *no* es cierto $A \subseteq B$, y (a) es falsa.

Por tanto, la respuesta correcta es (b).

Los conjuntos $A = \{2, \{1, 2\}\}$ y $B = \{1, 2, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ cumplen:

(a) $A \in B$, $A \not\subseteq B$ (b) $A \in B$, $A \subseteq B$ (c) $A \notin B$, $A \subseteq B$

Solución:

El conjunto A tiene dos elementos: el número 2 y el conjunto $\{1, 2\}$; ambos pertenecen también a B, por lo que se cumple $A \subseteq B$.

Por otra parte, el conjunto B tiene cinco elementos: dos números y tres conjuntos, pero ninguno de ellos es igual a A; por ejemplo, $\{1, 2\} \neq \{2, \{1, 2\}\}$. Por tanto, $A \notin B$.

Así la respuesta correcta es (c).

Razona cuáles de las afirmaciones que siguen son verdaderas:

a) $1 \in \{1\}$,	*b*) $\{1\} \subseteq \{1\}$,	*c*) $\{1\} \in \{1\}$,
d) $\{1\} \subseteq \{\{1\}\}$,	*e*) $\{1\} \in \{\{1\}\}$,	*f*) $\emptyset \subseteq \emptyset$,
g) $\emptyset \subseteq \{1\}$,	*h*) $\emptyset \in \{1\}$,	*i*) $\{\emptyset\} = \emptyset$.

Solución:

a) $1 \in \{1\}$ es verdadero, ya que 1 es el único elemento del conjunto unitario $\{1\}$.

b) $\{1\} \subseteq \{1\}$ es verdadero, ya que cualquier conjunto está contenido en sí mismo.

c) $\{1\} \in \{1\}$ es falso, ya que el conjunto $\{1\}$ no es un elemento del conjunto unitario $\{1\}$ que sólo tiene por elemento el 1.

d) $\{1\} \subseteq \{\{1\}\}$ es falso, ya que $1 \in \{1\}$, pero $1 \notin \{\{1\}\}$, cuyo único elemento es $\{1\}$.

e) $\{1\} \in \{\{1\}\}$ es cierto ya que efectivamente $\{1\}$ es el único elemento del conjunto unitario $\{\{1\}\}$.

f) $\emptyset \subseteq \emptyset$ es verdadero, ya que cualquier conjunto está contenido en sí mismo.

g) $\emptyset \subseteq \{1\}$ es verdadero, ya que el conjunto vacío está contenido en cualquier conjunto.

h) $\emptyset \in \{1\}$ es falso, ya que el conjunto vacío no es un elemento de $\{1\}$, cuyo único elemento es el 1.

i) $\{\emptyset\} = \emptyset$ es falso, porque $\emptyset \in \{\emptyset\}$, pero $\emptyset \notin \{\emptyset\}$.

Si $x \in \{\{y, z\}, \{y\}\}$, ¿qué se puede asegurar?

(a) $x \in \{y\}$ (b) $y \in x$ (c) $\{y\} \in x$

Solución:

La expresión $x \in \{\{y, z\}, \{y\}\}$ significa que x es un elemento del conjunto $\{\{y, z\}, \{y\}\}$ que tiene exactamente dos elementos. Por tanto, x es o bien el primer elemento $\{y, z\}$ o el segundo elemento $\{y\}$. Ninguno de estos dos elementos es igual a y, por lo que ninguno de los dos pertenece al conjunto unitario $\{y\}$:

$$\{y, z\} \notin \{y\} \qquad\qquad \{y\} \notin \{y\}.$$

En consecuencia la respuesta (a) no es correcta.

En ninguno de los dos casos tenemos que $\{y\}$ sea un elemento de x:

$$\{y\} \notin \{y, z\} \qquad\qquad \{y\} \notin \{y\}.$$

Por tanto la respuesta (c) tampoco es correcta.

En cambio, el elemento y sí que pertenece a x en ambos casos:

$$y \in \{y, z\} \qquad\qquad y \in \{y\}.$$

Así la respuesta correcta es (b).

