Facultad de Ciencias MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

Facultad de Informática

Tema 4: Relaciones de Orden y Conjuntos Ordenados

Rafael del Vado Vírseda

Matemática Discreta y Lógica Matemática I

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Curso 2020-2021

Relaciones de Orden (repaso)

- La relación $R \subseteq A \times A$ es un **orden (parcial)** si y solo si R cumple las **propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva**.

ANTISIMETRICA

$$\forall\, x, y \in A : \big((x\, R\, y \land y\, R\, x) \Longrightarrow (x = y)\big) \equiv$$
$$\neg\big(\exists\, x, y \in A : (x\, R\, y \land y\, R\, x \land x \neq y)\big) \equiv$$
$$\nexists\, x, y \in A : (x\, R\, y \land y\, R\, x \land x \neq y)$$

- La relación $R \subseteq A \times A$ es un **orden total (o lineal)** si R es un **orden** y cumple la **propiedad conexa**.

CONEXA

$$\forall\, x, y \in A : \big((x \neq y) \Rightarrow (x\, R\, y \lor y\, R\, x)\big) \equiv$$
$$\neg\big(\exists\, x, y \in A : (x\, \cancel{R}\, y \land y\, \cancel{R}\, x \land x \neq y)\big) \equiv$$
$$\nexists\, x, y \in A : (x\, \cancel{R}\, y \land y\, \cancel{R}\, x \land x \neq y)$$

- Los **órdenes** se representan por $\sqsubseteq$.

- La relación $R \subseteq A \times A$ es un **orden estricto** si y solo si R cumple las **propiedades antirreflexiva** y **transitiva**.

ANTIRREFLEXIVA

$$\forall\, x \in A : x\, \cancel{R}\, x \equiv$$
$$\neg(\exists\, x \in A : x\, R\, x) \equiv$$
$$\nexists\, x \in A : x\, R\, x$$

Conjuntos Ordenados (repaso)

- La relación $R \subseteq A \times A$ es un **orden estricto total (o lineal)** si R es un **orden** y cumple la **propiedad conexa**.
- Los **órdenes estrictos** se representan por $\sqsubset$.
- Todo **orden parcial** $\sqsubseteq$ tiene asociado un **orden estricto** $\sqsubset$, y viceversa:

$$\boldsymbol{x \sqsubset y \Leftrightarrow x \sqsubseteq y \wedge x \neq y}$$
$$\boldsymbol{x \sqsubseteq y \Leftrightarrow x \sqsubset y \vee x = y}$$

- El par $(A, \sqsubseteq)$ se denomina **conjunto (parcialmente) ordenado**.
- El par $(A, \sqsubset)$ se denomina **conjunto estrictamente ordenado**.

Ejemplo:

- $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definida por $xRy \Leftrightarrow x \leq y$ es un orden. es total
- $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definida por $xRy \Leftrightarrow x < y$ es un orden estricto es total
- $R \subseteq \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+$ definida por $xRy \Leftrightarrow x \mid y$ es un orden no es total
- $R \subseteq \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+$ definida por $xRy \Leftrightarrow x \mid y, (x \neq y)$ es un orden estricto no es total
- $R \subseteq P(A) \times P(A)$ definida por $XRY \Leftrightarrow X \subset Y$ es un orden estricto no es total

- Sean $(A, \sqsubseteq_A)$ y $(B, \sqsubseteq_B)$ dos conjuntos ordenados, y sea $f : A \longrightarrow B$ una función.

  f es **monótona** si se cumple la siguiente propiedad:

  $$\forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{A} : \Big((\boldsymbol{x} \sqsubseteq_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{y}) \Longrightarrow \big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \sqsubseteq_{\boldsymbol{B}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})\big) \Big)$$

  Por ejemplo, sea $(\mathcal{P}(\mathbb{Z}), \subseteq)$ el conjunto ordenado, y $f : \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ la función

  $$f(X) = \{\, x^2 \mid x \in X \,\}$$

  La función f **sí es monótona** respecto al orden $\subseteq$:

  $$\forall\, X, Y \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) : \Big((X \subseteq Y) \Rightarrow \big(f(X) \subseteq f(Y) \big) \Big)$$

  En efecto: sea $x' \in f(X)$. Por definición de f, existe $x \in X$ tal que $x' = x^2$. Como $X \subseteq Y$ y $x \in X$ se cumple que $x \in Y$. Por tanto, $x^2 \in f(Y)$, y como $x^2 = x'$, se cumple que $x' \in f(Y)$.

