Matemática Discreta y Lógica Matemática

Hoja 4 de ejercicios.

Facultad de Informática.

1. Razona cuáles de las afirmaciones que siguen son verdaderas:

a) $1 \in \{1\}$	b) $\{1\} \subseteq \{1\}$	c) $\{1\} \in \{1\}$	d) $\emptyset \in \emptyset$
e) $\{1\} \subseteq \{\{1\}\}$	f) $\{1\} \in \{\{1\}\}$	g) $\emptyset \subseteq \emptyset$	h) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$
i) $\emptyset \subseteq \{1\}$	j) $\emptyset \in \{1\}$	k) $\{\emptyset\} = \emptyset$	l) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

2. Sean a, b objetos cualesquiera. Razona que si $a \in \{\{b\}\}$, entonces $b \in a$.

3. Construye dos conjuntos A, B tales que $A \in B$ y $A \subseteq B$.

4. Sean A, B dos conjuntos. Demuestra que si dos cualesquiera de los enunciados siguientes son verdaderos, también lo es el tercero.

   a) A y B son disjuntos b) $A \subseteq B$ c) $A = \emptyset$

5. Definimos una sucesión de conjuntos

$$A_k = \{\{m \in \mathbb{N} \mid m < n\} \mid n \leq k\} \qquad \text{(para cada } k \in \mathbb{N}\text{)}$$

   y un conjunto $B = \{\{m \in \mathbb{N} \mid m < n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$

   a) Enumera A_0, A_1 y A_2.

   b) Demuestra que $A_k \subseteq B$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

   c) Demuestra que $\emptyset \in A_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

6. Sean X, Y y Z tres conjuntos disjuntos entre sí. Demuestra que si los conjuntos A y B cumplen que $A \subseteq X \cup Y$ y $B \subseteq X \cup Z$, entonces $A \cap B \subseteq X$.

7. Sean A, B, X tres conjuntos. Demuestra que las tres condiciones siguientes son equivalentes:

   a)$X \subseteq A \cup B$ b)$(X \setminus A) \cap (X \setminus B) = \emptyset$ c)$(X \setminus A) \subseteq B$

8. Sea $\mathcal{C}$ una familia no vacía de conjuntos. Demuestra:

   a) Para todo $A \in \mathcal{C}$, $A \subseteq \bigcup \mathcal{C}$.

   b) Si B es un conjunto tal que $A \subseteq B$ para todo $A \in \mathcal{C}$, entonces $\bigcup \mathcal{C} \subseteq B$.

   c) Para todo $A \in \mathcal{C}$, $\bigcap \mathcal{C} \subseteq A$.

   d) Si B es un conjunto tal que $B \subseteq A$ para todo $A \in \mathcal{C}$, entonces $B \subseteq \bigcap \mathcal{C}$.

9. Dados los conjuntos $A = \{1, \{2\}\}$, $B = \{1, 2, \{1, 2\}\}$, enumera cada uno de los conjuntos siguientes:

a) $A \cup B$	b) $A \cap B$	c) $A \setminus B$	d) $B \setminus A$
e) $\mathcal{P}(A)$	f) $B \cap \mathcal{P}(A)$	g) $A \times B$	h) $(A \times B) \cap (B \times A)$

10. Enumera los conjuntos: $\mathcal{P}(\emptyset)$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$ y $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))))$.

11. Dado un conjunto A, sea $A' = A \cup \{A\}$. Enumera los siguientes conjuntos $\emptyset'$, $\emptyset''$, $\emptyset'''$, $\emptyset''''$.

12. Para cada $k \in \mathbb{N}$, sean

$$A_k = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq k\} \qquad\qquad B_k = \{n \in \mathbb{N} \mid n > k\}$$

Determina:

$$\bigcup\{A_k \mid k \in \mathbb{N}\} \qquad\qquad \bigcap\{A_k \mid k \in \mathbb{N}\}$$
$$\bigcup\{B_k \mid k \in \mathbb{N}\} \qquad\qquad \bigcap\{B_k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

13. De las cuatro afirmaciones que se presentan, para A, B y C conjuntos cualesquiera no vacíos, demuestra que únicamente una es cierta y pon contraejemplos de las otras tres que son falsas:

   a) Si $A \in B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \in C$.
   b) Si $A \in B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$.
   c) Si $A \subseteq B$ y $B \in C$, entonces $A \in C$.
   d) Si $A \subseteq B$ y $B \in C$, entonces $A \subseteq C$.