Construye dos conjuntos A, B tales que $A \in B$ y $A \subseteq B$.

Solución:

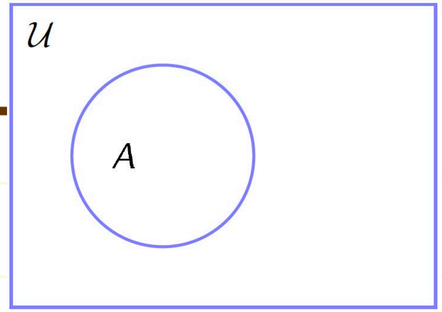
Sean $A = \emptyset$, $B = \{\emptyset\}$.

Se verifica que $A = \emptyset$ es un elemento del conjunto unitario $\{\emptyset\} = B$. Luego $A \in B$.

Además $\emptyset$ es un subconjunto de cualquier conjunto, por tanto $A \subseteq B$.

▪ Diagramas de Venn

Representación geométrica de los conjuntos:



Ejemplo:

$c \notin A$

$b_2 \in C$

$B \subseteq A$

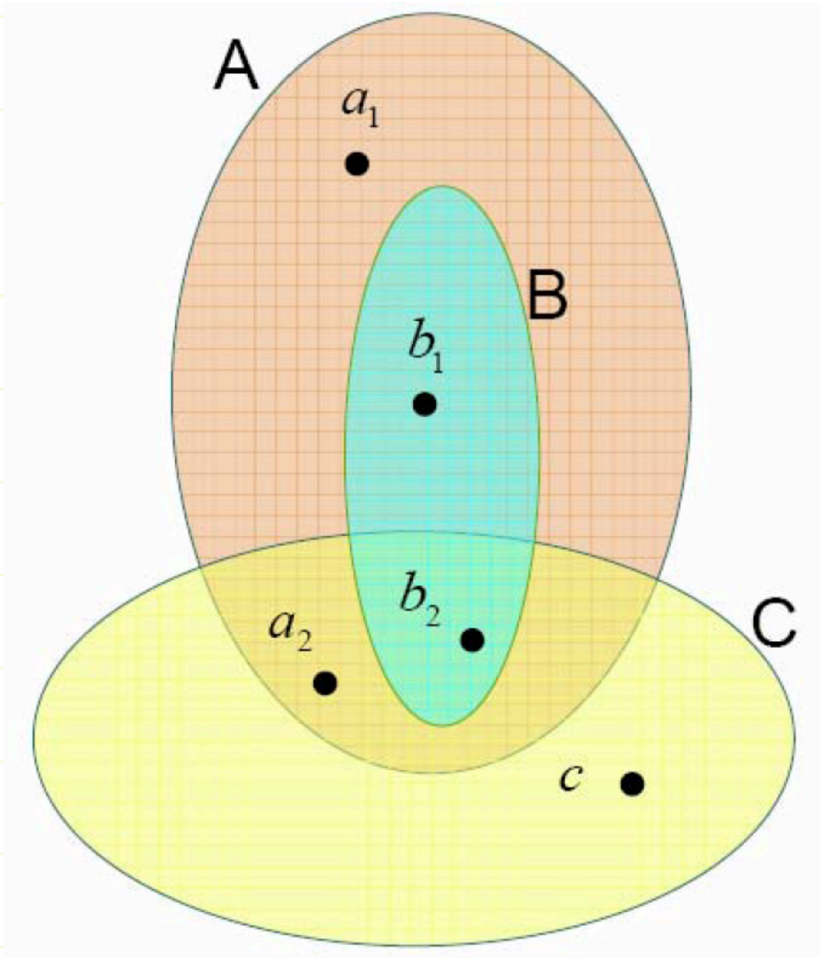
$B \subset A$

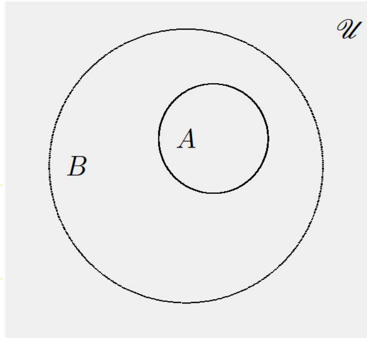
$B \not\subseteq C$

$a_1 \notin C$

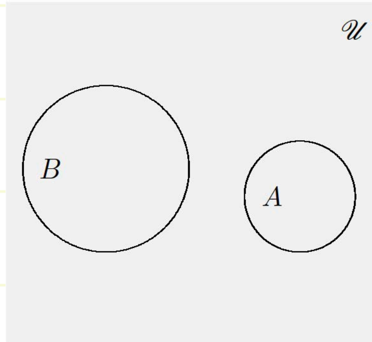
$a_2 \in C$

$A \not\subseteq C$

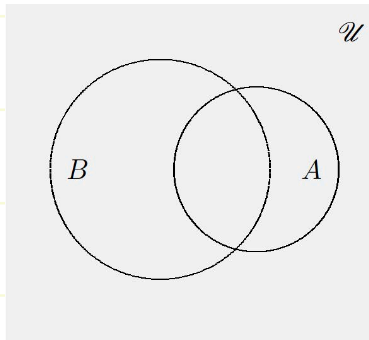




(a) $A \subseteq B$



(b) A y B son disjuntos



(c) A y B no son disjuntos

Proposición: Sean A, B y C conjuntos, entonces

- $A \subseteq A$
- $\left.\begin{array}{l} A \subseteq B \\ B \subseteq C \end{array}\right\} \Rightarrow A \subseteq C$
- $A \not\subset A$
- $\left.\begin{array}{l} A \subseteq B \\ B \subseteq A \end{array}\right\} \Leftrightarrow A = B$
- $\left.\begin{array}{l} A \subseteq B \\ B \subset C \end{array}\right\} \Rightarrow A \subset C$
- $\left.\begin{array}{l} A \subset B \\ B \subseteq C \end{array}\right\} \Rightarrow A \subset C$

$$\begin{aligned} (A = B) \quad & \sim \forall x \; (x \in A \leftrightarrow x \in B) \\ & \sim \forall x \; ((x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A)) \\ & \sim (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \end{aligned}$$

$$\phi \subseteq A \subseteq \mathcal{U} \quad (\phi, \; \mathcal{U} \text{ cotas universales})$$

