Introducción a la probabilidad

PID_00279835

Ana Escudero
Alícia Miralles
Alícia Vila

Tiempo mínimo de dedicación recomendado: 3 horas

Universitat Oberta de Catalunya

Ana Escudero **Alícia Miralles** **Alícia Vila**

La revisión de este recurso de aprendizaje UOC ha sido coordinada por la profesora: Cristina Cano Bastidas

Tercera edición: septiembre 2020
© de esta edición, Fundació Universitat Oberta de Catalunya (FUOC)
Av. Tibidabo, 39-43, 08035 Barcelona
Autoría: Ana Escudero, Alícia Miralles, Alícia Vila
Producción: FUOC

Índice

Introducción 5

Objetivos 7

1 Técnicas de contar 9

1.1 Muestras ordenadas con repetición. Variaciones con repetición 11

1.2 Muestras ordenadas sin repetición. Variaciones. Permutaciones de *n* elementos 12

1.3 Muestras no ordenadas sin repetición. Combinaciones 13

1.4 Muestras no ordenadas con repetición 15

1.5 Otros ejemplos 16

2 Espacio de probabilidad 19

2.1 Experiencia aleatoria y sucesos. Operaciones básicas y propiedades 20

2.2 Definición axiomática de probabilidad. Espacio finito equiprobable 24

2.3 Probabilidad condicionada. Sucesos independientes 30

2.4 Teorema de la probabilidad total. Teorema de Bayes 33

2.5 Diagramas de árbol 35

Resumen 38

Actividades 41

Solucionario 42

Introducción

Normalmente, el concepto de probabilidad lo tenemos asociado a juegos, casinos, ganar y perder, pero no solo en este ámbito se utiliza la teoría de probabilidad. Por ejemplo, en el estudio de las fluctuaciones que sufre el mercado de valores, se utiliza la teoría de probabilidades. En el negocio de los seguros de coches, hay que evaluar las probabilidades de que pasen ciertos incidentes. También dentro del marco de la ingeniería de telecomunicaciones, el punto de vista probabilístico es muy importante, por ejemplo, cuando se trabaja sobre modelos de ruido y el diseño de sistemas para minimizarlo.

Precisamente, en el campo de las telecomunicaciones estamos acostumbrados a analizar y diseñar sistemas desde un punto de vista estático, considerando que las señales son deterministas (ya sea en el dominio temporal o frecuencial). Estas técnicas, sin embargo, no consideran que las señales o las respuestas de los sistemas tengan una variabilidad causada por efectos externos no considerados, o por la interferencia de señales aleatorias como el ruido. La teoría de la probabilidad y las técnicas de contar nos servirán para modelizar todos estos fenómenos que no se pueden caracterizar con expresiones deterministas. Imaginad, por ejemplo, que queremos medir el número de llamadas que llega a una centralita telefónica o que queremos calcular cuál es el tiempo de vida de un componente electrónico. Estos valores no son fijos y determinados, sino que los caracterizaremos con una cierta probabilidad.

¿Cómo podemos saber si un comportamiento o medida son aleatorios o deterministas? Dependerá de cómo lo podamos caracterizar. Una señal la consideraremos determinista cuando se puede definir unívocamente por una serie de parámetros que nos permiten reconstruir la señal exactamente. Por ejemplo, podemos caracterizar una señal sinusoidal a partir de su amplitud, frecuencia y fase. En cambio, cuando tenemos una señal aleatoria, la caracterizaremos con una determinada distribución que nos dará una idea de cómo se comporta la señal, pero para cada realización de la señal aleatoria tendremos una pequeña variabilidad de los valores que obtengamos. Por ejemplo, en el caso de la llegada de llamadas a una central telefónica, podemos definir cada cuánto tiempo de media podemos esperar una llamada, pero según la hora del día en la que hagamos las mediciones, la secuencia de llegada de llamadas no es exactamente la misma. Lo que sí sabemos *a priori* es que llegará una llamada con una cierta probabilidad.

La teoría de la probabilidad nos da un conjunto de herramientas que nos permiten analizar y entender todos estos fenómenos asociados al comportamiento de señales y sistemas complejos, como las comunicaciones, el procesamiento de señal, el cálculo de enlaces o la capacidad de los sistemas para dar un servicio adecuado.

En este módulo, veremos algunos de los conceptos básicos en los que se fundamenta la teoría de la probabilidad. En el apartado 1, veremos cuáles son las técnicas de contar más habituales y para qué nos pueden ser útiles. A continuación, en el apartado 2, definiremos qué es la probabilidad y veremos algunos teoremas importantes.

Objetivos

Los objetivos que tiene que lograr el estudiante, una vez trabajados los materiales didácticos de este módulo, son:

1. Entender por qué la probabilidad es fundamental en el campo de las telecomunicaciones.
2. Conocer las diferentes técnicas de contar y calcular algunos de los parámetros más importantes.
3. Aprender los conceptos básicos de la teoría de la probabilidad y poner ejemplos: espacio muestral, suceso y experiencia aleatoria.
4. Aplicar la representación gráfica a los conjuntos de sucesos y espacios muestrales aleatorios.
5. Enunciar y estudiar la ley de Laplace.
6. Entender el concepto de probabilidad condicionada.
7. Estudiar y aplicar el teorema de Bayes.
8. Utilizar los diagramas de árbol para calcular probabilidades.

1. Técnicas de contar

En muchas experiencias, el cálculo de una probabilidad está relacionado con la cantidad de posibilidades diferentes que tiene un cierto aspecto de la experiencia. Por ejemplo, sabemos que al lanzar un dado perfecto la probabilidad de que salga un 2 es $\frac{1}{6}$, puesto que hay 6 resultados posibles. Sin embargo, este es un caso muy sencillo y a veces este recuento de resultados no es tan simple.

Pensad, por ejemplo, en una red de telecomunicaciones como internet, formada por un conjunto de direccionadores. Nos podemos preguntar de cuántas maneras diferentes podemos interconectar dos ordenadores a través de la Red: podemos elegir el camino más corto, o el camino menos congestionado. También podemos elegir un camino que está determinado por nuestro proveedor de servicios o el camino que introduzca menos errores en la información, etc. Otro ejemplo serían los circuitos multiplexores. En este tipo de circuitos, tenemos varias señales de entrada y una serie de señales de selección que nos dan una determinada señal de salida. Podemos plantear cuántas combinaciones posibles nos dan una determinada señal de salida, o si hay alguna salida que se dé con más frecuencia.

Todas estas cuestiones las responderemos estudiando las técnicas de contar más básicas. Esto es lo que haremos en este primer apartado del módulo. A partir de ejemplos, iremos introduciendo los conceptos.

Ejemplo 1.1

Empecemos pensando en un conjunto de 10 elementos: $A = \{0,1,2,\ldots,9\}$. Consideremos una secuencia de 4 elementos, ordenados y con repetición, de este conjunto: **muestra de tamaño** 4. Escribimos 5 muestras de ejemplo, que denominamos: m_1, m_2, m_3, m_4 y m_5. Veamos estas 5 muestras de ejemplo:

$$m_1 = 1123,\ \ m_2 = 7161,\ \ m_3 = 8032,\ \ m_4 = 0823,\ \ m_5 = 1965.$$

Nos fijamos en algunos aspectos. Algunas muestras tienen elementos repetidos, como m_1 y m_2. Y hay muestras cuya única diferencia es el orden de los elementos, como m_3 y m_4. A la hora de contar el número de muestras que podemos hacer, deberemos tener en cuenta estos aspectos.

Nota

Observad el ejemplo 1.1 en los tres parámetros que debemos tener en cuenta:

- Número de elementos del conjunto total.
- Tamaño de la muestra o número de elementos que tomamos en una realización del proceso.
- Número de muestras o número de veces que hacemos el experimento.

A continuación, veremos los tipos de muestras de elementos m que se pueden formar en un conjunto de elementos $A = \{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$.

Definición 1.1. Muestra de tamaño *m*, ordenada y sin repetición (o reemplazo). Consiste en una secuencia de elementos del conjunto A en la que no podemos repetir los elementos del conjunto A, y si tenemos dos muestras con los mismos elementos pero ordenados de manera diferente, las consideramos diferentes.

Ejemplo 1.2

En una empresa se dispone de tres ordenadores para hacer presentaciones. Se trata de ordenadores, con características diferentes, que denominamos A, B y C. Queremos elegir dos de ellos para dos presentaciones, una del director y una del subdirector, que se harán en lugares diferentes, simultáneamente. ¿De cuántas maneras podemos hacer la elección de ordenadores?

Se trata de una muestra de tamaño 2, ordenada, sin repetición. Es ordenada porque el hecho de que el director utilice A y el subdirector utilice B es diferente de que el director utilice B y el subdirector, A. No hay repetición porque, al ser el uso simultáneo, no pueden utilizar el mismo ordenador.

Las posibles elecciones son: AB, BA, AC, CA, BC, CB (donde, por ejemplo, el primer ordenador corresponde al director).

Repetición y reemplazo

Las palabras **repetición** y **reemplazo** se utilizan indistintamente. La palabra *repetición* nos dice que puede haber elementos repetidos dentro de una misma muestra. También se utiliza la palabra *reemplazo* porque este hecho, a veces, está vinculado a la manera en que se ha hecho la experiencia. Por ejemplo, si en una experiencia tenemos que sacar dos cartas de una baraja y después de quitar la primera carta anotamos el resultado y la volvemos a dejar en la baraja (reemplazo), en la segunda extracción podemos obtener la misma carta que antes.

Definición 1.2. Muestra de tamaño *m*, ordenada y con repetición (o reemplazo). Consiste en una secuencia de elementos del conjunto A, en la que podemos repetir los elementos del conjunto A, y si tenemos dos muestras con los mismos elementos, pero ordenados de manera diferente, las consideramos distintas.

Ejemplo 1.3

Continuando con el anterior ejemplo, ahora tenemos que decidir qué ordenadores se utilizarán en dos presentaciones que el subdirector debe hacer el primer y el último día de una feria de empresas.

Ahora se trata de una muestra de tamaño 2, ordenada, con repetición. Es ordenada porque utilizar A el primer día y utilizar B el último día no es lo mismo que utilizar B el primer día y A, el último día. Hay repetición porque, al ser días diferentes, se puede utilizar el mismo ordenador.

Las posibles elecciones son: AA, AB, AC, BA, BC, BB, CA, CB, CC (donde, por ejemplo, el primer ordenador corresponde al primer día).

Definición 1.3. Muestra de tamaño *m*, no ordenada y sin repetición (o reemplazo). Consiste en una secuencia de elementos del conjunto A en la que no podemos repetir los elementos del conjunto A, y si tenemos dos muestras con los mismos elementos, pero ordenados de manera diferente, las consideramos la misma.

Ejemplo 1.4

En la empresa de los ejemplos anteriores, se decide ampliar la memoria de dos de los tres ordenadores disponibles. ¿De cuántas maneras se puede hacer la elección de estos ordenadores?

Ahora se trata de una muestra de tamaño 2, no ordenada, sin repetición. Es no ordenada porque cada ordenador puede estar o no en la muestra, pero el orden en el que lo ponemos es irrelevante. No hay repetición porque la ampliación de memoria la hacemos a dos ordenadores diferentes.

Las posibles elecciones son: *AB*, *AC*, *BC*. Para escribir las configuraciones hay que elegir un orden, naturalmente, pero se entiende que hubiéramos podido escribir *BA* en lugar de *AB* para indicar que la ampliación de memoria la haremos a los ordenadores *A* y *B*.