  El recíproco de esta implicación no es cierto: sea $X = \{-2, 3\}$ e $Y = \{-4, 2, 3\}$. Se cumple

  $$f(X) = \{\, 4, 9 \,\} \subseteq \{\, 4, 9, 16 \,\} = f(Y)$$

  Sin embargo, $X \nsubseteq Y$.

Funciones que preservan el orden

- f **preserva el orden** si se cumple la siguiente propiedad

$$\forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{A} : \left((\boldsymbol{x} \sqsubseteq_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{y}) \Leftrightarrow \left(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \sqsubseteq_{\boldsymbol{B}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})\right)\right)$$

La función f del ejemplo anterior **no preserva el orden** $\subseteq$.

Para el conjunto ordenado $(\mathbb{N}, \leq)$, la función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(x) = x^2$ **sí preserva el orden** $\leq$:

$$x \leq y \Leftrightarrow x^2 \leq y^2 \qquad \text{para todos } x, y \in \mathbb{N}$$

Sin embargo, la función f **no es biyectiva**.

- f es un **isomorfismo de orden** si f **preserva el orden** y es **biyectiva**.

La función f del ejemplo anterior **no es un isomorfimo de orden**, pues **no es biyectiva**.

Otro ejemplo: sean los conjuntos ordenados $(A, \leq)$ y $(B, \leq)$, donde $A = \{\, n \in \mathbb{N} \mid n\ es\ par\}$ y $B = \{\, n \in \mathbb{N} \mid n\ es\ impar\}$. La función $f : A \longrightarrow B$ tal que $f(2n) = 2n + 1$ **sí es biyectiva**:

Existe $f^{-1} : B \longrightarrow A$, dada por $f^{-1}(2n + 1) = 2n$

Además, f **preserva el orden**: $2n \leq 2n' \Leftrightarrow 2n + 1 \leq 2n' + 1 \Leftrightarrow f(2n) \leq f(2n')$.

Por tanto, f **sí es un isomorfismo de orden** entre $(A, \leq)$ y $(B, \leq)$.

Otro ejemplo:

Sea $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ la función $f(n) = n + 1$, definida en el conjunto ordenado $(\mathbb{Z}, \leq)$.

f **sí es una función biyectiva**, pues existe su inversa $f^{-1}(n) = n - 1$.

Además, f **preserva el orden**:

$$n \leq n' \Leftrightarrow n + 1 \leq n' + 1 \Leftrightarrow f(n) \leq f(n'), \text{ para todos } n, n' \in \mathbb{Z}.$$

Por tanto, f **sí es un isomorfismo de orden** entre $(\mathbb{Z}, \leq)$ y $(\mathbb{Z}, \leq)$.

- f es un **automorfismo** en $(A, \leq)$ si f es un **isomorfimo de orden** entre $(A, \leq)$ y $(A, \leq)$.

  Por ejemplo, la función anterior $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, definida por $f(n) = n + 1$, es un automorfismo en $(\mathbb{Z}, \leq)$.

Teorema: sean $(A, \sqsubseteq_A)$ y $(B, \sqsubseteq_B)$ dos conjuntos ordenados y $f : A \to B$ un isomorfismo de conjuntos ordenados. Entonces:

- x máximo en $A \Leftrightarrow f(x)$ máximo en B.
- x maximal en $A \Leftrightarrow f(x)$ maximal en B.
- x mínimo en $A \Leftrightarrow f(x)$ mínimo en B.
- x minimal en $A \Leftrightarrow f(x)$ minimal en B.

Ejercicio (examen enero 2020)

- Sea $(B, \sqsubseteq_B)$ un **conjunto parcialmente ordenado** y $f : A \longrightarrow B$ una función (total) **inyectiva**. Definimos una **relación binaria** R_f en A:

$$x\ R_f\ y \Leftrightarrow f(x) \sqsubseteq_B f(y)$$

a) Demuestra que $\boldsymbol{R_f}$ es una relación de orden en $\boldsymbol{A}$.