14. Demuestra que, para todo $A, B, C \neq \emptyset$, se cumple que $(A \cap C) \subseteq (B \cap C)$ y $(A \cap \backslash C) \subseteq (B \cap \backslash C)$ implican $A \subseteq B$.

Ejercicios Opcionales

15. Usa las leyes de Boole para demostrar las igualdades que siguen:

   a) $\backslash(A \cup (B \cap C)) = (\backslash C \cup \backslash B) \cap \backslash A$
   b) $\backslash(\backslash(A \cup B) \cap C) = (\backslash C \cup B) \cup A$
   c) $(\backslash A \cup B) \cap A = A \cap B$
   d) $\backslash(\backslash A \cup B) \cup B = A \cup B$
   e) $\backslash(\backslash A \cup B) \cup A = A$

16. Estudia las siguientes igualdades entre conjuntos. Demuestra las que sean válidas, y construye un contraejemplo para las que no lo sean.

   a) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B$
   b) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
   c) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
   d) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$
   e) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$
   f) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$
   g) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$
   h) $(A \cap B) \setminus C = A \cap (B \setminus C) = (A \setminus C) \cap B$

17. Dados un conjunto A y una familia no vacía $\mathcal{C}$ de conjuntos, demuestra:

   a) $A \setminus (\bigcup \mathcal{C}) = \bigcap\{A \setminus C \mid C \in \mathcal{C}\}$
   b) $(\bigcup \mathcal{C}) \setminus A = \bigcup\{C \setminus A \mid C \in \mathcal{C}\}$
   c) $A \setminus (\bigcap \mathcal{C}) = \bigcup\{A \setminus C \mid C \in \mathcal{C}\}$
   d) $(\bigcap \mathcal{C}) \setminus A = \bigcap\{C \setminus A \mid C \in \mathcal{C}\}$

18. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos familias no vacías de conjuntos. Demuestra las igualdades siguientes:

a) $(\bigcup \mathcal{C}) \cup (\bigcup \mathcal{D}) = \bigcup \{C \cup D \mid C \in \mathcal{C}, D \in \mathcal{D}\}$

b) $(\bigcup \mathcal{C}) \cap (\bigcup \mathcal{D}) = \bigcup \{C \cap D \mid C \in \mathcal{C}, D \in \mathcal{D}\}$

c) $(\bigcap \mathcal{C}) \cup (\bigcap \mathcal{D}) = \bigcap \{C \cup D \mid C \in \mathcal{C}, D \in \mathcal{D}\}$

d) $(\bigcap \mathcal{C}) \cap (\bigcap \mathcal{D}) = \bigcap \{C \cap D \mid C \in \mathcal{C}, D \in \mathcal{D}\}$

19. Dados cuatro conjuntos A, B, C y D, demuestra:

    a) $C \neq \emptyset$ y $A \times C \subseteq B \times C \Longrightarrow A \subseteq B$

    b) $C \neq \emptyset$ y $C \times A \subseteq C \times B \Longrightarrow A \subseteq B$

    c) $(A \times B) \setminus (C \times D) = ((A \setminus C) \times B) \cup (A \times (B \setminus D))$

20. La *diferencia simétrica* entre dos conjuntos A y B se define como

$$A \oplus B \stackrel{\text{def}}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Demuestra que esta operación es conmutativa y asociativa; es decir, las igualdades

$$A \oplus B = B \oplus A \qquad\qquad A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$$

son siempre válidas.

21. Estudia si la diferencia simétrica cumple o no las propiedades que siguen. En cada caso, da una demostración o un contraejemplo.

    a) $A \oplus (B \cap C) = (A \oplus B) \cap (A \oplus C)$

    b) $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$

    c) $A \oplus (A \oplus A) = A$

    d) $A \subseteq B \implies A \oplus C \subseteq B \oplus C$

22. Suponiendo conocido el concepto de par ordenado, las ternas ordenadas se pueden definir poniendo:

$$(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} ((x, y), z)$$

Demuestra que esta definición cumple la ley de igualdad para ternas ordenadas.