Definición 1.4. Muestra de tamaño *m*, no ordenada y con repetición (o reemplazo). Consiste en una secuencia de elementos del conjunto *A* en la que podemos repetir los elementos del conjunto *A*, y si tenemos dos muestras con los mismos elementos, pero ordenados de manera diferente, las consideramos la misma.

Ejemplo 1.5

La empresa de los anteriores ejemplos tiene presupuesto para hacer dos ampliaciones de memoria de 4 Gb cada una, aplicables, si se quiere, al mismo ordenador. ¿Cuántas opciones tenemos ahora?

Ahora se trata de una muestra de tamaño 2, no ordenada, con repetición. Es no ordenada porque cada ordenador puede estar o no en la muestra, pero el orden en que lo ponemos es irrelevante. Hay repetición porque las dos ampliaciones de memoria se pueden aplicar al mismo ordenador.

Las posibles elecciones son: *AB*, *AC*, *BC*, *AA*, *BB*, *CC*. Con *AB*, indicamos que ampliamos 4 Gb a *A* y 4 Gb a *B*, con *AA* ampliamos 8 Gb a *A*, etc.

Veamos cuántas muestras podemos formar de cada uno de los tipos anteriores.

1.1 Muestras ordenadas con repetición. Variaciones con repetición

Si nos fijamos en el ejemplo 1.1, podemos pensar que para formar una muestra de este tipo tenemos que llenar $m = 4$ posiciones. En la primera posición, podemos poner cualquiera de los 10 elementos del conjunto *A*, y tenemos 10 posibilidades. Una vez hemos llenado la primera posición, en la segunda posición también podemos poner cualquiera de los 10 elementos del conjunto *A*, y para cada una de estas posibilidades tenemos 10 diferentes de la primera posición. Siguiendo este razonamiento, vemos que podemos formar $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$ muestras. Lo denominamos **variaciones con repetición** de 10 elementos tomados de 4 en 4, $VR_{10,4} = 10^4$.

En general, si partimos de un conjunto $A = \{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ con n elementos, el número de muestras de tamaño m **ordenadas y con repetición** que se pueden formar es:

$$VR_{n,m} = n^m \tag{1}$$

Ejemplo 1.6

¿Cuántas palabras de tamaño 3 se pueden formar con los elementos del conjunto {0,1}?

En un conjunto de 2 elementos, tenemos que encontrar las muestras de tamaño 3 ordenadas y con repetición, $VR_{2,3} = 2^3 = 8$.

000 001 010 100 011 101 110 111

1.2 Muestras ordenadas sin repetición. Variaciones. Permutaciones de *n* elementos

Volvamos al ejemplo 1.1. A partir del conjunto $A = \{0,1,\dots,9\}$, queremos formar muestras de tamaño 4 que no tengan elementos repetidos. Debemos llenar $m = 4$ posiciones. En la primera posición, podemos poner cualquiera de los 10 elementos del conjunto A, y tenemos 10 posibilidades. Una vez hemos llenado a la primera posición, en la segunda posición solo podemos poner 9 elementos del conjunto A, puesto que no podemos repetir el elemento que hemos puesto en la primera posición. Siguiendo este razonamiento, vemos que podemos formar $10\cdot9\cdot8\cdot7$ muestras. Denominamos esta cantidad **variaciones** de 10 elementos tomados de 4 en 4, $V_{10,4} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5.040$.

En general, si partimos del conjunto $A = \{a_1,a_2,\dots,a_n\}$, el número de muestras de tamaño m ($m \leq n$) **ordenadas y sin repetición** que se pueden formar es

$$V_{n,m} = n(n-1)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!} \tag{2}$$

En el caso particular de que $m = n$, $V_{n,n} = n(n-1)\cdots 1 = n!$, **factorial** de n. Este número nos da las maneras de ordenar n elementos. Para el caso $n = 0$, se adopta el convenio $0! = 1$.

Factorial de un número

El factorial de n se expresa como $n!$ y es igual a $n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$.

Ejemplo 1.7

Disponemos de 4 periféricos diferentes (un ratón, *a*; un disco duro, *b*; un escáner, *c*; y una cámara web, *d*) y un ordenador que tiene 3 puertos USB diferentes (P_1,P_2,P_3). ¿Cuántas posibilidades tenemos de establecer las conexiones?

Sea el conjunto de los 4 periféricos, $A = \{a,b,c,d\}$. Una muestra la podemos pensar como *acb*, en la cual la posición de la letra indica un puerto determinado. Por ejemplo, si consideramos la muestra *acb* queremos indicar que el ratón, *a*, está en el puerto P_1, el escáner, *c*, en el puerto P_2 y el disco duro, *b*, en el puerto P_3. Si pensamos en *cab*, es una muestra diferente de la anterior, puesto que ahora es el escáner, *c*, el que está en el puerto P_1. Tenemos que contar el número de muestras de tamaño 3, ordenadas y sin repetición, que se pueden formar en un conjunto de 4 elementos. De este modo, $V_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

Estas son todas las muestras:

abc	acb	bac	bca	cab	cba
abd	adb	bad	bda	dab	dba
acd	adc	cad	cda	dac	dca
bcd	bdc	cbd	cdb	dbc	dcb

1.3 Muestras no ordenadas sin repetición. Combinaciones

Nos fijamos en el ejemplo 1.7 y lo modificamos ligeramente.

Ejemplo 1.8

Tenemos que conectar periféricos a 3 puertos iguales (indistinguibles) y disponemos de 4 periféricos distintos. ¿Cuántas posibilidades tenemos?

Si nos fijamos en las muestras que hemos escrito en el ejemplo 1.7, observamos que en este nuevo ejemplo todas las muestras que hay en una fila son la misma, puesto que lo único que importa es el conjunto de tres periféricos que hemos elegido para conectar. Por lo tanto, debemos dividir el número de muestras que tenemos en una fila por 3!. Tenemos, pues, $\frac{V_{4,3}}{3!} = \frac{24}{6} = 4$.

$$abc \quad abd \quad acd \quad bcd$$

Denominamos **combinaciones** de 4 elementos tomados de 3 en 3:

$$C_{4,3} = \binom{4}{3} = \frac{V_{4,3}}{3!} = 4.$$

En general, en un conjunto de *n* elementos, el número de muestras de tamaño *m* ($m \leq n$) **no ordenadas y sin repetición** es

$$C_{n,m} = \binom{n}{m} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \qquad (3)$$

Número combinatorio

El número combinatorio $C_{n,m} = \binom{n}{m}$ se lee *n sobre m* y lo utilizaremos para calcular el número de combinaciones de *n* elementos tomados de *m* en *m*.
También se denominan *números binomiales* por su presencia en el binomio de Newton.

Tal y como hemos comentado, el número combinatorio $\binom{n}{m}$ nos da el número de subconjuntos de *m* elementos que podemos formar de un conjunto que tiene *n*.

Propiedades de los números combinatorios

Las siguientes propiedades se pueden demostrar a partir de la definición de $\binom{n}{m}$, teniendo en cuenta las propiedades del factorial: $0! = 1$ y $n! = n(n-1)!$. Aquí damos demostraciones alternativas, basadas en razonamientos combinatorios.

1)

$$\binom{n}{0} = 1 \tag{4}$$

Para probarlo, pensemos que el número de subconjuntos de 0 elementos que tiene un conjunto de elementos n es 1, el conjunto vacío. Imaginad que tenemos una bolsa con un conjunto de bolas. Solo tenemos una manera de tomar cero elementos, y es no tomando ninguno.

2)

$$\binom{n}{1} = n \tag{5}$$

Esta igualdad es evidente, puesto que el número de subconjuntos de 1 elemento que tiene un conjunto de n elementos es n. Si, por ejemplo, disponemos de una bolsa en la que tenemos 10 bolas, el número de maneras de sacar una bola es 10.

3)

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m} \tag{6}$$

Para hacer la prueba, llevamos a cabo el razonamiento siguiente: podemos formar el mismo número de subconjuntos de m elementos que de $n-m$ elementos, puesto que cada vez que contamos un subconjunto de m elementos también estamos contando un subconjunto de $n-m$ elementos, $n = m+(n-m)$. Observad también la fórmula que hemos utilizado para calcular el número de muestras de tamaño m que podemos obtener de un conjunto de n elementos. En el denominador tenemos la expresión $m!(n-m)!$, que también podemos expresar como $(n-m)!m!$

4)

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1} \tag{7}$$

Para hacer la prueba, pensemos en un conjunto A que tiene n elementos. Si nos fijamos en un elemento en concreto, x, podemos escribir el conjunto A como una unión $A = (A-\{x\}) \cup \{x\}$. El número de subconjuntos de m elementos que podemos formar en A será la suma de los subconjuntos que no tienen x más los que sí tienen x.

- El número de subconjuntos con m elementos en los que no hay x es $\binom{n-1}{m}$, puesto que tomamos los elementos m del conjunto $A - \{x\}$, que tiene $n - 1$ elementos.

- Los subconjuntos de m elementos que tienen x los formamos añadiendo al elemento x $m-1$ elementos del conjunto $A-\{x\}$, que tiene $n-1$ elementos, esto es, $\binom{n-1}{m-1}$.

Es decir, es como si sacamos una de las bolas de la bolsa, contamos cuántas combinaciones posibles podemos formar con las bolas restantes y después contamos las combinaciones posibles del resto de las bolas con la que hemos sacado*.

*** Observad que el término es $m - 1$, porque una de las bolas ya la hemos sacado previamente.**

1.4 Muestras no ordenadas con repetición

Ejemplo 1.9

Tenemos 4 bolas iguales y las queremos poner en 3 cajas diferentes. ¿Cuántas posibilidades tenemos?

Si nombramos las cajas como A, B y C, pensamos la muestra *AAAA* como el caso en el que las 4 bolas se encuentran dentro de la caja A, la muestra *AABB*, como el caso en el que hay dos bolas en la caja A y las otras dos en la caja B. La muestra *AABB* es la misma que *BABA*, puesto que las bolas son iguales (indistinguibles), y por lo tanto solo la tenemos que contar una vez. Vemos que desde este punto de vista (primer modelo), tenemos muestras de tamaño 4 (bolas indistinguibles) con repetición y no ordenadas. Ahora bien, para calcular la cantidad de muestras de este tipo, es mejor pensar cada una de estas muestras desde otro punto de vista (segundo modelo). Pensemos que tenemos que llenar 6 espacios con 4 símbolos del tipo • y 2 símbolos del tipo |. La razón de que sea así la veremos a continuación: nos imaginamos las tres cajas siguiendo este orden, $A|B|C$, y ahora, para simplificar, solo hace falta que nos imaginemos las separaciones entre las cajas. Cada símbolo | representa una separación entre dos cajas consecutivas y, por lo tanto, solo necesitamos 2 separaciones. De las 6 posiciones que tenemos, elegimos dos para poner las separaciones y en las otras posiciones ponemos los símbolos •. Lo que acabamos de explicar lo podemos ver en algunas muestras:

primer modelo	segundo modelo: llenamos 6 espacios						posiciones de las separaciones
	1	2	3	4	5	6	
AAAA	•	•	•	•	|	|	{5,6}
AAAB	•	•	•	|	•	|	{4,6}
AABC	•	•	|	•	|	•	{3,5}
CCCC	|	|	•	•	•	•	{1,2}

Cada muestra queda caracterizada por la posición de las dos separaciones entre las 6 que podemos elegir. Observemos que el número de posiciones para elegir es la suma (bolas + separaciones) = 4 + (3 – 1) = 6. Fijaos que (3 – 1) es la forma de calcular el número de separaciones dadas 3 cajas (en general, dadas r cajas el número de espacios o separaciones sería $r-1$). Dar dos posiciones es lo mismo que dar un subconjunto de elementos 2 dentro de un conjunto de elementos 6. Por lo tanto, lo que estamos contando es el número de subconjuntos de 2 elementos que podemos formar en un conjunto de 6 elementos, $\binom{3-1+4}{2} = \binom{6}{2} = \binom{6}{4} = 15$. El hecho de que $\binom{6}{2} = \binom{6}{4}$ refleja que es lo mismo empezar eligiendo la posición de las separaciones que la posición de las bolas.