$\boldsymbol{R_f}$ es reflexiva: $\forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} : \boldsymbol{x\ R_f\ x}$

$x\ R_f\ x \Leftrightarrow f(x) \sqsubseteq_B f(x)$ se cumple, pues $\sqsubseteq_B$ es un orden parcial (es reflexivo) y $f(x) \in B$.

$\boldsymbol{R_f}$ es antisimétrica: $\forall\, \boldsymbol{x, y} \in \boldsymbol{A} : \left((\boldsymbol{x\ R_f\ y} \wedge \boldsymbol{y\ R_f\ x}) \Longrightarrow (\boldsymbol{x = y}) \right)$

$$x\ R_f\ y \Leftrightarrow f(x) \sqsubseteq_B f(y)$$
$$y\ R_f\ x \Leftrightarrow f(y) \sqsubseteq_B f(x)$$

Como $\sqsubseteq_B$ es un orden parcial (es antisimétrico) y $f(x), f(y) \in B$, se cumple $f(x) = f(y)$.
Como f es una función **inyectiva**: $f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$.

$\boldsymbol{R_f}$ es transitiva: $\forall\, \boldsymbol{x, y} \in \boldsymbol{A} : \left((\boldsymbol{x\ R_f\ y} \wedge \boldsymbol{y\ R_f\ z}) \Longrightarrow \boldsymbol{x\ R_f\ z} \right)$

$$x\ R_f\ y \Leftrightarrow f(x) \sqsubseteq_B f(y)$$
$$y\ R_f\ z \Leftrightarrow f(y) \sqsubseteq_B f(z)$$

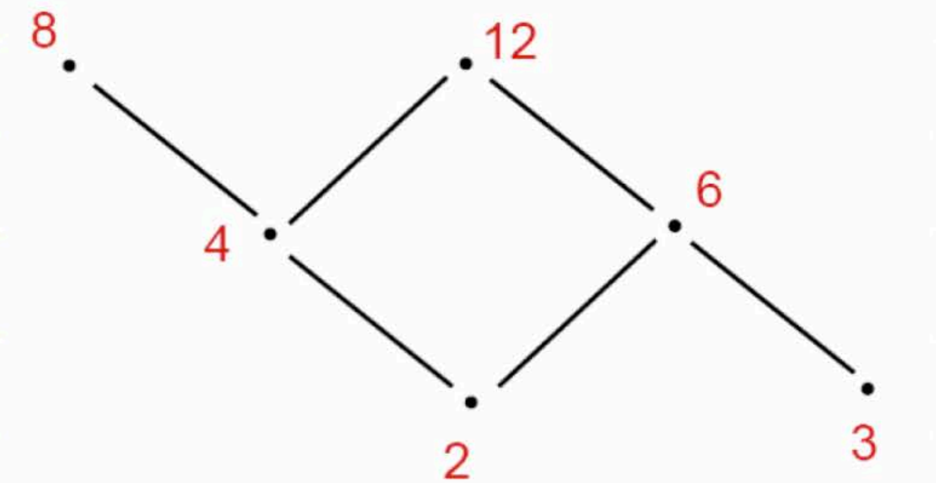
Como $\sqsubseteq_B$ es un orden parcial (es transitivo) y $f(x), f(y), f(z) \in B$, se cumple $f(x) \sqsubseteq_B f(z)$.
Por tanto: $f(x) \sqsubseteq_B f(z) \Leftrightarrow x\ R_f\ z$.

Diagramas de Hasse (repaso)

Definición: un "diagrama de Hasse" es una representación de un conjunto ordenado (finito) $(A, \sqsubseteq)$ de modo que:

- Cada punto representa un elemento de A
- Si $x \sqsubseteq y$ entonces se añade una línea ascendente de x a y
- No se representan las líneas que se entienden por transitividad

Ejemplo: $A = \{2,3,4,6,8,12\}$ con orden dado por $x \sqsubseteq y \Leftrightarrow x \mid y$



Observación: los diagramas de Hasse sólo se usan para representar órdenes, no órdenes estrictos.

