2.7 Conjuntos y cardinales infinitos

Definición: Dado un conjunto finito A se define el “cardinal” de A como

$$|A| = \text{número de elementos en } A$$

Observación: dados dos conjuntos A y B tales que $|A| = |B| = n$ tenemos:

$$f : A \to B \text{ biyección.}$$

- **Principio del palomar**

Sean A y B dos conjuntos finitos tales que $|A| > |B|$ y $f : A \to B$ una función.

Entonces f no es inyectiva.

(si en un palomar hay más palomas que casillas en alguna casilla hay más de una paloma)

Ejemplo:

- Dados 10001 usuarios de móvil, al menos 2 tienen el mismo PIN
- Si en un grupo de 17 personas cada una rellena una quiniela, al menos 2 personas tienen el mismo número de aciertos:

Teorema: Sean A y B conjuntos finitos. Entonces

- $S \subseteq A \Rightarrow S$ finito y $|S| \leq |A|$
- $A \cup B$ finito y $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
- $A \setminus B$ finito y $|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$
- $A \times B$ finito y $|A \times B| = |A| \cdot |B|$
- $(A \to B)$ finito y $|(A \to B)| = |B|^{|A|}$
- $P(A)$ finito y $|P(A)| = 2^{|A|}$

- **Cardinales infinitos**

Para conjuntos infinitos no podemos usar la cantidad de elementos como medida del tamaño del conjunto. Nos basamos en el criterio de biyección del caso finito.

Definición: Dados dos conjuntos A y B (finitos o infinitos) decimos que…

- A y B son "equipotentes" ($A \sim_c B$) si existe una biyección $f : A \to B$.
- A está dominado por B ($A \leq_c B$) si existe una inyección $f : A \to B$.
- A está dominado estrictamente por B ($A <_c B$) si $A \leq_c B$ y $A \not\sim_c B$.

Ejemplo:

(a) $\mathbb{N}_+ \leq_c \mathbb{N}$: $\quad \begin{aligned} id_{\mathbb{N}_+} : \mathbb{N}_+ &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto n \end{aligned}$ es una función inyectiva.

(b) $\mathbb{N}_+ \sim_c \mathbb{N}$: $\quad \begin{aligned} p : \mathbb{N}_+ &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto n-1 \end{aligned}$ es una función biyectiva

Observación: Un conjunto puede ser equipotente a un subconjunto propio suyo (Paradoja de Galileo)

(c) $\mathbb{N}_+ \not<_c \mathbb{N}$ a pesar de que $\mathbb{N}_+ \subset \mathbb{N}$.

Teorema: Sean A, B y C conjuntos. Entonces:

- $A \sim_c A$
- $A \sim_c B \Rightarrow B \sim_c A$
- $\left.\begin{matrix} A \sim_c B \\ B \sim_c C \end{matrix}\right\} \Rightarrow A \sim_c C$

La relación $\sim_c$ NO es una relación de equivalencia porque estamos considerando el universo de todos los conjuntos que NO es un conjunto.

Es <u>similar</u> a una relación de equivalencia.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \\ x &\mapsto f(x) = e^x \end{aligned}$$

es una función biyectiva con lo que $\mathbb{R} \sim_c \mathbb{R}_+$.

Teorema: Dados A, B y C conjuntos entonces

- $A \leq_c A$
- $A \leq_c B, B \leq_c C \Rightarrow A \leq_c C$
- $A \leq_c B, B \leq_c A \Rightarrow A \sim_c C$ (Schröder & Bernstein)
- $A \sim_c B \Rightarrow A \leq_c B$
- $A \subseteq B \Rightarrow A \leq_c B$
- A finito $\Rightarrow A \leq_c \mathbb{N}$
- A infinito $\Rightarrow \mathbb{N} \leq_c A$ ($\mathbb{N}$ es el “menor” conjunto infinito)

Ejemplo:

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad (m,n) \mapsto 2^m \cdot 3^n$$ inyectiva

$$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad n \mapsto (n,0)$$ inyectiva

Así

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \leq_c \mathbb{N} \\ \mathbb{N} \leq_c \mathbb{N} \times \mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim_c \mathbb{N}$$ por Schröder-Bernstein

Definición:

Sea A conjunto, decimos que A es "numerable" si A es finito o $A \sim_c \mathbb{N}$.

Si $A \sim_c \mathbb{N}$ decimos que A es "infinito numerable".

Ejemplo:

$\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_+$ y $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ son infinitos numerables (visto en ejemplos anteriores)

Teorema:

$$A_1, \ldots, A_n \text{ numerables} \Rightarrow A_1 \cup \cdots \cup A_n \text{ numerable}$$

Ejemplo:

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\} \cup \{-1, -2, -3, -4, \ldots\} \Rightarrow \mathbb{Z} \text{ numerable}$$

Teorema:

$$A_1, \ldots, A_n \text{ numerables} \Rightarrow A_1 \times \cdots \times A_n \text{ numerable}$$

Teorema: Sea $F = \{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ una familia numerable de conjuntos numerables.