AAAA	BBBB	CCCC	AAAB	AAAC	BBBA
BBBC	CCCA	CCCB	AABB	AACC	BBCC
AABC	BBAC	CCAB			

En general, en un conjunto de n elementos, el número de muestras de tamaño m, **no ordenadas y con repetición**, es:

$$CR_{n,m} = C_{n-1+m,m} = \binom{n-1+m}{m} = \binom{n-1+m}{n-1} \qquad (8)$$

Las denominamos **combinaciones con repetición** de n elementos tomados de m en m.

1.5 Otros ejemplos

Caminos en un retículo

Se quieren conectar (cablear) los puntos A y B, de forma que el camino siga la cuadrícula que marca el dibujo. Solo está permitido ir a la derecha (1) y arriba (0). En el gráfico tenéis representado uno de los caminos posibles, que estaría descrito por la secuencia 110000011110.

Figura 1. Cuadrícula con los caminos posibles entre A y B

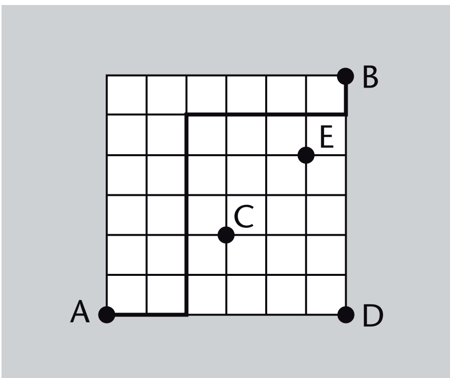


Figura 1

Queremos conectar los puntos A y B. ¿De cuántas maneras lo podemos hacer?

1) Calculad el número de caminos posibles entre A y B.

Queremos conocer el número de muestras del tipo 110000011110, en el que debemos mantener el número de ceros. Cada 0 ocupa una posición que es determinada por un número del conjunto $A = \{1,2,\ldots,12\}$; así pues, a la muestra 110000011110 le hacemos corresponder el subconjunto de 6 elementos {3,4,5,6,7,12}. El número de subconjuntos de 6 elementos que podemos formar con los elementos de A es $\binom{12}{6} = 924$.

2) Calculad el número de caminos posibles entre A y B que pasan por C.

De A a C hay $\binom{5}{2}$ posibilidades, y de C a B $\binom{7}{4}$ posibilidades. En total, habrá $\binom{5}{2}\binom{7}{4} = 350$.

3) Calculad el número de caminos posibles entre A y B que pasan por C y por E.

$$\binom{5}{2}\binom{4}{2}\binom{3}{2} = 180.$$

Soluciones enteras de una ecuación

Considerad todas las soluciones de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 50$, en la que x_1,x_2,x_3,x_4 toman valores enteros no negativos ($x_i \geq 0$). Para resolver este problema, podemos pensar que se trata de 50 bolas que tenemos que repartir en 4 cajas.

1) ¿Cuántas soluciones hay?

Es un problema similar al del ejemplo 1.9.

$$CR_{4,50} = \binom{50+4-1}{4-1} = 23.426.$$

2) ¿Cuántas soluciones hay en las que una y solo una de las incógnitas sea 0?

Una caja queda vacía (4 posibilidades). Ponemos una bola en cada una de las otras tres cajas, para asegurar que no quedan vacías. Finalmente, repartimos las $50-3$ bolas restantes de manera arbitraria en estas tres cajas.

$$4\binom{(50-3)+3-1}{3-1} = 4.704.$$

3) ¿Cuántas soluciones hay de forma que x_1,x_2,x_3,x_4 tomen valores pares?

Expresamos $x_i = 2y_i$ y obtenemos la ecuación $y_1+y_2+y_3+y_4 = 50/2$. Tal y como hemos hecho en el primer apartado, se obtiene:

$$\binom{\frac{50}{2}+4-1}{4-1} = 3.276.$$

4) ¿Cuántas soluciones hay de forma que x_1,x_2,x_3,x_4 tomen valores impares?

Expresamos $x_i = 2y_i + 1$ y obtenemos la ecuación $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = (50 - 4)/2$. Tal y como hemos hecho en el primer apartado, se obtiene:

$$\binom{\frac{50-4}{2} + 4 - 1}{4 - 1} = 2.600.$$

Fichas en una cuadrícula

Queremos llenar la cuadrícula siguiente con 4 fichas diferentes.

Figura 2. Cuadrícula definida para llenarla con 4 fichas diferentes

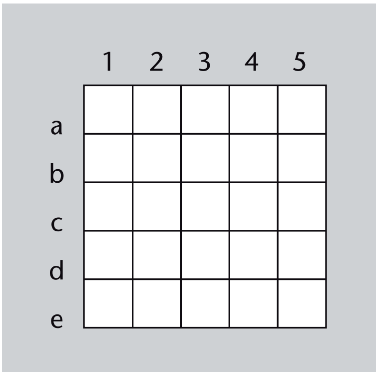


Figura 2

Queremos llenar la cuadrícula de la figura con 4 fichas diferentes. ¿De cuántas maneras distintas lo podemos hacer?

1) ¿De cuántas maneras lo podemos hacer si podemos poner todas las fichas que queramos dentro de un mismo cuadro? $VR_{25,4} = 25^4 = 390.625$.

2) ¿De cuántas maneras, si cada cuadro solo puede tener como máximo una ficha? $V_{25,4} = 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 303.600$

3) ¿De cuántas maneras, si cada cuadro solo puede tener como máximo una ficha y queremos dejar una sola fila vacía? $5 \cdot 20 \cdot 15 \cdot 10 \cdot 5 = 75.000$. (5 por la posible fila vacía. 20 por la primera ficha, 15 por la segunda ficha, etc.)

2. Espacio de probabilidad

En muchas situaciones tenemos interés en experimentos, procesos, etc. cuyo resultado no puede ser predicho con certeza. Los juegos de azar nos dan ejemplos de este tipo. No sabemos qué resultado sacará el dado o qué cartas han llegado a un jugador. En un contexto tecnológico, encontramos también muchos ejemplos de este tipo. No sabemos cuántos usuarios accederán a un servidor o ignoramos el tiempo que durará un dispositivo antes de fallar. En campos como el dimensionado de redes de comunicación o el control de calidad, dependemos de factores sometidos a variaciones que no podemos controlar ni predecir exactamente.

La teoría de la probabilidad nos da modelos en los que podemos cuantificar la incertidumbre y actuar a partir de unos niveles de confianza que sabemos calcular. Por ejemplo, en el ámbito industrial podemos determinar unos modos de producción que nos aseguren que la probabilidad de estar fuera de los márgenes aceptables sea bastante pequeña. En el terreno de las telecomunicaciones, podemos analizar la frecuencia de aparición de errores en la transmisión de datos y diseñar procedimientos que reduzcan estas probabilidades de error.

El formalismo de la teoría de la probabilidad conecta con la realidad a través de la idea de experimento aleatorio. Cierto experimento produce un resultado que no sabemos predecir. Cuando repetimos el experimento (en iguales condiciones, por lo tanto), se observa que el resultado va variando. Además del resultado del experimento (por ejemplo, los dos valores obtenidos al tirar dos dados), nos fijamos en si cierto hecho se ha producido o no (por ejemplo, ¿es la suma de los dos dados anteriores igual a 5?). Estos acontecimientos o sucesos son los elementos centrales en la teoría de la probabilidad.

Adoptamos el criterio de que una experiencia aleatoria se tiene que poder repetir un número indefinido de veces (un número grande, en la práctica) y aceptamos el hecho, verificado empíricamente, de que si bien no podemos predecir en qué o en cuántas ocasiones pasará nuestro acontecimiento A en una serie N de repeticiones del experimento, si N_A es el número de veces que A ha pasado, el número N_A/N (frecuencia) se estabiliza hacia un valor constante cuando N es muy grande. Este valor es lo que denominamos la probabilidad de A: $P(A)$. Por ejemplo, si lanzamos los dos dados 1.000 veces y resulta que la suma de los dos vale 5 en 119 ocasiones, la frecuencia ha sido 119/1.000 = 0,119. La teoría de la probabilidad nos permitirá razonar cuál debería ser la probabilidad P de que la suma de los dos dados valga 5 y la frecuencia observada, 0,119, no tendría que ser muy diferente de este número. Si obtuviésemos esta frecuencia con un número más alto de tiradas (100.000, por ejemplo), el valor se acercaría más aún a la probabilidad P.

Supondremos que conocemos todos los resultados posibles, y que las condiciones de la experiencia aleatoria son estables. A lo largo de la historia, se han propuesto varias definiciones matemáticas de probabilidad (motivadas principalmente por los juegos de azar). Sin embargo, hasta principios del siglo XX no se introduce el modelo probabilístico de manera axiomática, y así se formalizan todas las ideas anteriores.

En este apartado, veremos los conceptos básicos de la teoría de las probabilidades y también algunos teoremas importantes.

2.1 Experiencia aleatoria y sucesos. Operaciones básicas y propiedades

Definición 2.1. Supongamos que al repetir una determinada experiencia en iguales condiciones, podemos obtener un conjunto de resultados diferentes. Decimos que la **experiencia** es **aleatoria** si es imposible predecir su resultado.

Experimentos y resultados

Podemos definir un experimento como una acción o conjunto de acciones que hacemos para obtener un resultado. Un resultado es la realización de uno de los valores posibles que nos podría dar el experimento.

Por ejemplo, las siguientes son experiencias aleatorias:

- Observación del tiempo que tarda un aparato nuevo en estropearse.
- Observación del tiempo de vida de un paquete en una red.
- Observación del número de peticiones que llegan a un servidor no sobrecargado.
- Observación del número de saltos de un mensaje en una red de telecomunicaciones.

Ejemplo 2.1

Al lanzar un dado, podemos obtener un resultado cualquiera entre $\{1,2,3,4,5,6\}$, pero no podemos predecir cuál. Se trata de una experiencia aleatoria. El conjunto formado por todos los resultados posibles, $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, se denomina *espacio muestral*.

Definición 2.2. Denominamos **espacio muestral**, Ω, al conjunto de resultados posibles de una experiencia aleatoria.

Definición 2.3. Dado un espacio muestral, Ω, denominamos **suceso** o **acontecimiento**, A, a cualquier subconjunto del espacio muestral, $A \subset \Omega$. Un suceso se denomina **elemental** cuando tiene un único elemento.

≪Pasa *A*≫

Si A es un suceso, decimos que ≪pasa A≫ cuando el resultado del experimento es un elemento del subconjunto A.

Un suceso se expresa habitualmente a través de una proposición que será cierta o no según cuál sea el resultado del experimento (proposición lógica). Entonces, el suceso viene dado por el subconjunto formado por los resultados que hacen que la proposición sea cierta.

Ejemplo 2.2

Continuemos con el ejemplo del dado, el ejemplo 2.1. Definiremos algunos sucesos dando una proposición que los describe y el subconjunto correspondiente:

Suceso A: A = {sale un número par} = {2,4,6}.

Suceso B: B = {sale un número mayor que 3} = {4,5,6}.