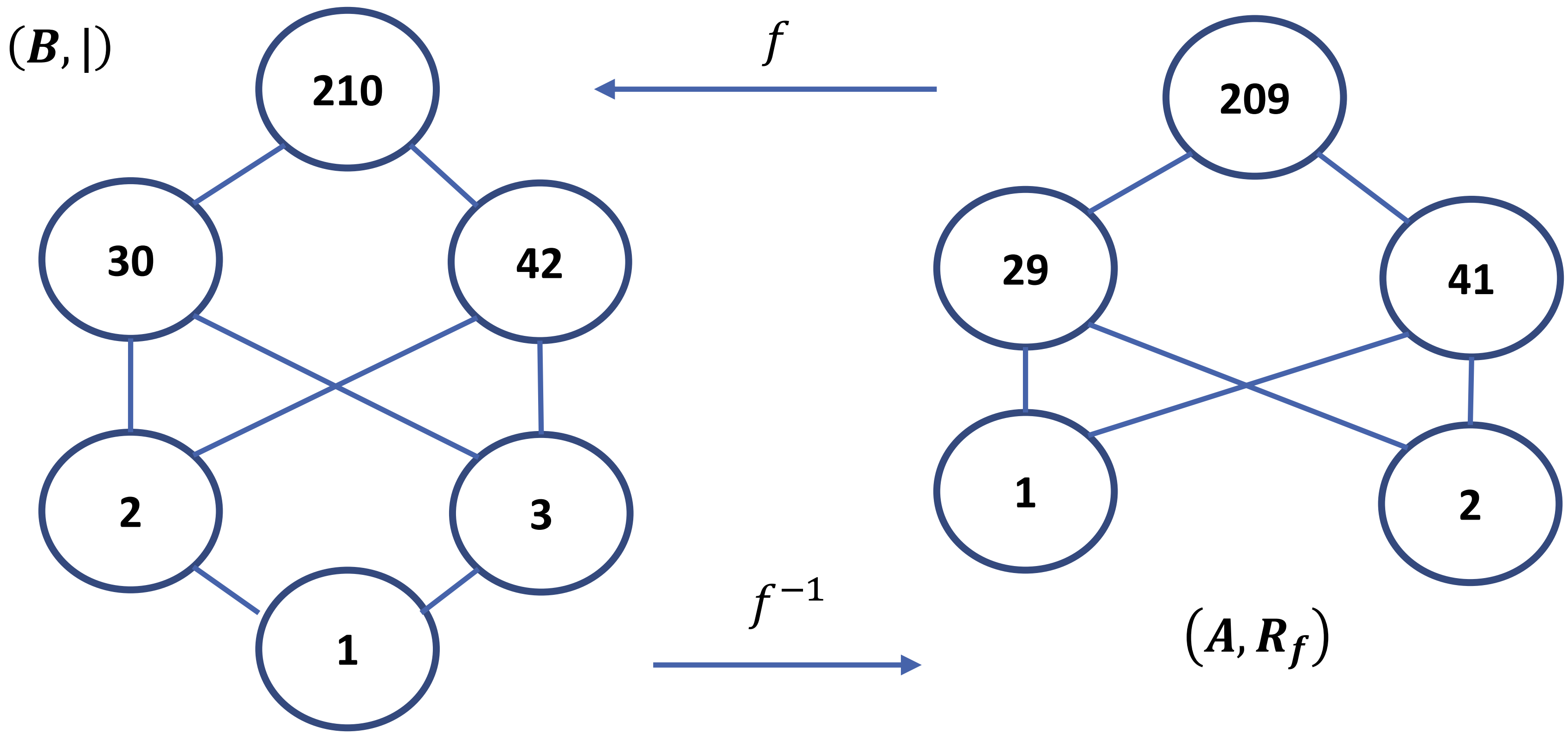
Facultad de Informática

Facultad de Ciencias MATEMÁTICAS

b) Considera el conjunto $\boldsymbol{B} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{30}, \mathbf{42}, \mathbf{210}\}$, ordenado por la **relación de divisibilidad**. Tomamos $\boldsymbol{A} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{29}, \mathbf{41}, \mathbf{209}\}$ y definimos la función $f : A \longrightarrow B$ tal que $f(x) = x + 1$. Dibuja el **diagrama de Hasse de** $\left(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{R_f}\right)$.