Dar una condición necesaria y suficiente para que dos conjuntos sean distintos.

$$\begin{aligned}
A \neq B \iff& \neg\left[\forall x\,(x \in A \Longrightarrow x \in B) \wedge \forall x\,(x \in B \Longrightarrow x \in A)\right] & \\
\iff& [\neg\forall x\,(x \in A \Longrightarrow x \in B)] \vee [\neg\forall x\,(x \in B \Longrightarrow x \in A)] & \{\text{De Morgan}\} \\
\iff& [\exists x : \neg\,(x \in A \Longrightarrow x \in B)] \vee [\exists x : \neg\,(x \in B \Longrightarrow x \in A)] & \{\text{Regla General}\} \\
\iff& [\exists x : \neg\,(\neg(x \in A) \vee (x \in B))] \vee [\exists x : \neg\,(\neg(x \in B) \vee (x \in A))] & \{\text{Implicación}\} \\
\iff& [\exists x : (\neg\neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B))] \vee [\exists x : (\neg\neg(x \in B) \wedge \neg(x \in A))] & \{\text{De Morgan}\} \\
\iff& [\exists x : (x \in A \wedge x \notin B)] \vee [\exists x : (x \in B \wedge x \notin A)] & \{\text{Doble Negación}\}
\end{aligned}$$

Dar una condición necesaria y suficiente para que un conjunto A no esté contenido en otro conjunto B.

$$\begin{aligned}
A \not\subseteq B \iff& \neg(A \subseteq B) \\
\iff& \neg\left[\forall x\,(x \in A \Longrightarrow x \in B)\right] \\
\iff& \exists x : [\neg\,(x \in A \Longrightarrow x \in B)] \\
\iff& \exists x : [\neg\,(\neg(x \in A) \vee (x \in B))] \\
\iff& \exists x : [\neg\neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B)] \\
\iff& \exists x : (x \in A \wedge x \notin B)
\end{aligned}$$

Demuestra que $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 + x = 0\} = \{-1, 0\}$.