En este ejemplo, tenemos 6 sucesos elementales o sucesos que tienen un solo elemento: {1}, {2}, {3}, {4}, {5} y {6}.

Ejemplo 2.3

Recibimos un mensaje binario (formado con elementos de {0,1}), de longitud 3 (o de tamaño 3).

- El espacio muestral Ω es el conjunto de todos los resultados posibles, es decir, todos los mensajes posibles de 3 bits que podemos recibir. $\Omega = \{000,001,010,100,011,101,110,111\}$. Dado que tiene 8 elementos, decimos que el **cardinal** de Ω es 8 y escribimos $|\Omega| = 8$.

- Ahora definimos algunos sucesos: $A = \{000,001,010\}$, B = {mensajes con uno solo 0}, $C = \{011,101\}$, $D = \{010,100,011,111\}$.

Notación

Observad la notación. $\{000,001,010\} = \{010,000,001\}$. No importa el orden en el que escribamos los elementos de un conjunto.

Si os fijáis, los diferentes sucesos que definimos son subconjuntos del conjunto de todos los resultados posibles (o espacio muestral) Ω. Ahora veremos algunos conceptos básicos de la teoría de conjuntos que nos ayudarán a la hora de trabajar con los sucesos y asignarles probabilidades.

Conjuntos $\varnothing$ y Ω

Observad que los conjuntos $\varnothing$ y Ω son complementarios. En general, A y A^c son disjuntos.

Definición 2.4. Definimos los siguientes conceptos (A, B, ..., son subconjuntos del espacio muestral Ω, es decir, $A,B,\ldots \subset \Omega$):

- A^c **(conjunto complementario de** A) es el conjunto que tiene por elementos todos los elementos de Ω que no son de A. Es decir, A^c = ≪no pasa A≫.

- $A \cup B$ (A **unión** B) es el conjunto que tiene todos los elementos de A y también los de B.

- $A \cap B$ (A **intersección** B) es el conjunto que tiene todos los elementos de A que a la vez también son de B.

- $\varnothing$ es el **conjunto vacío** y Ω es el **conjunto total**.

- Decimos que dos conjuntos A y B son **disjuntos** cuando no tienen ningún elemento en común, es decir, $A \cap B = \varnothing$.

- Decimos que los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forman una **partición de** Ω cuando los conjuntos son disjuntos de dos en dos, y la unión de todos es el conjunto total. Es decir,

$$A_i \cap A_j = \varnothing \quad \text{para} \quad i \neq j \quad \text{y} \quad \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega.$$

Partición de un conjunto

Imaginad que el conjunto Ω es un pastel que tenemos que repartir entre diferentes personas. Esto sería un ejemplo de partición, ya que los pedazos en los que dividimos el pastel son disjuntos (no se superponen) y la suma de todos los trozos es el pastel entero (el espacio muestral Ω).

Ejemplo 2.4

En este ejemplo representamos una partición, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, de un conjunto $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, con $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2,3\}$, $A_3 = \{4,5,6\}$, $A_4 = \{7,8\}$ y $A_5 = \{9,10\}$. La unión de todos es el total, $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 = \Omega$, y la intersección entre dos cualesquiera es vacía. Veamos dos representaciones de esto.

Figura 3. Los conjuntos A_1, A_2, A_3, A_4 y A_5 forman una partición del conjunto total Ω

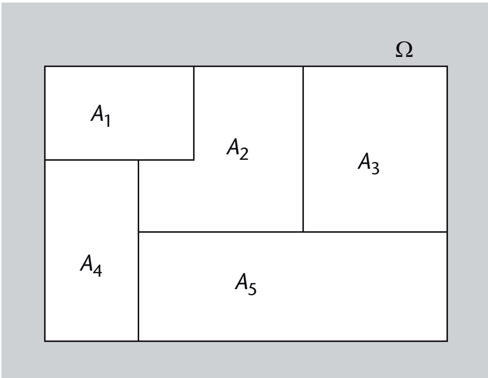


Figura 3

Ejemplo de partición de un conjunto total, Ω.

Figura 4. Distribución de los elementos del conjunto Ω en diferentes subconjuntos o sucesos y que forman una partición

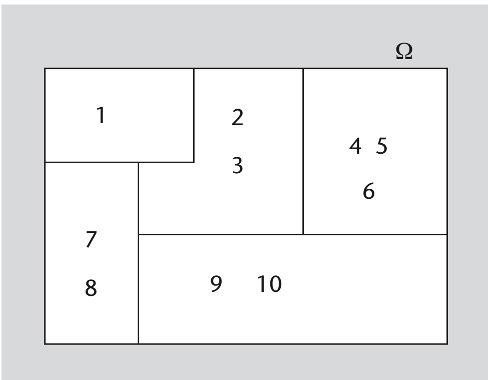


Figura 4

Distribución de los elementos del conjunto Ω en diferentes subconjuntos o sucesos y que forman una partición.

Veamos las definiciones anteriores en términos probabilísticos. Para ilustrar cada definición, supondremos que en el experimento de tirar un dado al aire, el suceso A consiste en obtener un número par y el suceso B, en obtener un número menor o igual que 3:

- El **suceso contrario** de A es el conjunto complementario A^c, y se lleva a cabo cuando no lo hace A. En nuestro ejemplo del dado, A^c se da cuando obtenemos un resultado impar. Corresponde a la negación lógica.

- El suceso $A \cup B$ se produce si pasa A, pasa B o pasa A y B al mismo tiempo. En el ejemplo del dado, esto ocurre si obtenemos un número par o bien un número menor o igual que 3. Es decir, $A \cup B = \{1,2,3,4,6\}$. Observad que cuando obtenemos un 2, se dan los dos sucesos, A y B, a la vez. Corresponde a la ≪o≫ lógica.

- El suceso $A \cap B$ se produce si pasa A y B al mismo tiempo. En nuestro ejemplo, $A \cap B = \{2\}$. Corresponde a la ≪y≫ lógica.

- $\varnothing$ es el **suceso imposible** y Ω es el **suceso seguro**. Si tiramos un dado, obtenemos un resultado entre 1 y 6 y es imposible obtener un número fuera de este rango. $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. Es seguro que obtendremos alguno de estos valores.

- Decimos que A y B son dos **succesos incompatibles** cuando no pueden pasar al mismo tiempo porque no tienen ningún elemento en común. Es decir, $A \cap B = \varnothing$. Si definimos $C = \{1\}$, A y C son disjuntos porque si lanzamos un dado, no se pueden dar los dos sucesos a la vez.

- Decimos que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forman un **sistema completo de sucesos** si forman una partición. Por ejemplo, si definimos un tercer suceso $D = \{3,5\}$: $A = \{\text{par}\}$, $C = \{1\}$ y $D = \{3,5\}$ forman un sistema completo de sucesos.

Los conceptos anteriores los hemos resumido en la tabla siguiente.

En términos de probabilidad	**En términos de conjuntos**	**Notación**
Suceso seguro	Conjunto total	Ω
Suceso imposible	Conjunto vacío	$\varnothing$
Suceso contrario	Conjunto complementario	A^c, también $\overline{A}$
A y B	Intersección	$A \cap B$
A o B	Unión	$A \cup B$
Sucesos incompatibles	Conjuntos disjuntos	$A \cap B = \varnothing$
Sistema completo de sucesos	Partición de Ω	$A_i \cap A_j = \varnothing$ $\bigcup_i A_i = \Omega$

Ejemplo 2.5

Considerando el espacio muestral (mensajes binarios recibidos de tamaño 3) y los sucesos del ejemplo 2.3, podemos escribir:

Complementario de A:	$A^c = \{011,100,101,110,111\}$.
A unión B:	$A \cup B = \{000,001,010,011,101,110\}$.
A unión C:	$A \cup C = \{000,001,010,011,101\}$.
A intersección C,	$A \cap C = \varnothing$.

2.2 Definición axiomática de probabilidad. Espacio finito equiprobable

El resultado de una experiencia aleatoria no se puede prever con certidumbre. La teoría de la probabilidad da un *peso* a cada acontecimiento, es decir, un número que evalúa la certeza que tenemos de que un resultado se dé.

Definición 2.5. Consideramos una experiencia aleatoria con espacio muestral Ω. Una **probabilidad** sobre Ω es una aplicación que a cada subconjunto $A \subset \Omega$ le asigna un número real, $P(A)$, que verifica:

1) La probabilidad es un número que siempre está entre 0 y 1:

$$0 \leq P(A) \leq 1. \tag{9}$$

2) La probabilidad del espacio muestral Ω es 1, puesto que este conjunto contiene todos los resultados posibles de nuestro experimento. Tomamos este 1 por convenio y decimos que la probabilidad es normalizada a 1:

$$P(\Omega) = 1. \tag{10}$$

3) Si los conjuntos A y B no tienen ningún elemento en común, la probabilidad de que pase el suceso A o el suceso B es la suma de probabilidades:

$$A \cap B = \varnothing \implies P(A \cup B) = P(A) + P(B). \tag{11}$$

Decimos que tenemos un **espacio de probabilidad** cuando tenemos un conjunto Ω en el que hemos definido una probabilidad.

De los axiomas anteriores, se deducen las siguientes propiedades:

Propiedades de la probabilidad:

1) $P(\varnothing) = 0$. La probabilidad del suceso imposible es 0. Cuando hacemos un experimento aleatorio, obtenemos algún resultado que pertenece al espacio muestral Ω, y por lo tanto no se puede dar el acontecimiento $\varnothing$.

2) Dado un suceso cualquiera A, se verifica

$$P(A^c) = 1 - P(A). \tag{12}$$

3) Dados dos sucesos A y B, la probabilidad del suceso A unión B la podemos expresar como:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \tag{13}$$

Observad la figura 5. Si queremos encontrar la probabilidad del conjunto $P(A \cup B)$, tenemos que considerar la probabilidad de A, la probabilidad de B y restar una vez la probabilidad de $P(A \cap B)$, puesto que si no, la estaríamos contando dos veces.

A continuación, demostramos las tres propiedades.

Empezamos por la segunda. $A \cap A^c = \varnothing$. Por el axioma 3 de la probabilidad $P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$. Así:

$$P(A) + P(A^c) = P(A \cup A^c) = P(\Omega) = 1.$$

Para obtener la primera, consideramos que $\varnothing = \Omega^c$ y aplicamos (12):

$$P(\varnothing) = P(\Omega^c) = 1 - P(\Omega) = 0.$$

Hacemos ahora la prueba de la tercera propiedad. Ponemos el conjunto A como unión de dos conjuntos disjuntos,

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c). \tag{14}$$

Es decir, el conjunto A lo podemos reescribir como la unión de dos conjuntos: el conjunto $(A \cap B)$ (en la figura 5 corresponde a la parte en gris oscuro) y el conjunto $(A \cap B^c)$, que es todo el conjunto A menos la parte que tiene en común con B (en la figura 5 corresponde a la parte en gris claro).

Figura 5. Representación de $A \cap B^c$ y $A \cap B$

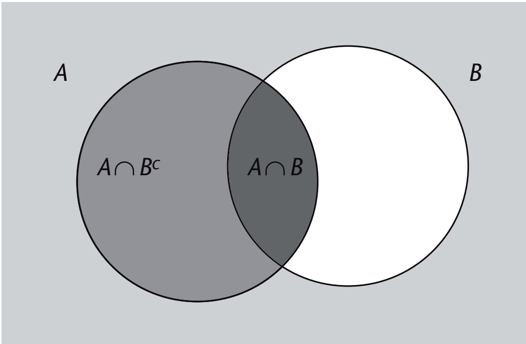


Figura 5

Representación gráfica del conjunto $A \cup B$ (A unión B). Calcularemos cuál es la probabilidad de este suceso.