La función f es **un isomorfismo de orden** entre $\left(A, R_f\right)$ y $(B, |)$, pues es **biyectiva** y **preserva el orden**:

$$\boldsymbol{x}\, \boldsymbol{R_f}\, \boldsymbol{y} \iff \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) \iff (\boldsymbol{x} + \mathbf{1}) \mid (\boldsymbol{y} + \mathbf{1})$$



Definición: sea $(A, \sqsubseteq)$ conjunto ordenado, $S \subseteq A$ un subconjunto de A y $x \in S$ un elemento en S. Decimos que x es…

- "máximo" de S si $y \sqsubseteq x$ para cualquier otro $y \in S$.

  (x es mayor o igual que cualquier otro en S)

- "maximal" de S si no existe $y \in S$ tal que $x \sqsubset y$.

  (no hay nadie en S mayor estrictamente que él)

- "mínimo" de S si $x \sqsubseteq y$ para cualquier otro $y \in S$.

  (x es menor o igual que cualquier otro en S)

- "minimal" de S si no existe $y \in S$ tal que $y \sqsubset x$.

  (no hay nadie en S menor estrictamente que él)

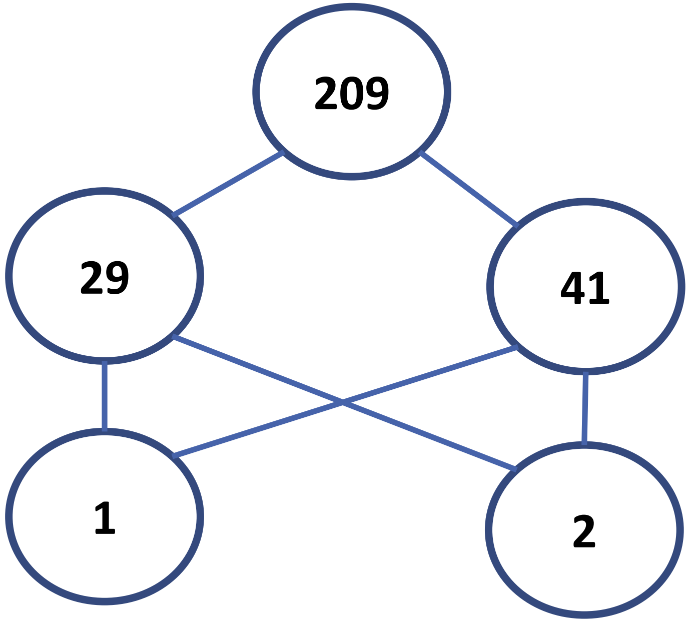
x mínimo (o máximo) $\Rightarrow$ x minimal (o maximal)

si x es mínimo (o máximo) entonces es único

Extremos = máximos y mínimos

Extremales = maximales y minimales

c) Determina los **elementos extremales** (maximales y minimales) y **elementos extremos** (máximo y mínimo) **de** (A, R_f).



(A, R_f)

Maximales: {209}
Minimales: {1,2}

Máximo: 209
Mínimo: NO HAY

Órdenes Bien Fundamentados

- Un **orden parcial** $\sqsubseteq$ **sobre un conjunto** A es **bien fundamentado** si **para todo** $\boldsymbol{S \subseteq A}$ **no vacío, existe algún elemento minimal**:

  $\sqsubseteq$ está **bien fundamentado** $\Longleftrightarrow$ **No puede formarse ninguna sucesión infinita decreciente**
  $$\boldsymbol{s_0 \sqsupset s_1 \sqsupset s_2 \sqsupset s_3 \sqsupset \cdots \sqsupset s_i \sqsupset s_{i+1} \sqsupset \cdots}$$

- Un **orden lineal bien fundamentado** se denomina **buen orden**.