Entonces $\bigcup F$ numerable.

Demostración:

$$\begin{aligned}
A_0 &= \{a_{00}, a_{01}, a_{02}, a_{03}, a_{04}, a_{05}, \ldots\} \\
A_1 &= \{a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}, \ldots\} \\
A_2 &= \{a_{20}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, a_{25}, \ldots\} \\
A_3 &= \{a_{30}, a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}, a_{35}, \ldots\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Podemos dar una biyección entre $\bigcup F$ y $\mathbb{N}$ según la regla indicada por las flechas:

Ejemplo:

$\mathbb{Q}$ es numerable:

Obviamente $\mathbb{N} \leq_c \mathbb{Q}_+ = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$

Además, la función

$$f : \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{N}$$
$$\frac{m}{n} \mapsto 2^m \cdot 3^n$$

(donde se toman fracciones reducidas) es inyectiva $\Rightarrow \mathbb{Q}_+ \leq_c \mathbb{N}$

Así por Schröder-Bernstein tenemos que $\mathbb{Q}_+ \sim_c \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{Q}_+$ numerable.

Análogamente $\mathbb{Q}_-$ numerable con lo que $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}_+$ numerable.

Observación: no todos los conjuntos infinitos son numerables

Ejemplo: el intervalo $(0,1) \subseteq \mathbb{R}$ no es numerable

Supongamos que $(0,1)$ es numerable.

Entonces podemos "poner en fila" todos los números reales positivos menores que 1:

$$
\begin{array}{l}
0, a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 \ldots \\
0, b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 \ldots \\
0, c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6 \ldots \\
0, d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 \ldots \\
\vdots
\end{array}
$$

Cogemos el número $0, \alpha_1 \beta_2 \gamma_3 \delta_4 \varepsilon_5 \ldots$ tal que $\alpha_1 \neq a_1$, $\beta_2 \neq b_2$, $\gamma_3 \neq c_3$, $\delta_4 \neq d_4$, …

Este número está en el intervalo $(0,1)$ pero NO está en la lista! (**contradicción**)

Así $(0,1)$ no es numerable (y por tanto tampoco $\mathbb{R}$).

Teorema: $P(\mathbb{N})$ no es numerable

Demostración:

Supongamos que $P(\mathbb{N})$ es numerable:

$$P(\mathbb{N}) = \{A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots\}$$

Sea $D = \{i \in \mathbb{N} \mid i \notin A_i\}$

Como $D \subseteq \mathbb{N}$ entonces $D = A_j$ para algún $j \in \mathbb{N}$.

$j \in D \Rightarrow j \in A_j \Rightarrow j \notin D$ (contradicción!)

$j \notin D \Rightarrow j \notin A_j \Rightarrow j \in D$ (contradicción!)

Por tanto $P(\mathbb{N})$ no es numerable.

Teorema: $A <_c P(A)$

Observación: hay una cantidad infinita de cardinales infinitos

$$\mathbb{N} <_c P(P(\mathbb{N})) <_c P(P(P(\mathbb{N}))) <_c P\Big(P\Big(P\Big(P\big(P(\mathbb{N})\big)\Big)\Big)\Big) <_c \cdots$$

Definición: Si $X \sim_c \mathbb{R}$ decimos que X tiene la "potencia del continuo"

Teorema: $P(\mathbb{N}) \sim_c \mathbb{R}$

Hipótesis del continuo: no existe cardinal entre $|\mathbb{N}|$ y $|\mathbb{R}|$

Observación:

Los cardinales de los conjuntos finitos proporcionan los números naturales.

Podemos considerar los cardinales de cualquier conjunto y definir una "aritmética transfinita".

Definición: Si $|A| = \alpha$ y $|B| = \alpha$ con $A \cap B = \varnothing$ definimos:

- $\alpha + \beta = |A \cup B|$
- $\alpha \cdot \beta = |A \times B|$
- $\beta^{\alpha} = |(A \to B)|$

Definición:

$|\mathbb{N}| = \aleph_0$ ("álef sub cero")

$|\mathbb{R}| = \aleph = c$ ("álef", c de continuo)

Ejemplo:

- $n + \aleph_0 = \aleph_0$
- $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$
- $2^{\aleph_0} = \aleph$

  $(\mathbb{N} \to \{0,1\}) \sim_c P(\mathbb{N}) \sim_c \mathbb{R}$

  un conjunto viene dado por una lista de 1`s y 0's, ("está", "no está")
- $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$
- $\aleph \cdot \aleph = \aleph$