Dado que tenemos una unión de dos conjuntos disjuntos (lo podemos ver en la figura), la probabilidad es suma de probabilidades:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c). \tag{15}$$

De manera parecida, escribimos $A \cup B$ como unión de dos conjuntos disjuntos:

$$A \cup B = (A \cap B^c) \cup B.$$

Entonces,

$$P(A \cup B) = P(A \cap B^c) + P(B). \tag{16}$$

De las ecuaciones (15) y (16) obtenemos $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Definición 2.6. Un **espacio finito equiprobable** es aquel donde el espacio muestral es un conjunto finito $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, en el que cada uno de los sucesos elementales tiene la misma probabilidad. Así,

$$P(\{a_1\}) = P(\{a_2\}) = \cdots = P(\{a_n\}) = p,$$

y dado que se tiene que verificar que

$$P(\{a_1\}) + P(\{a_2\}) + \cdots + P(\{a_n\}) = np = 1,$$

se tiene que la probabilidad de cada suceso elemental es $P(\{a_i\}) = \dfrac{1}{n}$.

Volvamos a la experiencia de lanzar un dado al aire. El espacio muestral Ω está formado por $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. Por simetría del dado, cada uno de los resultados tiene la misma probabilidad de salir, y esta probabilidad es $p = \frac{1}{n}$, en la que n es el número de elementos del espacio muestral. En este caso, $p = \frac{1}{6}$.

Ahora ya sabemos cómo podemos calcular la probabilidad de un suceso elemental en un espacio equiprobable. Vayamos un paso más allá. Ahora calcularemos la probabilidad de un suceso cualquiera A del espacio equiprobable Ω. Si A tiene k elementos $x_1,x_2,\ldots,x_k$ decimos que su cardinal vale k y escribimos $|A| = k$. Entonces podemos escribir A como unión de acontecimientos elementales, que son disjuntos entre sí: $A = \cup_{i=1}^{k}\{x_i\}$. Aplicando (11): $P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(\{x_i\}) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n} = \frac{k}{n}$. Notamos que $|\Omega| = n$. Así hemos llegado a la *ley de Laplace*.

Ley de Laplace

En un espacio equiprobable, la probabilidad de un suceso A es el cociente entre el número de elementos de A y el número de elementos del espacio muestral. Se acostumbra a decir

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}}. \tag{17}$$

Ejemplo 2.6

Consideremos la experiencia de tirar una moneda tres veces seguidas (observad que este ejemplo es muy similar al 2.3, en el que recibíamos palabras de tres bits). El espacio muestral con todos los resultados posibles es $\Omega = \{\circ\circ\circ, \circ\circ+, +\circ\circ, \circ+\circ, ++\circ, +\circ+, \circ++, +++\}$.

Si la moneda es perfecta, se trata de un espacio equiprobable, puesto que los sucesos elementales (cara o cruz) tienen la misma probabilidad, en este caso $P(\circ) = P(+) = \frac{1}{2}$.

Sean los sucesos siguientes:

$A = \{\text{han salido exactamente dos caras}\} = \{\circ\circ+, \circ+\circ, +\circ\circ\}$.
$B = \{\text{no ha salido ninguna cara}\} = \{+++\}$.
$C = \{\text{ha salido exactamente una cruz}\} = \{\circ\circ+, \circ+\circ, +\circ\circ\}$.
$D = \{\text{ha salido al menos una cruz}\} = \{\circ\circ+, +\circ\circ, \circ+\circ, ++\circ, +\circ+, \circ++, +++\}$.

Calculemos algunas probabilidades. El hecho de que el espacio sea equiprobable nos permite aplicar la ley de Laplace. En cada caso, hay que contar el número de elementos que tiene el conjunto (casos favorables) y dividir por 8 (casos posibles).

Probabilidad de que salgan dos caras: $P(A) = \frac{3}{8}$.

Probabilidad de que no salga ninguna cara: $P(B) = \frac{1}{8}$.

Probabilidad de que salga una cruz: $P(C) = \frac{3}{8}$.

Probabilidad de que al menos salga una cruz: $P(D) = \frac{7}{8}$.

Probabilidad de que salgan dos caras y a la vez ninguna cara (es imposible): $P(A \cap B) = 0$.

Probabilidad de que salgan dos caras o bien, al menos, una cruz: $P(A \cup D) = P(A) + P(D) - P(A \cap D) = \frac{3}{8} + \frac{7}{8} - \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$.

Probabilidad de que salgan dos caras o ninguna cara: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} - 0 = \frac{4}{8}$.

Probabilidad de que no salga ninguna cara y, al menos, una cruz: $P(B \cap D) = \frac{1}{8}$.

Ejemplo 2.7

De una baraja francesa de 52 cartas (13 números, 4 palos), se sacan tres cartas sin reemplazo. Definimos los siguientes sucesos:

A = ≪Las tres cartas son del mismo palo≫.

B_1 = ≪Las tres cartas tienen el mismo número≫.

B_2 = ≪Dos cartas tienen el mismo número y la otra es diferente≫.

B_3 = ≪Las tres cartas tienen números diferentes≫.

Calculamos sus probabilidades y comprobamos que las probabilidades de B_1, B_2 y B_3 suman 1 (tal y como debe ser, puesto que forman una partición del espacio muestral).

El número de casos posibles es $\binom{52}{3} = 22.100$, puesto que elegimos cartas diferentes y el orden es irrelevante.

En A, los casos favorables tienen un factor 4 por el posible palo común a las cartas y un factor $\binom{13}{3}$ por la elección de los números dentro de los 13 de un palo dado (números diferentes, por lo tanto). Entonces:

$$P(A) = \frac{4 \cdot \binom{13}{3}}{\binom{52}{3}} = \frac{1.144}{22.100} = 0{,}0517.$$

En B_1 hay 13 maneras de elegir el número común y, fijado este número, $\binom{4}{3}$ maneras de elegir los palos:

$$P(B_1) = \frac{13 \cdot \binom{4}{3}}{\binom{52}{3}} = \frac{52}{22.100} = 0{,}00235.$$

En B_2 hay 13 maneras de elegir el número doble. Fijado este, hay 12 maneras de elegir el número simple. Por los palos, hay un factor $\binom{4}{2}$ por los palos de las dos cartas con el mismo número y un factor 4 por el palo de la otra carta:

$$P(B_2) = \frac{13 \cdot 12 \cdot \binom{4}{3} \cdot 4}{\binom{52}{3}} = \frac{3.744}{22.100} = 0{,}1694.$$

En B_3 hay $\binom{13}{3}$ maneras de elegir los tres números. Por los palos, hay un factor 4 para cada número:

$$P(B_3) = \frac{\binom{13}{3}\cdot 4^3}{\binom{52}{3}} = \frac{18.304}{22.100} = 0{,}8282.$$

Sumando las tres fracciones: $P(B_1)+P(B_2)+P(B_3) = \frac{52+3.744+18.304}{22.100} = 1$.

Ejemplo 2.8

Una urna contiene 6 bolas blancas y 12 bolas negras. Se extraen 4 bolas al azar, sin reemplazo. Calculamos las probabilidades de que salgan dos bolas blancas y dos negras:

$$P(\ll\text{Dos blancas y dos negras}\gg) = \frac{\binom{6}{2}\binom{12}{2}}{\binom{18}{4}} = \frac{11}{34} = 0{,}3235.$$

puesto que elegimos bolas diferentes y no importa el orden. Maneras de elegir 4 bolas: $\binom{18}{4}$. Maneras de elegir dos bolas blancas: $\binom{6}{2}$. Maneras de elegir dos bolas negras: $\binom{12}{2}$.

Ahora calculamos la probabilidad de que todas sean del mismo color:

$$P(\ll\text{Todas del mismo color}\gg) = P(\ll\text{Todas blancas}\gg) + P(\ll\text{Todas negras}\gg)$$

$$= \frac{\binom{6}{4}}{\binom{18}{4}} + \frac{\binom{12}{4}}{\binom{18}{4}} = \frac{1}{6} = 0{,}1667.$$

¿Cuál es el error en el siguiente razonamiento?

Los colores resultantes pueden ser *NNNN*, *BNNN*, *BBNN*, *BBBN*, *BBBB*, 5 posibilidades. Por lo tanto: $P(\ll\text{Dos blancas y dos negras}\gg) = 1/5$ y $P(\ll\text{Todas del mismo color}\gg) = 2/5$.

El error está en suponer que estas cinco configuraciones son equiprobables. Claramente, es más probable sacar cuatro negras que sacar cuatro blancas, por ejemplo. Lo que sí es equiprobable es sacar cuatro bolas cualesquiera del total de las 18.

Ejemplo 2.9

El PIN de acceso a una cuenta está formado por cuatro cifras decimales (es decir, PIN = $x_1x_2x_3x_4$ con $0 \leq x_i \leq 9$).

Calculamos la probabilidad de acertarlo en 5.000 intentos con un generador aleatorio de PIN.

Hay $VR_{10,4} = 10^4$ PIN posibles. En un intento, la probabilidad de acertarlo es $p_1 = 1/10^4$. En N = 5.000 intentos:

$$P(\ll\text{Acertar en alguno de los } N \text{ intentos}\gg) = 1 - P(\ll\text{No acertar en ninguno de los } N \text{ intentos}\gg)$$

$$= 1-(1-p_1)^N = 1-0{,}9999^{5.000} = 0{,}3935.$$

ya que no acertar en un intento tiene probabilidad $1-p_1$, no acertar en dos intentos tiene probabilidad $(1-p_1)^2$, etc.

Calculamos la misma probabilidad si los intentos los hacemos con PIN diferentes (con el generador aleatorio, cada PIN se generaba de manera independiente y, por lo tanto, podía haber repeticiones).

$$P(\ll\text{Acertar en alguno de los } N \text{ intentos}\gg)$$

$$= P(\ll\text{El PIN correcto se encuentra en el conjunto de los } N \text{ PIN probados}\gg)$$

$$= \frac{N}{10^4} = 0{,}5.$$

¿Cómo cambian estos números si los PIN deben tener las cuatro cifras diferentes?

Lo que cambia es el número total de PIN posibles. Ahora es $V_{10,4} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5.040$. Así, $p_1 = 1/5.040$.

La probabilidad con 5.000 intentos independientes es ahora 0,6292. Con intentos diferentes, se obtiene 0,9921.

2.3 Probabilidad condicionada. Sucesos independientes

Hablamos de **probabilidad condicionada** cuando ya se ha hecho la experiencia y nos dan una pista sobre el resultado obtenido. Veamos un ejemplo de ello.

Ejemplo 2.10

Consideremos el mismo espacio de probabilidad que en el ejemplo 2.6. Se lleva a cabo la experiencia y nos dan la pista de que al menos ha salido una cruz. Es decir, sabemos que se ha producido el acontecimiento D, ha salido alguna cruz. ¿Cuál es la probabilidad de que hayan salido dos caras (suceso A)?

Está claro que ahora el espacio total ha quedado reducido al conjunto

$$\{\circ\circ+,\ +\circ\circ,\ \circ+\circ,\ ++\circ,\ +\circ+,\ \circ++,\ +++\}$$

. Por lo tanto, ahora, la probabilidad de que hayan salido dos caras es $\frac{3}{7}$.

Lo escribimos como $P(A|D) = \frac{3}{7}$ y la denominamos probabilidad de A condicionada a D. O lo que es lo mismo, probabilidad de que pase A una vez que hemos hecho el experimento y sabemos que ha pasado D en aquel mismo experimento.