- **Ejemplos**

  1) La relación de orden $\leq$ **sí es un buen orden** sobre $\mathbb{N}$, pero **no es un buen orden** sobre $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$:

  $2 > 1 > 0 > -1 > -2 > \cdots$ (sucesión infinita decreciente)

  2) La relación de orden $\leq$ **no es buen orden** sobre el conjunto $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0\}$:

  $S = \left\{ \frac{1}{2^n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \subset A$ no tiene elemento minimal, pues $0 \notin S$.

  No es un orden bien fundamentado, aunque **sí es total**.

  3) La relación de orden $\subseteq$ sobre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ **no está bien fundamentada**:

  $\mathbb{N} \supset \mathbb{N} \setminus \{0\} \supset \mathbb{N} \setminus \{0,1\} \supset \cdots$ (sucesión infinita decreciente)

  4) La relación de orden $\subseteq$ sobre $\mathcal{F} = \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid X\ es\ finito\}$ **sí es un orden bien fundamentado**, pero **no es total**, luego **no es un buen orden**.

Supremos e Ínfimos (repaso)

Definición: dado $(A,\sqsubseteq)$ conjunto ordenado y $S \subseteq A$ subconjunto de A.

- Decimos que $x \in A$ es una "cota superior" de S si $u \sqsubseteq x$ para todo $u \in S$
- Decimos que $x \in A$ es una "cota inferior" de S si $x \sqsubseteq u$ para todo $u \in S$

Definición: dado $(A,\sqsubseteq)$ conjunto ordenado y $S \subseteq A$ subconjunto de A.

Definimos el

- "supremo" de S como $\sqcup S = \min\{x \in A \mid x \text{ cota superior de } S\}$
- "ínfimo" de S como $\sqcap S = \max\{x \in A \mid x \text{ cota inferior de } S\}$

Observación: a diferencia de $\max(S)$ y $\min(S)$, $\sqcup S$ y $\sqcap S$ no tienen por qué estar en S.

De hecho no tienen ni por qué existir.

Notación-definición: dado un conjunto ordenado $(A, \sqsubseteq)$ y $x, y \in A$ dos elementos de A definimos:

- $x \sqcup y = \sqcup\{x, y\}$
- $x \sqcap y = \sqcap\{x, y\}$

Definición: decimos que el conjunto ordenado $(A, \sqsubseteq)$ es un "retículo" si $x \sqcup y$ y $x \sqcap y$ están definidos para cualesquiera $x, y \in A$

Ejemplo:

- $(A, \sqsubseteq)$ totalmente ordenado $\Rightarrow$ $(A, \sqsubseteq)$ retículo:

si $x, y \in A$ tenemos

$x \sqsubseteq y \Rightarrow x \sqcup y = y, x \sqcap y = x$ $\qquad$ $x \sqsupseteq y \Rightarrow x \sqcup y = x, x \sqcap y = y$

Ejemplos

- $(P(X),\subseteq)$ con X conjunto.

  Si $A,B\in P(X)$ tenemos $A\sqcup B = A\cup B$ y $A\sqcap B = A\cap B$

  con lo que $(P(X),\subseteq)$ es un retículo

- $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},\sqsubseteq)$ con $(x,y)\sqsubseteq(x',y') \Leftrightarrow x\leq x', y\leq y'$.

  $$(x,y)\sqcup(a,b) = (\max(x,a),\max(y,b))$$

  $$(x,y)\sqcap(a,b) = (\min(x,a),\min(y,b))$$

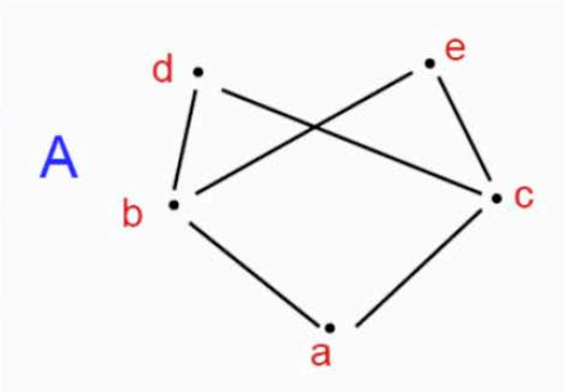
  con lo que $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},\sqsubseteq)$ es un retículo