Solución:

Probamos los dos contenidos:

$\subseteq$) Sea $x \in \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 + x = 0\}$, entonces x debe ser solución de la ecuación $x^2 + x = 0$, por lo que $x = -1$ o $x = 0$. En ambos casos, $x \in \{-1, 0\}$.

$\supseteq$) Sea $x \in \{-1, 0\}$, entonces x es solución de la ecuación $x^2 + x = 0$, por lo que $x \in \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 + x = 0\}$.

Definición-ejemplo:

$\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 = 2\} = \{\ \} = \varnothing$ ("conjunto vacío")

$\{x \in \mathbb{R} \mid x + 1 = 0\} = \{-1\}$ ("conjunto unitario")

Observación: Cuidado con las definiciones de conjuntos dadas por una propiedad.

Si X es un conjunto y P una propiedad, sabemos que $\{x \in X \mid P(x)\}$ es un conjunto (Ppio. de Comprehensión)

Pero en general, $\{x \mid P(x)\}$ no es un conjunto

- **Paradoja de Russell**

Consideramos la colección de los objetos que no son elementos de sí mismos:

$$A = \{x \mid x \notin x\}$$

¿Es A un conjunto?

¿Para cualquier objeto, podemos determinar si es un elemento de A?

$$A = \{x \mid x \notin x\}$$

$A \in A$?

Si $A \in A$ tendríamos que A es un elemento de sí mismo y por lo tanto, $A \notin A$.

Pero si $A \notin A$, entonces por la definición de A tendríamos que $A \in A$.

CONTRADICCIÓN!!

Entonces A no es un conjunto.

Paradoja del barbero

En un pueblo el barbero afeita a todos los hombres que no se afeitan a sí mismo y sólo a los que no se afeitan a sí mismos. ¿Quién afeita al barbero?

Axiomas de la Teoría de Conjuntos

1. Axioma de Extensionalidad. Dos clases, A, B, que tienen los mismos elementos, son la misma clase.

2. Axioma Formador de Clases. Para cada fórmula $f(x)$ existe al menos una clase formada por todos los conjuntos que satisfacen la fórmula $f(x)$.

3. Axioma del Par no Ordenado. El par formado por dos conjuntos es también un conjunto.

4. Axioma de Regularidad. o restricción, o también de buen fundamento, afirma que para cada clase no vacía, siempre hay al menos un elemento que no contiene otros elementos de la clase, esto es, que es disjunto con ella.

5. Axioma de la Gran Unión. Si A es un conjunto, $\bigcup_{a \in A} a$ es un conjunto.

6. Axioma del Conjunto Vacío. $\emptyset$ es un conjunto (aquel que no tiene ningún elemento).

Axiomas de la Teoría de Conjuntos

7. Axioma de Infinidad. Existe un conjunto A con las siguientes propiedades: $\emptyset \in A$, y si $x \in A \Rightarrow x \cup \{x\} \in A$. (Este conjunto incluye junto con $\emptyset$, a $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, etc., es decir es un conjunto infinito). Este axioma asegura la existencia de conjuntos infinitos, en particular el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales.
8. Axioma Funcional. Sea A un conjunto, y sea $f : A \to B$ una aplicación, entonces B es un conjunto, es decir, si el dominio de definición de una tal función es un conjunto, también debe serlo el dominio de valores, lo que permitirá definir una noción de relación.
9. Axioma del Conjunto de Partes. Para cada conjunto A, existe un conjunto formado por los subconjuntos de A. ($B \subset A$ es un subconjunto si sus elementos son necesariamente elementos de A).
10. Axioma de Elección. Dada cualquier familia no vacía de conjuntos no vacíos, dos a dos disjuntos, existe, por lo menos, un conjunto que contiene un elemento y sólo uno de cada conjunto perteneciente a la familia.