A continuación, damos su definición.

Espacio muestral de la probabilidad condicionada

Observad que en el caso de las probabilidades condicionadas, reducimos el espacio muestral al espacio del suceso que sabemos que ha sucedido. Ahora, el número de casos posibles ya no es todo el espacio muestral Ω, sino el conjunto de elementos del suceso B.

Definición 2.7. Dados dos conjuntos $A,B \subset \Omega$, con $P(B) \neq 0$, definimos la **probabilidad del conjunto** A **condicionada a** B como:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \qquad (18)$$

Se trata de encontrar la probabilidad de A, sabiendo que se ha producido B.

Ejemplo 2.11

Consideramos el mismo espacio de probabilidad que en el ejemplo 2.6, en el que lanzábamos tres veces una moneda al aire, y calculamos algunas probabilidades condicionadas:

- Sabiendo que ha salido al menos una cruz, probabilidad de que hayan salido dos caras. Es decir, $P(A \mid D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{7}{8}} = \frac{3}{7}$. Ya lo habíamos encontrado en el ejemplo anterior.

- Sabiendo que ha salido al menos una cruz, probabilidad de que haya salido exactamente una cruz. Es decir, $P(C \mid D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{3/8}{7/8} = \frac{3}{7}$.

- Sabiendo que ha salido al menos una cruz, probabilidad de que no haya salido ninguna cara. Es decir, $P(B \mid D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{1/8}{7/8} = \frac{1}{7}$.

- Sabiendo que ha salido una cruz, probabilidad de que hayan salido dos caras. De hecho, los sucesos A y C son el mismo. Por lo tanto, $P(A \mid C) = 1$.

- Sabiendo que no ha salido ninguna cara, probabilidad de que hayan salido dos caras. Es decir, $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0$.

En algunas ocasiones, lo que conocemos es la probabilidad de un acontecimiento condicionado a otro y la probabilidad de este otro. Entonces, a partir de (18), se obtiene la probabilidad de que pasen los dos:

$$P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B). \tag{19}$$

Ejemplo 2.12

En la red eléctrica de un edificio, hay dos módulos (M_1 y M_2) de protección de sobrecargas que a veces se activan sin motivo (fallan). Sabemos que, en un día cualquiera, la probabilidad de que M_1 falle vale 0,08, mientras que la probabilidad de que M_2 falle vale 0,1. También se sabe que el 72 % de las veces que M_1 falla, M_2 también lo hace.

Calculamos las probabilidades:

1) Que fallen los dos módulos.
2) Si ha fallado M_2, que también haya fallado M_1.
3) Que falle algún módulo.
4) Que falle un único módulo.
5) Si alguno ha fallado, que sea uno solo.

Sea $F_i = \{\text{Falla } M_i\}$, $i = 1{,}2$. Sabemos que $P(F_1) = 0{,}08$, $P(F_2) = 0{,}1$, $P(F_2 \mid F_1) = 0{,}72$.

1) $P(F_1 \cap F_2) = P(F_2 \mid F_1)P(F_1) = 0{,}72 \cdot 0{,}08 = 0{,}0576$.

2) $P(F_1 \mid F_2) = \frac{P(F_1 \cap F_2)}{P(F_2)} = \frac{0{,}0576}{0{,}1} = 0{,}576$.

3) $P(F_1 \cup F_2) = P(F_1) + P(F_2) - P(F_1 \cap F_2) = 0{,}08 + 0{,}1 - 0{,}0575 = 0{,}1224$.

4) $P(\text{Falla un solo módulo}) = P(F_1 \cup F_2) - P(F_1 \cap F_2) = 0{,}0648$.

5) $P(\text{Falla uno} \mid \text{Falla alguno}) = \frac{P(\text{Falla uno} \cap \text{Falla alguno})}{P(\text{Falla alguno})} = \frac{P(\text{Falla uno})}{P(\text{Falla alguno})} = \frac{0{,}0648}{0{,}1224} = 0{,}5924$.

Definición 2.8. Sea $A,B \subset \Omega$, sucesos con probabilidades no nulas. El suceso A es **independiente** del suceso B, cuando la probabilidad de A no se modifica al conocer alguna información de la realización de B. Es decir,

$$P(A \mid B) = P(A). \tag{20}$$

Queremos ver que si A es independiente del suceso B, entonces el suceso B también es independiente de A. De las ecuaciones (20) y (18):

$$P(A) = P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Entonces, pasamos $P(B)$ multiplicando a la izquierda y obtenemos:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Ahora calculamos, teniendo en cuenta que $A \cap B = B \cap A$:

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B).$$

Así, expresamos el criterio de independencia:

Si A y B son independientes, se verifica:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B). \tag{21}$$

Veamos un ejemplo numérico.

Ejemplo 2.13

Sean A y B dos sucesos de Ω, y sabemos que $P(A \cup B) = 0{,}52$, $P(A \cap B) = 0{,}08$ y $P(A) = 0{,}4$. Veremos que A y B son independientes.

Para ello, vemos si se verifica la igualdad $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Aplicando la propiedad $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, tenemos

$$0{,}52 = 0{,}4 + P(B) - 0{,}08 \implies P(B) = 0{,}2.$$

$$P(A)P(B) = 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}08 = P(A \cap B).$$

2.4 Teorema de la probabilidad total. Teorema de Bayes

Ejemplo 2.14

Un aparato electrónico tiene que trabajar dentro del rango de temperaturas [10 °C,40 °C]. Se ha observado que cuando la temperatura se haya en el intervalo T_1 = [10 °C,20 °C] tiene un comportamiento óptimo el 75% de las veces; cuando trabaja a temperaturas del intervalo T_2 = (20 °C,30 °C], un 55% de las veces; y cuando trabaja a temperaturas dentro del rango T_3 = (30 °C,40 °C], un 45% de las veces. También conocemos la frecuencia de cada uno de estos rangos de temperatura. El 25% de las veces, la temperatura está dentro de T_1, el 60% dentro de T_2, y el 15%, dentro de T_3. Nos preguntamos cuál es la probabilidad de que, en un momento dado a una temperatura cualquiera dentro del rango [10 °C,40 °C], el aparato tenga un comportamiento óptimo.

T_1, T_2 y forman T_3 una partición del conjunto de temperaturas posible [10 °C,40 °C] porque $T_1 \cup T_2 \cup T_3$ = [10 °C,40 °C] y $T_1 \cap T_2 = \varnothing$, $T_1 \cap T_3 = \varnothing$ y $T_2 \cap T_3 = \varnothing$. Si denominamos el suceso O = {Funcionamiento óptimo}, podemos escribir

$$O = (O \cap T_1) \cup (O \cap T_2) \cup (O \cap T_3)$$

y dado que estos conjuntos son disjuntos,

$$P(O) = P(O \cap T_1) + P(O \cap T_2) + P(O \cap T_3).$$

Sin embargo, no conocemos el valor numérico de las probabilidades de estas intersecciones. A partir del enunciado, sabemos que $P(O \mid T_1) = 0{,}75$, $P(O \mid T_2) = 0{,}55$, y $P(O \mid T_3) = 0{,}45$. También conocemos $P(T_1) = 0{,}25$, $P(T_2) = 0{,}60$ y $P(T_3) = 0{,}15$. Podemos deducir el valor de estas probabilidades:

$P(O \cap T_1) = P(O \mid T_1)P(T_1) = 0{,}1875.$

$P(O \cap T_2) = P(O \mid T_2)P(T_2) = 0{,}33.$

$P(O \cap T_3) = P(O \mid T_3)P(T_3) = 0{,}0675.$

Así, $P(O) = 0{,}1875 + 0{,}33 + 0{,}0675 = 0{,}585$.

Intervalos abiertos y cerrados

Los símbolos *[* y *]* se utilizan para definir un intervalo cerrado (el intervalo incluye los valores de los extremos). Los símbolos *(* y *)* se utilizan para definir intervalos abiertos (el intervalo no incluye los valores de los extremos). Por ejemplo, T_1 = [10 °C,20 °C] incluye los extremos. T_2 = (20 °C,30 °C] es una temperatura a partir de 20 ° C.

En este ejemplo, hemos aplicado el *teorema de la probabilidad total*, que enunciamos a continuación.

Teorema de la probabilidad total

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ es un sistema completo de sucesos de Ω y $B \subset \Omega$,

$$P(B) = P(B \mid A_1)P(A_1) + P(B \mid A_2)P(A_2) + \cdots + P(B \mid A_n)P(A_n). \qquad (22)$$

Para demostrar (22), escribimos el suceso B como unión de partes disjuntas de dos en dos:

$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \cdots \cup (B \cap A_n).$$

Dado que las partes son disjuntas, la probabilidad la encontramos sumando las probabilidades:

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \cdots + P(B \cap A_n)$$

y teniendo en cuenta la ecuación (18), $P(B \cap A_i) = P(B \mid A_i)P(A_i)$, para $i = 1,\ldots,n$, de donde se obtiene (22).

Ejemplo 2.15

Consideramos el mismo enunciado que en el ejemplo 2.13, y nos hacemos la pregunta siguiente: sabiendo que el funcionamiento del aparato ha sido óptimo, ¿cuál es la probabilidad de que nos encontremos en un rango de temperaturas correspondiente a T_1?

Está claro que lo que nos piden es $P(T_1 \mid O)$, que es precisamente lo contrario de los datos que nos dan, puesto que lo que conocemos es $P(O \mid T_1)$, $P(O \mid T_2)$ y $P(O \mid T_3)$.

Dado que conocemos la relación, $P(T_1 \mid O) = \dfrac{P(T_1 \cap O)}{P(O)}$, y los valores numéricos ya los hemos obtenido en el ejemplo anterior, tenemos que $P(T_1 \mid O) = \dfrac{0{,}1875}{0{,}585} = 0{,}3205$.

Acabamos de aplicar lo que se denomina *teorema de Bayes*. Veámoslo de manera general.

Teorema de Bayes

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ es un sistema completo de sucesos de Ω y $B \subset \Omega$, es válida la **fórmula de Bayes**:

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i)P(A_i)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + \cdots + P(B|A_n)P(A_n)}, \qquad (23)$$

para $i = 1,\ldots,n$.

La fórmula de Bayes se obtiene de

$$P(B \cap A_i) = P(B \mid A_i)P(A_i) = P(A_i \mid B)P(B),$$

aislando $P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i)P(A_i)}{P(B)}$ y sustituyendo $P(B)$ con (22).

Ejemplo 2.16

Hay tres empresas, A, B y C, que fabrican la misma pieza de avión en las proporciones siguientes, respecto del total de piezas fabricadas: 40%, 25% y 35%. El 10% de piezas que fabrica la empresa A son defectuosas, mientras que este porcentaje es del 5% para la empresa B, y del 1% para C. Dentro de la producción total de las tres empresas, se elige una pieza al azar y se observa que es defectuosa. Calculamos la probabilidad de que haya sido fabricada por la empresa A.

Definimos los sucesos siguientes:

$$D = \{\text{la pieza es defectuosa}\}$$

$$A = \{\text{la pieza ha sido fabricada por A}\}$$

$$B = \{\text{la pieza ha sido fabricada por B}\}$$

$$C = \{\text{la pieza ha sido fabricada por C}\}$$

A, B y C forman una partición, y conocemos $P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}25$ y $P(C) = 0{,}35$. El enunciado también nos da los datos sobre la probabilidad de que la pieza sea defectuosa según dónde ha sido fabricada: $P(D \mid A) = 0{,}1$, $P(D \mid B) = 0{,}05$ y $P(D \mid C) = 0{,}01$.