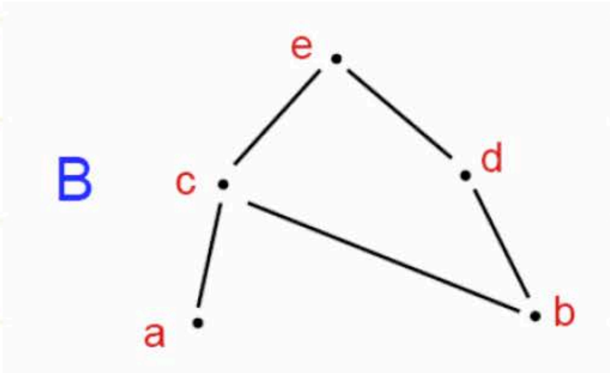
- $(\mathbb{N}_+,\sqsubseteq)$ con $x\sqsubseteq y \Leftrightarrow x\,|\,y$ (donde $\mathbb{N}_+ = \mathbb{N}\setminus\{0\}$)

  $$x\sqcup y = \mathrm{mcm}(x,y)$$

  $$x\sqcap y = \mathrm{mcd}(x,y)$$

  con lo que $(\mathbb{N}_+,\sqsubseteq)$ es un retículo





En A: $\nexists\ d \sqcup e$

En B: $\nexists\ a \sqcap b$

con lo que ni A ni B es un retículo

Observación: en A tenemos que $x \sqcap y$ existe para cualesquiera $x, y \in A$ y en B siempre existe $x \sqcup y$.

Definición: decimos que $(A, \sqsubseteq)$ es un

- "semirretículo superior" si dados $x, y \in A$ existe $x \sqcup y$.
- "semirretículo inferior" si dados $x, y \in A$ existe $x \sqcap y$.

Facultad de Informática

Facultad de Ciencias MATEMÁTICAS

Observación: si $(A,\sqsubseteq)$ es un retículo tenemos operaciones binarias

$$\begin{aligned} \sqcup : A\times A &\to A \\ (x,y) &\mapsto x\sqcup y \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \sqcap : A\times A &\to A \\ (x,y) &\mapsto x\sqcap y \end{aligned}$$

Ejemplo: $(P(X),\subseteq)$ retículo donde las operaciones $\sqcup$ y $\sqcap$ vienen dadas por $\cup$ y $\cap$.

Teorema 1: si $(A,\sqsubseteq)$ es un retículo entonces

- (Asociatividad) $x\sqcup(y\sqcup z)=(x\sqcup y)\sqcup z$ $\quad$ $x\sqcap(y\sqcap z)=(x\sqcap y)\sqcap z$
- (Conmutatividad) $x\sqcup y=y\sqcup x$ $\quad$ $x\sqcap y=y\sqcap x$
- (Idempotencia) $x\sqcup x=x$ $\quad$ $x\sqcap x=x$
- (Absorción) $x\sqcup(x\sqcap y)=x$ $\quad$ $x\sqcap(x\sqcup y)=x$

Demostración:

Absorción:

$$x\sqcap y\sqsubseteq x\Rightarrow x\sqcup(x\sqcap y)=x \qquad x\sqcup y\sqsupseteq x\Rightarrow x\sqcap(x\sqcup y)=x$$

Definición: sea $(A,\sqsubseteq)$ retículo. Decimos que…

- $(A,\sqsubseteq)$ es "distributivo" si

$$x\sqcup(y\sqcap z)=(x\sqcup y)\sqcap(x\sqcup z) \qquad x\sqcap(y\sqcup z)=(x\sqcap y)\sqcup(x\sqcap z)$$

- $(A,\sqsubseteq)$ "posee extremos" si tiene un elemento máximo ∇ y un mínimo Δ ($\nabla \sqsupseteq x$ para todo $x\in A$, $\Delta \sqsubseteq x$ para todo $x \in A$)

- $(A,\sqsubseteq)$ es "complementario" si tiene extremos y además para cada elemento $x\in A$ existe un elemento complementario $\sim x$ tal que $(\sim x)\sqcup x=\nabla$ y $(\sim x)\sqcap x=\Delta$.