Según el teorema de la probabilidad total,

$$P(D) = P(D \mid A)P(A) + P(D \mid B)P(B) + P(D \mid C)P(C) = 0{,}056.$$

Con el teorema de Bayes, obtenemos lo que nos piden:

$$P(A \mid D) = \frac{P(D \mid A)P(A)}{P(D)} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}1}{0{,}056} = 0{,}714.$$

2.5 Diagramas de árbol

A la hora de aplicar los teoremas de la probabilidad total y Bayes, nos podemos ayudar con lo que denominamos *diagramas de árbol*.

Ejemplo 2.17

Vemos en la figura 6 la manera de representar mediante un diagrama de árbol la experiencia del ejemplo 2.16.

Figura 6. Diagrama de árbol

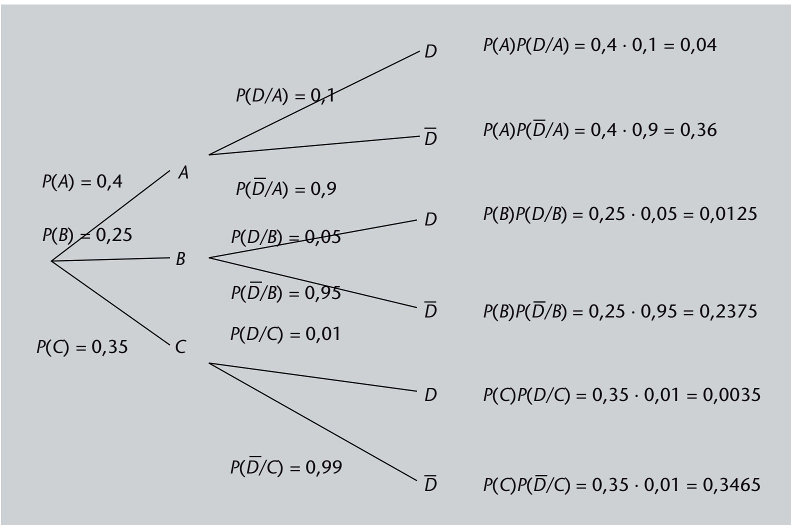


Figura 6

Representación gráfica de un diagrama de árbol, en el que cada rama nos indica una probabilidad.

Algunas consideraciones sobre estos diagramas:

- Nos imaginamos, temporalmente, la experiencia, de izquierda a derecha.
- Cada uno de los caminos, desde el inicio hasta el final, representa una posibilidad de la experiencia.
- A la derecha del diagrama, quedan representadas todas las posibilidades y, por lo tanto, la suma es 1.
- Cada uno de los segmentos representa un *paso* de la experiencia.
- La probabilidad que indicamos en cada uno de estos segmentos está condicionada a la parte del camino ya hecha.
- La suma de las probabilidades de todos los segmentos que parten de un mismo punto es 1.

Ejemplo 2.18

Se envía una palabra de tamaño 12 formada con elementos del conjunto {0,1} (cada uno de estos elementos es lo que se denomina *bit*). Una posible palabra podría ser 111000111000. Sabemos que la probabilidad de que un bit, independiente de los otros, llegue erróneo al receptor es de 0,1. Enviamos una palabra y nos planteamos las cuestiones siguientes:

1) ¿Cuál es la probabilidad de que no llegue ningún bit erróneo?

2) ¿Cuál es la probabilidad de que llegue un bit erróneo?

3) ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen dos bits erróneos?

4) ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen tres bits erróneos?

5) ¿Cuál es la probabilidad de que llegue, al menos, un bit erróneo?

6) ¿Cuál es la probabilidad de que llegue, como mínimo, un bit erróneo?

7) ¿Cuál es la probabilidad de que llegue, como máximo, un bit erróneo?

Nos podemos representar cada posibilidad como una secuencia de doce letras del conjunto {e,n}, según si el bit llega erróneo o no. Por ejemplo:

eeeeeeeeeeee	todos los bits llegan erróneos.
nneeeeeeeeee	todos los bits llegan erróneos menos los dos primeros.
nennnnnnnnnn	el segundo bit llega erróneo y los otros no.
enennnnnnnnn	el primer y tercer bit llegan erróneos y los otros no.

Dado que la probabilidad de que un bit cualquiera llegue erróneo es 0,1, y esta probabilidad es independiente de lo que les pasa a los otros bits, la probabilidad de cada una de las secuencias solo depende de la cantidad de e's o n's. Ahora podemos responder las preguntas anteriores.

1) $P(\texttt{nnnnnnnnnnnn}) = 0{,}9^{12} = 0{,}2824$.

2) Debemos tener en cuenta que el bit erróneo puede estar en la primera posición, o en la segunda, ..., o en la duodécima posición, es decir,

$$\texttt{ennnnnnnnnnn}, \texttt{nennnnnnnnnn}, \ldots, \texttt{nnnnnnnnnnne}.$$

Puesto que la probabilidad de cada uno de estos casos es $0{,}1 \cdot 0{,}9^{11}$,

$$P(\text{llega un bit erróneo}) = 12 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^{11} = 0{,}3766.$$

3) Del mismo modo que hemos hecho antes, tenemos que calcular cuántas palabras se pueden formar con dos bits erróneos, como por ejemplo:

$$\texttt{eennnnnnnnnn}, \texttt{enennnnnnnnn}, \ldots$$

El número de palabras de este tipo es $\binom{12}{2}$. Así,

$$P(\text{llegan dos bits erróneos}) = \binom{12}{2} 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^{10} = 0{,}2301.$$

4) Con un razonamiento parecido al caso anterior, obtenemos ahora

$$P(\text{llegan tres bits erróneos}) = \binom{12}{3} 0{,}1^3 \cdot 0{,}9^{9} = 0{,}0852.$$

5) Los casos que tienen al menos un bit erróneo son los que tienen un bit erróneo más los casos que tienen dos bits erróneos, etc. Es decir, son todos los casos menos el caso en el que no hay ningún bit erróneo. Dado que la probabilidad de todos los casos es 1, tenemos: P(llega al menos un bit erróneo) = $1 - 0{,}9^{12} = 0{,}7176$.

6) Nos piden lo mismo que en el caso anterior; así,

$$P(\text{llega como mínimo un bit erróneo}) = 1 - 0{,}9^{12} = 0{,}7176.$$

7) Aquí solo tenemos que contar los casos que no tienen ningún bit erróneo más los casos en los que hay un bit erróneo,

$$P(\text{llega como máximo un bit erróneo}) = 0{,}9^{12} + 12 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^{11} = 0{,}659.$$

Resumen

En el primer apartado de este módulo, hemos visto que dado un conjunto de elementos n, los podemos agrupar de diferentes maneras. Hemos definido los casos siguientes:

- Tomamos m elementos y consideramos que se pueden repetir y que tienen que estar ordenados (las muestras con orden diferente en sus elementos las consideramos distintas). Esto es lo que hemos denominado **variaciones con repetición**, y hemos visto que podemos formar un total de $VR_{n,m} = n^m$ muestras diferentes.

- Tomamos m elementos y consideramos que no se pueden repetir y que deben estar ordenados (las muestras con orden diferente en sus elementos las consideramos distintas). Esto es lo que hemos denominado **variaciones** o **permutaciones**. Podemos formar un total de muestras $V_{n,m} = n(n-1)\cdots(n-m+1)$ diferentes.

- Tomamos m elementos y consideramos que no se pueden repetir y que los elementos que forman la muestra no tienen que estar ordenados (las muestras con orden diferente en sus elementos consideramos que son la misma muestra). Esto es lo que hemos denominado **combinaciones**. Podemos formar un total de combinaciones $C_{n,m} = \binom{n}{m} = \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ diferentes.

- Finalmente, podemos tomar m elementos y considerar que se pueden repetir y que los elementos que forman la muestra no tienen que estar ordenados (las muestras con orden diferente en sus elementos consideramos que son la misma muestra). El número de combinaciones posibles que podemos formar de este tipo es $CR_{n,m} = C_{n-1+m,m} = \binom{n-1+m}{m} = \binom{n-1+m}{n-1}$.

A continuación, podéis ver un cuadro resumen del apartado de combinatoria.

	Con repetición	Sin repetición
Importa el orden	Variaciones con repetición: $VR_{n,m} = n^m$	Variaciones. Permutaciones de n elementos: $V_{n,m} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$
No importa el orden	Combinaciones con repetición: $CR_{n,m} = \binom{n-1+m}{n-1}$	Combinaciones: $C_{n,m} = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

Estas técnicas de contar nos ayudarán a resolver algunos problemas básicos en los que aplicamos la teoría de la probabilidad.

En el apartado 2 de este módulo, hemos visto que una **experiencia aleatoria** se da cuando no podemos predecir el resultado. Toda experiencia aleatoria tiene un conjunto de resultados posibles, que es lo que hemos denominado **espacio muestral** Ω.

Podemos definir un **suceso** o **acontecimiento** tomando un subconjunto del espacio muestral Ω. Por ejemplo, cuando lanzamos un dado podemos definir el suceso A como «obtener un resultado parejo». Podemos definir tantos sucesos como queramos, y cada suceso tendrá asociada una probabilidad de ocurrir o no. También podemos relacionar diferentes sucesos. De esta manera, hemos definido la noción de **suceso (o conjunto) complementario**, **suceso (o conjunto) unión** y **suceso (o conjunto) intersección**. Diferentes sucesos forman una **partición** cuando su unión nos da el conjunto total Ω y no tienen ningún elemento en común entre ellos.

Algunas relaciones importantes en cuanto a las probabilidades son las siguientes:

$$P(A^c) = 1 - P(A),$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Una noción importante vista en este apartado es la de **espacio equiprobable**, que se da cuando todos los resultados posibles de un experimento tienen la misma probabilidad de suceder. En estas condiciones, podemos aplicar la **ley de Laplace** para calcular probabilidades. En un espacio equiprobable,

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}}.$$

También hemos visto la noción de **probabilidad condicionada**, mediante la cual podemos calcular la probabilidad de un suceso sabiendo que se ha producido otro suceso determinado. Cuando los acontecimientos pasados no nos dan ninguna pista sobre un suceso concreto, hablamos de **sucesos independientes**. En estos casos:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

El **teorema de la probabilidad total** y el **teorema de Bayes** nos dan herramientas para manejar probabilidades condicionadas. Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ es un sistema completo de sucesos, entonces:

$$P(B) = P(B \mid A_1)P(A_1) + P(B \mid A_2)P(A_2) + \ldots + P(B \mid A_n)P(A_n),$$

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i)P(A_i)}{P(B \mid A_1)P(A_1) + P(B \mid A_2)P(A_2) + \cdots + P(B \mid A_n)P(A_n)}.$$

Finalmente, hemos visto una manera gráfica de trabajar con probabilidades, los **diagramas de árbol**.

Actividades

1. Mediante un generador de bits (0 y 1) aleatorio, generamos mensajes de 4 bits. Se pide lo siguiente:

a) Escribid el espacio muestral. ¿Cuántos elementos tiene?

b) Definid el suceso A = {hay un solo 0 en el mensaje generado}.

c) Definid el suceso B = {hay al menos tres 1 en el mensaje generado}.

d) Definid el conjunto unión de los conjuntos A y B.

e) Definid el conjunto intersección de los conjuntos A y B.

2. En una bolsa tenemos tres bolas: una roja, una azul y una amarilla. Elegimos dos bolas al azar. Una vez elegida la primera, la retornamos a la bolsa, de forma que para elegir la segunda volvemos a tener las tres bolas dentro.

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener las dos veces la bola roja?

b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos una vez la bola azul?

3. En un control de calidad, consideramos que un dispositivo electrónico funciona correctamente si pasa alguna de las dos pruebas que se efectúan en todos los dispositivos. Sabemos que el 80% de los dispositivos comprobados obtienen esta validación. El primer test lo pasan el 60% de los dispositivos y el segundo test, el 50% de los dispositivos. ¿Cuál habría sido el porcentaje de dispositivos validados si hubiéramos exigido que un dispositivo funciona correctamente si supera los dos tests?

4. La probabilidad de que un modelo de direccionador determinado falle es del 4%. Disponemos de un sistema de monitorización que detecta correctamente el 95% de los casos en los que un direccionador falla, pero en un 2% de los casos recibimos falsas alarmas (por congestión de la red, por ejemplo). Si nos llega una alarma, ¿cuál es la probabilidad de que se trate de una caída de un direccionador?

5. Una línea de ferrocarril tiene 25 estaciones. ¿Qué número de billetes diferentes deberemos imprimir si cada billete lleva imprimidas la estación de origen y la estación de destino?

6. Un fabricante produce PC en dos fábricas diferentes. El 50% de los PC se producen en la fábrica A, y sabemos que el 15% de los PC que se producen en A son defectuosos. También sabemos que el 5% de los PC que se producen en B son defectuosos.

¿Cuál es la probabilidad de adquirir un PC defectuoso? Si adquirimos un ordenador que resulta defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de la fábrica B? Comparad con la probabilidad *a priori*.

7. En una zona geográfica determinada, encontramos cobertura de dos compañías de telefonía móvil. A partir de diferentes estudios hechos a los usuarios, se ha obtenido la información siguiente:

- El 60% de los usuarios están abonados a la compañía A.
- El 40% de los usuarios están abonados a la compañía B.
- El 70% de los usuarios disponen de un teléfono modelo M_1.
- La probabilidad de corte de la llamada, $P(T)$, es de 0,1 para los usuarios de la compañía A, de 0,15 para los usuarios de la compañía B y de 0,05 para los usuarios que utilizan el modelo M_1.

Nos piden lo siguiente:

1) Determinar si los sucesos A y B forman una partición del espacio muestral de usuarios de telefonía móvil.

2) Calcular la probabilidad de corte de una llamada.

3) Sabemos que a un usuario se le ha cortado una llamada; ¿cuál es la probabilidad de que tenga un teléfono de la marca M_1?

4) Si sabemos que un usuario no tiene un teléfono de la marca M_1, ¿cuál es la probabilidad de que tenga un corte en una llamada?

Solucionario

1.

a) El espacio muestral, Ω, de nuestra experiencia aleatoria está formado por todos los sucesos posibles. Observad que en este experimento estamos considerando muestras de 4 elementos, ordenados y con repetición. Como hemos visto en el subapartado 1.1, lo hemos denominado variaciones con repetición. En este caso, consideramos 2 elementos (los bits 0 y 1) tomados de 4 en 4, $VR_{2,4} = 2^4 = 16$. Los elementos del conjunto Ω son los siguientes:

$$\Omega = \{0000,1000,0100,0010,0001,1100,1010,1001,\\ 0110,0101,0011,1110,1101,1011,0111,1111\}.$$

b) A continuación, nos piden que identifiquemos el suceso ≪hay un solo 0 en el mensaje generado≫. Vamos al espacio muestral que hemos definido en el apartado anterior, y tomamos aquellos elementos en los que se da esta condición:

$$A = \{1110,1101,1011,0111\}.$$

Observad que A es un subconjunto del espacio muestral Ω.

c) Para definir el suceso ≪hay al menos tres 1 en el mensaje generado≫, como hemos hecho en el apartado anterior, nos fijamos en los elementos del espacio Ω que cumplen esta condición:

$$B = \{1110,1101,1011,0111,1111\}.$$

d) El conjunto unión de A y B está formado por los elementos que cumplen indistintamente las condiciones ≪hay un único 0 en el mensaje generado≫ o ≪hay al menos tres 1 en el mensaje generado≫. Observad que, en este caso, los cuatro elementos de A también pertenecen a B. Por lo tanto, la unión de los dos subconjuntos es B:

$$A \cup B = B = \{1110,1101,1011,0111,1111\}.$$

e) El conjunto intersección de A y B está formado por los elementos que cumplen simultáneamente las dos condiciones. Es decir, para los elementos que estén en los dos subconjuntos. En este caso:

$$A \cap B = A = \{1110,1101,1011,0111\}.$$

2.

a) Con $i = 1,2$, denotamos

$$V_i = \{\text{Bola roja en la extracción } i\text{-ésima}\}, \quad B_i = \{\text{Bola blanca en la extracción } i\text{-ésima}\}.$$

Para obtener dos veces la bola roja, se tiene que dar el suceso $V_1 \cap V_2$. Dado que las tres bolas tienen la misma probabilidad de salir, es decir, son equiprobables, podemos aplicar la ley de Laplace, de forma que dividimos casos favorables (que salga la bola roja) entre casos posibles (podemos obtener cualquiera de las tres bolas). Por lo tanto, $P(V_1) = \frac{1}{3}$. Puesto que una vez que hacemos la primera extracción retornamos la bola al saco, para la segunda extracción partimos de las mismas condiciones. Por lo tanto, $P(V_2) = \frac{1}{3}$. Los sucesos son independientes, ya que el primer resultado no nos da ninguna pista de cómo será el segundo resultado; por lo tanto, la probabilidad de la intersección es el producto de probabilidades:

$$P(V_1 \cap V_2) = P(V_1)P(V_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$$

b) El suceso ≪obtener al menos una vez la bola azul≫ se da cuando la obtenemos la primera vez, o bien la segunda, o bien las dos veces. Deberemos calcular, pues, la probabilidad de la unión de estos sucesos. Tenemos que procurar no contar dos veces la probabilidad de la intersección de los conjuntos; por lo tanto:

$$P(B_1 \cup B_2) = P(B_1) + P(B_2) - P(B_1 \cap B_2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}.$$

3. Definimos el suceso T_1 como ≪pasar el primer test≫, y el suceso T_2 como ≪pasar el segundo test≫. Por el enunciado, sabemos lo siguiente: $P(T_1 \cup T_2) = 0{,}8$. También tenemos las probabilidades de pasar cada test: $P(T_1) = 0{,}6$ y $P(T_2) = 0{,}5$. Nos piden la probabilidad de pasar el primer y el segundo test, es decir, la probabilidad $P(T_1 \cap T_2)$. Sabemos que la probabilidad de la unión es:

$$P(T_1 \cup T_2) = P(T_1) + P(T_2) - P(T_1 \cap T_2).$$

Aislando el término que estamos buscando:

$$P(T_1 \cap T_2) = P(T_1) + P(T_2) - P(T_1 \cup T_2) = 0{,}6 + 0{,}5 - 0{,}8 = 0{,}3.$$

Si hubiéramos exigido pasar las dos pruebas, solo el 30% de los dispositivos electrónicos se habrían validado.

4. Denominamos el suceso C = {caída de un direccionador} y el suceso A = {recibir alarma}. Por el enunciado, sabemos lo siguiente: $P(C) = 0{,}04$. También sabemos que $P(A \mid C) = 0{,}95$ y $P(A \mid C^c) = 0{,}2$. Aplicamos el teorema de Bayes para calcular la probabilidad de que se dé una caída de direccionador, sabiendo que hemos recibido una alarma:

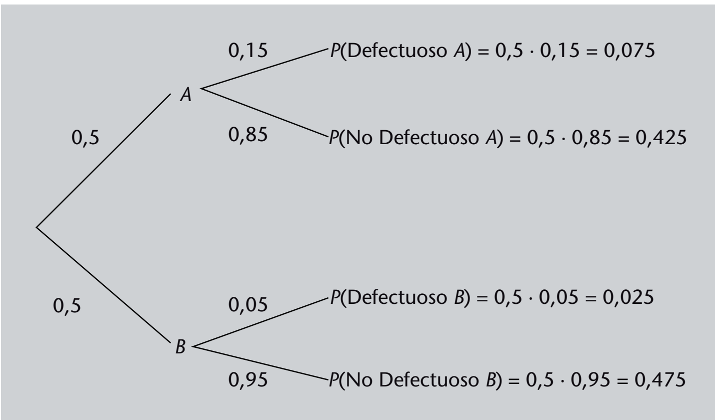
$$P(C \mid A) = \frac{P(A \mid C)P(C)}{P(A \mid C)P(C) + P(A \mid C^c)P(C^c)} = \frac{0{,}95 \cdot 0{,}04}{0{,}95 \cdot 0{,}04 + 0{,}02 \cdot 0{,}96} = 0{,}664.$$

5. Sabemos, por un lado, que las estaciones de origen y de destino no se pueden repetir. También sabemos que dadas dos estaciones, tenemos que diferenciar cuál es el origen y cuál el destino. Por lo tanto, el número de billetes diferentes para imprimir lo podemos calcular como el número de variaciones sin repetición de 25 elementos tomados de 2 en 2. Es decir:

$$V_{25,2} = 25 \cdot 24 = 600.$$

6. Una manera de resolver este problema es haciendo el diagrama de árbol correspondiente, como podéis ver en la figura 7.

Figura 7. Diagrama de árbol para el problema 6



A y B denotan las dos fábricas. D es el suceso ≪adquirir un ordenador defectuoso≫. Como se ve en el diagrama: $P(A) = P(B) = 0{,}5$, $P(D \mid A) = 0{,}15$, $P(D \mid B) = 0{,}05$.

La probabilidad de adquirir uno defectuoso es:

$$P(D) = P(D \mid A)P(A) + P(D \mid B)P(B) = 0{,}5 \cdot 0{,}15 + 0{,}5 \cdot 0{,}05 = 0{,}1.$$

La probabilidad de que un ordenador defectuoso provenga de B es:

$$P(B \mid D) = \frac{P(D \mid B)P(B)}{P(D)} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}05}{0{,}1} = 0{,}25.$$

A priori, $P(B) = 0{,}5$. La probabilidad ha disminuido, puesto que el hecho de que sea defectuoso decanta la probabilidad en favor de A, donde es más probable que un ordenador salga defectuoso.

7. El enunciado nos da las probabilidades siguientes:

- $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}4$.
- $P(M_1) = 0{,}7$.
- $P(T \mid A) = 0{,}1$.
- $P(T \mid B) = 0{,}15$.
- $P(T \mid M_1) = 0{,}05$.

1) Con los datos del enunciado, podemos decir que los sucesos A y B (pertenecer a una compañía telefónica o a la otra) forman una partición del espacio muestral, puesto que son disjuntos y su unión nos da el total de usuarios de telefonía.

2) La probabilidad de corte en una llamada es la siguiente:

$$P(T) = P(T \mid A)P(A) + P(T \mid B)P(B) = 0{,}1 \cdot 0{,}6 + 0{,}15 \cdot 0{,}4 = 0{,}12.$$

3) A continuación, calculamos la probabilidad de que un usuario a quien se le ha cortado la comunicación tenga un teléfono de la marca M_1:

$$P(M_1 \mid T) = \frac{P(T \mid M_1)P(M_1)}{P(T)} = \frac{0{,}05 \cdot 0{,}7}{0{,}12} = 0{,}2917.$$

4) Sabiendo que un usuario no tiene un teléfono de la marca M_1, la probabilidad de corte de llamada es la siguiente:

$$P(T \mid M_1^c) = \frac{P(M_1^c \mid T)P(T)}{P(M_1^c)} = \frac{(1 - 0{,}2917) \cdot 0{,}12}{0{,}3} = 0{,}2833.$$