Ejemplo: consideramos el retículo $(P(X),\subseteq)$ con X conjunto.

Tenemos $A\sqcup B=A\cup B$ y $A\sqcap B=A\cap B$ con lo que si consideramos $\Delta=\varnothing$, $\nabla=X$ y $\sim A=X\backslash A=\backslash A$ vemos que es un retículo distributivo y complementario ya que $A\cup(\backslash A)=X$, $A\cap(\backslash A)=\varnothing$.

Definición: si $(A,\sqsubseteq)$ es un retículo distributivo y complementario decimos que es un "Álgebra de Boole".

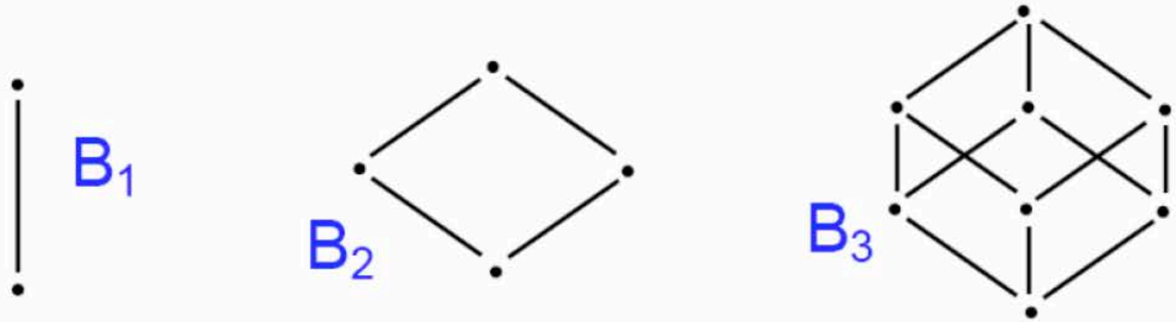
Ejemplo: $(P(X),\subseteq)$

Teorema: si $(B,\sqsubseteq)$ es un álgebra de Boole tenemos:

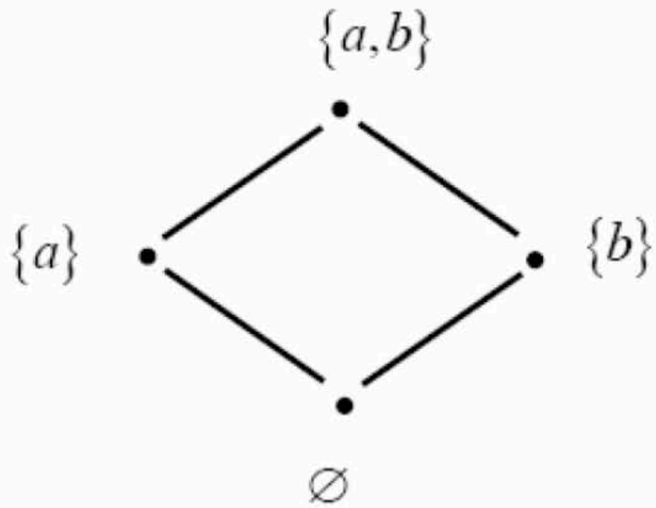
- $x\sqcup\Delta = x$, $x\sqcap\Delta = \Delta$, $x\sqcup\nabla = \nabla$ y $x\sqcap\nabla = x$
- El complementario $\sim x$ de cualquier elemento $x\in B$ es único
- $\sim(\sim x) = x$ para todo $x\in B$
- (Leyes de De Morgan) para todo $x,y\in B$ tenemos

$\sim(x\sqcup y) = (\sim x)\sqcap(\sim y)$, $\sim(x\sqcap y) = (\sim x)\sqcup(\sim y)$

Ejemplo 5: los siguientes diagramas de Hasse representan álgebras de Boole



Si $A=\{a,b\}$ tenemos $P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$ álgebra de Boole con diagrama de Hasse



con lo que B_2 es isomorfo a $\left(P(\{a,b\}),\subseteq\right)$.

B_3 es isomorfo a $\left(P(\{a,b,c\}),\subseteq\right)$.